

**Phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán ở bậc trung học phổ thông về bất đẳng thức và các bài toán cực trị : Luận văn
ThS. Giáo dục học: 60 14 10 / Tạ Xuân Hòa ; Nghd.
: PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương**

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong quá trình hình thành và phát triển tư duy của học sinh thì Toán học có vai trò đặc biệt quan trọng. Người giáo viên cần rèn luyện cho học sinh thấy được nhiều hình thức có thể diễn tả cùng một nội dung Toán học đồng thời phải rèn luyện cho học sinh biết lựa chọn hình thức phù hợp nhất thể hiện nội dung đó.

Bất đẳng thức và cực trị có vị trí đặc biệt trong toán học, không chỉ như những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn,...

Trong chương trình toán phổ thông, Bất đẳng thức và cực trị là một trong những nội dung hay và thường xuất hiện trong các kì thi đại học, học sinh giỏi các cấp, Olympic Toán,... Đây cũng là một nội dung quan trọng nhằm rèn luyện trí tuệ cho học sinh. Nhìn bất đẳng thức dưới nhiều phương diện khác nhau sẽ giúp học sinh linh hoạt trong lựa chọn hình thức thể hiện nội dung này. Điều đó kích thích tư duy sáng tạo cho các em.

Tuy nhiên, bất đẳng thức và cực trị là một nội dung khó, nếu không đổi mới phương pháp dạy học thì có thể dẫn đến tình trạng truyền thụ một chiều. Định hướng đổi mới phương pháp dạy học hiện nay là tích cực hóa việc học của người học. Để giải quyết mâu thuẫn trên đây người thầy cần tăng cường giao lưu giữa thầy và trò trong quá trình dạy học. Có như vậy mới có thể vừa tích cực hóa được việc học của người học vừa rèn luyện được tính linh hoạt nhìn nhận một vấn đề theo nhiều phương diện khác nhau cho học sinh.

Để đáp ứng nhu cầu phát triển năng lực tư duy, năng lực nghiên cứu, sáng tạo cho học sinh ngay từ khi bước chân vào cấp ba, chúng tôi đã chọn đề tài “*Phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán ở bậc trung học phổ thông về bất đẳng thức và các bài toán cực trị*”.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu.

Mục đích nghiên cứu: Nâng cao kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh thông qua dạy học phần bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Nhiệm vụ nghiên cứu:

- Nghiên cứu phương pháp nhằm phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh.
- Xây dựng hệ thống các modun kiến thức trong dạy học nội dung bất đẳng thức và cực trị cho học sinh khá giỏi.
- Thực nghiệm sư phạm để kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

3. Nội dung nghiên cứu.

- Nghiên cứu các phương pháp dạy học nhằm phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh.
- Nghiên cứu về bất đẳng thức và cực trị.
- Nhìn nhận đẳng thức, bất đẳng thức theo nhiều phương diện khác nhau dựa vào mối liên hệ tương ứng giữa các số với các đại lượng hình học và lượng giác.
- Sáng tạo bất đẳng thức bằng cách nhìn bất đẳng thức đã có theo những phương diện mới.
- Đề xuất giải pháp sư phạm.

4. Phương pháp nghiên cứu.**4.1. Nghiên cứu lý luận.**

Tìm hiểu, nghiên cứu những vấn đề liên quan đến đề tài định hướng cho việc nghiên cứu; phân tích và tổng hợp những quan điểm dựa trên các tài liệu về tâm lý học, giáo dục học, phương pháp dạy học môn toán và các tài liệu về bất đẳng thức và cực trị.

4.2. Thực nghiệm sư phạm.

Đối tượng thực nghiệm: học sinh lớp 12A1, 12A5 trường THPT Ngô Quyền.
Xử lý kết quả bằng một số phương pháp thống kê toán học.

5. Cấu trúc luận văn.

Ngoài phần mở đầu, mục lục và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 3 chương chính sau:

Chương 1. CƠ SỞ LÝ LUẬN

Chương 2. HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ NGHIÊN CỨU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

Chương 3. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

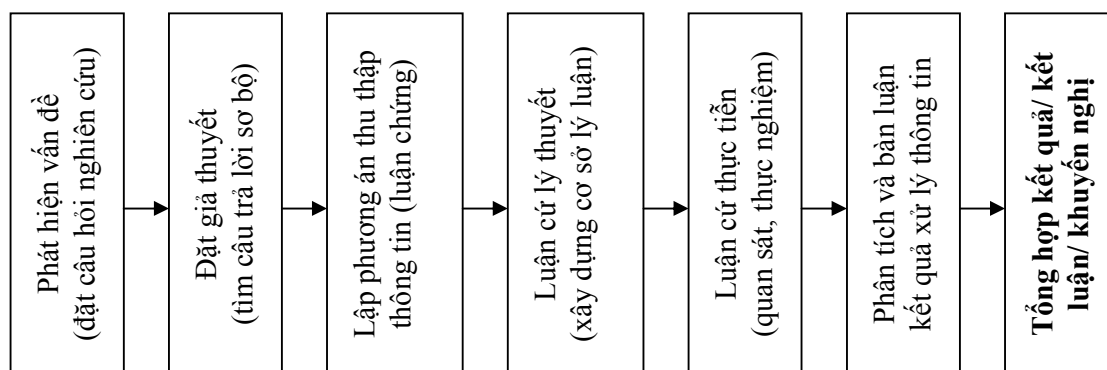
Chương 1 CƠ SỞ LÝ LUẬN

1.1. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học - sự lựa chọn cho nền giáo dục đại học hiện đại

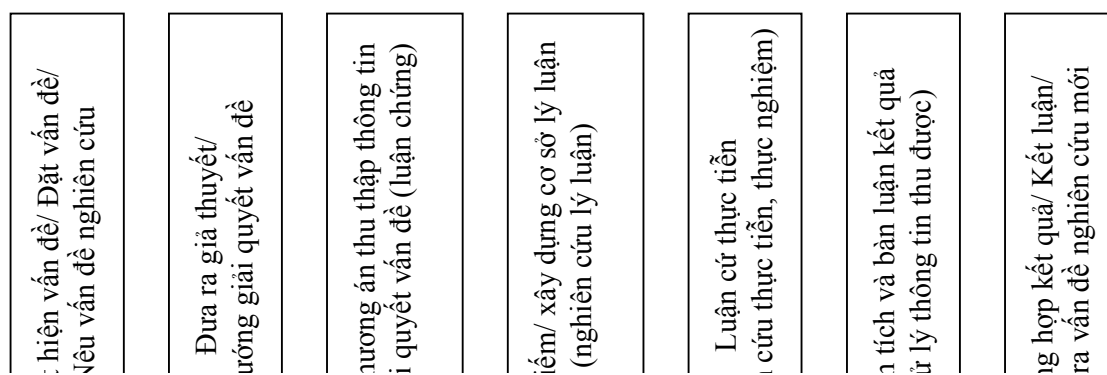
1.1.1. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học

Bản chất của dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học là tổ chức quá trình người học lĩnh hội nội dung dạy học theo logic nghiên cứu khoa học.

Trình tự logic của nghiên cứu khoa học có thể được mô hình hóa qua các giai đoạn cơ bản như sau:



Áp dụng mô hình này vào việc dạy học với tư cách một phương pháp dạy học chúng ta có thể nói đến một trật tự tương tự trong thiết kế từng môn học và từng vấn đề trong nội dung môn học. Việc nghiên cứu một môn học hay một bài học sẽ bắt đầu từ việc người dạy cùng với người học phát hiện/đặt ra vấn đề cần giải quyết (vấn đề lý luận hay thực tiễn) trong khuôn khổ môn học và liên môn. Giai đoạn tiếp theo sẽ là giải quyết vấn đề đặt ra thông qua các nghiên cứu lý thuyết và thực tiễn do người học tiến hành. Ở đây công việc của người dạy là hướng dẫn và trợ giúp, công việc của người học là thực hiện việc giải quyết vấn đề. Giai đoạn cuối sẽ là đánh giá việc đặt và giải quyết vấn đề, và trên cơ sở đó đặt ra những vấn đề mới để giải quyết. Cứ như vậy toàn bộ quá trình dạy học sẽ là một chu trình liên tục đặt và giải quyết các vấn đề. Có thể hình dung quá trình dạy học như một chuỗi hoạt động liên tục như sau:





Ở mỗi giai đoạn trong chuỗi trên là hoạt động cùng nhau của cả người dạy và người học theo nguyên tắc người dạy hướng dẫn, cố vấn, trợ giúp - người học chủ động tiến hành việc tìm kiếm, giải quyết vấn đề. Ở đây các kỹ thuật dạy học khác nhau, từ tự nghiên cứu, quan sát, làm thực nghiệm đến thảo luận, thuyết trình, làm báo cáo... đều có thể được sử dụng. Có thể thấy ở đây sự dung hợp trong hướng dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học các phương pháp và kỹ thuật dạy học hiện đại, tích cực.

1.1.2. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học có những ưu thế gì?

Bảo đảm vị thế tích cực, chủ động của người học. Người học được đặt vào vị trí chủ động nhất: tìm tòi, phát hiện và độc lập giải quyết (thông qua các nghiên cứu lý luận và thực tiễn do chính mình thực hiện) các vấn đề lý luận và thực tiễn của từng bộ môn, từng lĩnh vực tri thức.

Hình thành phương pháp làm việc khoa học. Ở đây người học được tập luyện tối đa phương pháp làm việc theo đúng quy trình nghiên cứu khoa học. Điều này tạo cơ sở vững chắc cho việc hình thành ở người học các phẩm chất và năng lực, kỹ năng và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học – yêu cầu bắt buộc đối với người trí thức thời đại kinh tế tri thức và xã hội học tập.

Phát triển hứng thú nhận thức, thỏa mãn nhu cầu tìm tòi, khám phá của người học. Trong hướng dạy học này người học không chỉ tự mình tìm cách giải quyết các vấn đề đặt ra mà còn tự phát hiện ra các vấn đề mới cần giải quyết. Điều này thỏa mãn nhu cầu đặc trưng của con người – nhu cầu tìm tòi khám phá. Những cảm xúc có được thông qua sự tìm tòi khám phá, cảm xúc thành công và cảm xúc về sự hoàn thành trọn vẹn một công việc là những củng cố tích cực cho việc hình thành và phát triển nhu cầu và hứng thú nhận thức của người học.

Bảo đảm tốt nhất yêu cầu cá biệt hóa dạy học, phù hợp với tốc độ, nhịp độ học tập của từng người học. Mỗi người học đặt ra và giải quyết các vấn đề trong khả năng của mình, với tốc độ và nhịp độ phù hợp nhất với mình. Điều này cho phép hiện thực hóa tối đa yêu cầu cá biệt hóa dạy học, đồng thời cũng bảo đảm một sự đánh giá khách quan nhất những tiến bộ của người học.

Phù hợp đặc điểm tâm lý-nhận thức, nhân cách của người học trưởng thành. G.A.Kelly, nhà tâm lý học xuất sắc thế kỷ XX, nhìn nhận mỗi con người là một nhà khoa học, nó cố gắng hiểu, lý giải, dự đoán, kiểm soát thế giới các sự kiện để có thể tác động qua lại có hiệu quả với chúng. Cách thức nhận thức thế giới của con người giống hệt như cách thức nhận thức của nhà khoa học. Người trưởng thành lại có xu hướng học thông qua giải quyết các vấn đề (Knowles), họ chủ động xây dựng kiến thức cho bản thân bằng cách tạo các biểu tượng của chính họ về những điều cần học, lựa chọn thông tin mà

họ nhận thấy là thích hợp, và diễn giải thông tin trên cơ sở kiến thức và nhu cầu hiện có của họ (Prawat & Floden, 1994). Chính những lý do này cho phép khẳng định, về mặt tâm lý học dạy học, dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học là phù hợp hơn cả đối với người học trưởng thành.

Gắn đào tạo với việc giải quyết các nhiệm vụ thực tiễn. Bằng việc phát hiện và giải quyết các vấn đề nảy sinh trong từng môn khoa học, từng lĩnh vực tri thức, quá trình học tập, đào tạo được gắn một cách hữu cơ vào cuộc sống xã hội, vào đời sống khoa học. Nói một cách khác, bằng cách này nguyên lý “học đi đôi với hành, giáo dục kết hợp với lao động sản xuất, lý luận gắn liền với thực tiễn” được thực hiện triệt để hơn cả. Đồng thời, người học thấy được giá trị thực tiễn của các tri thức, kỹ năng, kỹ xảo học được, điều này tạo ra động cơ tích cực cho việc học.

Bảo đảm xu hướng dân chủ hóa nhà trường. Đây là xu thế chung của giáo dục thế giới hiện đại. Với việc đưa phương pháp nghiên cứu khoa học vào dạy học, người học sẽ có cơ hội nhìn vấn đề từ nhiều góc độ, nhiều quan điểm nghiên cứu, tránh bị áp đặt một hướng nhìn duy nhất, và có cơ hội đưa ra giải pháp mang tính sáng tạo và dấu ấn cá nhân. Đây là tiền đề quan trọng cho việc dân chủ hóa nhà trường và giáo dục.

Phù hợp với đặc điểm người giáo viên. Người giáo viên là giảng viên-nhà nghiên cứu. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học sẽ là “tự nhiên” đối với giáo viên, hoạt động dạy học và nghiên cứu khoa học được hòa quyện với nhau theo cùng một logic. Những kinh nghiệm nghiên cứu khoa học được áp dụng tối đa cho đào tạo và điều này bảo đảm một sự thành công gần như chắc chắn đối với hầu hết mọi nhà giáo.

Phù hợp với điều kiện không gian và thời gian của việc đào tạo trong xã hội hiện đại. Mạng thông tin toàn cầu được khai thác tối đa bởi học sinh để phục vụ việc tìm kiếm và giải quyết các vấn đề bởi lẽ người học phải tự đặt ra và giải quyết các vấn đề mà không thể trông chờ ở sự cung cấp của giáo viên. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học cũng cho phép sử dụng tối ưu quỹ thời gian của người học. Điều này phù hợp với xu thế chung của các chương trình giáo dục trên thế giới.

Nói tóm lại, dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học bảo đảm tốt nhất mục tiêu giáo dục trong khung cảnh thời đại mới như yêu cầu của Luật giáo dục: “phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo của người học; bồi dưỡng năng lực tự học, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên”, và yêu cầu của Chiến lược phát triển giáo dục Việt Nam 2001-2010: “dạy người học phương pháp tự học, tự thu nhận thông tin một cách có hệ thống và có tư duy phân tích, tổng hợp, tăng cường tính chủ động, tính tự chủ của học sinh trong học tập”. Sự định hướng vào phương pháp dạy học này hoàn toàn phù hợp với định hướng của Nghị quyết 02-NQ/HNTW BCH TW Đảng khóa VIII: “Đổi mới mạnh mẽ phương pháp giáo dục đào tạo, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện nếp tư duy sáng tạo của người học. Từng bước áp dụng các phương pháp tiên tiến và các phương tiện hiện đại

vào quá trình dạy học, đảm bảo điều kiện và thời gian tự học, tự nghiên cứu cho học sinh, nhất là sinh viên đại học”.

1.1.3. Những yêu cầu của dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học

Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học đòi hỏi, trước hết, người giáo viên phải là một nhà nghiên cứu khoa học, biết cách tìm tòi và giải quyết các vấn đề lý luận và thực tiễn nảy sinh. Chỉ trong trường hợp này người dạy mới có thể hướng dẫn người học học - nghiên cứu được.

Thứ hai, nội dung dạy học phải được thiết kế hướng vào các vấn đề/câu hỏi lý luận và thực tiễn cụ thể của từng môn học hay lĩnh vực ứng dụng.

Thứ ba, các phương tiện phục vụ học tập, nhất là tài liệu dạy học, phải đa dạng, đầy đủ theo hướng phục vụ nghiên cứu.

Thứ tư, phương pháp kiểm tra, đánh giá phải hướng trước hết vào đánh giá năng lực tự học, tự nghiên cứu, khả năng sáng tạo của người học.

Thứ năm, việc quản lý quá trình dạy học phải dịch chuyển theo hướng gắn với những đặc thù của việc nghiên cứu khoa học hơn là của việc dạy học thuần túy.

1.1.4. Kết luận

Việc tìm kiếm những đường hướng và phương pháp dạy học cho phép thực hiện hiệu quả nhất mục tiêu giáo dục luôn là vấn đề cấp thiết cả về mặt lý luận và thực tiễn. Phương pháp giáo dục đang được sử dụng phổ biến trong dạy học ở nước ta đã bộc lộ những khiếm khuyết - tạo ra tính ỷ, sự thụ động, kinh viện, thiếu sáng tạo ở người học. Dạy học theo phương pháp nghiên cứu khoa học tỏ ra thích hợp hơn cả trong việc thực hiện mục tiêu tạo ra những con người “tự sản sinh ra năng lực và phẩm chất của chính mình” (mượn cách nói của C. Marx), đáp ứng những đòi hỏi khắt khe nhất của thực tiễn xã hội hiện đại.

1.2. Phát hiện và bồi dưỡng học sinh khá giỏi ở trường phổ thông

1.2.1. Mục tiêu của việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán

Hiện nay ở nước ta, những học sinh giỏi toán ở trường THPT thường được tập hợp thành những lớp đặc biệt ở những lớp chuyên hay khối chuyên, trường chuyên. Mục tiêu của những lớp này là phát hiện những học sinh có năng lực toán học, bồi dưỡng các em phát triển tốt về mặt này trên cơ sở giáo dục toàn diện, góp phần đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học kỹ thuật giỏi, trong số đó một số có thể trở thành nhân tài của đất nước.

1.2.2. Năng khiếu toán học

Năng khiếu, theo định nghĩa của từ điển tiếng Việt là năng lực trội, năng lực đặc biệt của con người xuất hiện từ khi còn nhỏ. Như vậy năng khiếu toán học có thể coi như một tổ hợp những năng lực toán học, mà ở lứa tuổi học sinh thể hiện rõ nhất ở năng lực học toán.

1.2.3. Phát triển tư duy sáng tạo toán học cho học sinh ở trường phổ thông

Môn toán với vị trí của nó trong nhà trường phổ thông, có khả năng to lớn giúp học sinh phát triển các năng lực và phẩm chất trí tuệ, rèn luyện tư duy chính xác, hợp logic, phương pháp khoa học trong suy nghĩ, lập luận, trong học tập và giải quyết các vấn đề: Biết quan sát, thí nghiệm, mò mẫm, dự đoán, dùng tương tự, quy nạp, chứng minh...và qua đó có tác dụng lớn rèn luyện cho học sinh trí thông minh sáng tạo. Phát triển tư duy sáng tạo toán học nằm trong việc phát triển năng lực trí tuệ chung, một nội dung quan trọng của mục đích dạy học môn toán. Mục đích đó cần được thực hiện có ý thức, có hệ thống, có kế hoạch chứ không phải tự phát. Về phía người giáo viên, trong hoạt động dạy học toán cần vạch ra những biện pháp cụ thể và thực hiện đầy đủ một số mặt sau đây:

- Rèn luyện tư duy logic và ngôn ngữ chính xác.
- Phát triển khả năng suy đoán và tưởng tượng.
- Rèn luyện các hoạt động trí tuệ cơ bản, các thao tác tư duy như: Phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, trừu tượng hoá.
- Hình thành, rèn luyện những phẩm chất trí tuệ như: Tính linh hoạt, tính độc lập, tính sáng tạo trong tư duy.

1.3. Xác định Đề tài nghiên cứu và định hướng nghiên cứu

Tính mới: Không trùng lặp hoàn toàn với các công trình khoa học trước đó.
Tính thời sự: Xã hội hiện nay đang quan tâm, thể hiện trên TV, mạng, báo chí,...

Tính thực tiễn: Nhằm giải quyết các hiện tượng xã hội đang diễn ra, hoặc sắp diễn ra trong tương lai gần đối với đất nước hoặc 1 địa phương.

Tính khả thi: Có thể được ứng dụng ngay để giải quyết các vấn đề đang đặt ra, phù hợp với hoàn cảnh thực tiễn, không bị lệ thuộc vào quá nhiều điều kiện khách quan, ...

Tính hợp lý: Phải chứng minh được bằng những lý thuyết, những lập luận logic, những thông tin và số liệu thống kê, điều tra, ...

Tính ứng dụng: Có thể ứng dụng được các kiến thức được cung cấp trong quá trình học để giải quyết vấn đề.

Tính kế thừa: Cố gắng không bắt đầu từ đầu, phải tận dụng được những kết quả có sẵn của các công trình nghiên cứu trước đó, từ đó thể hiện rằng công trình của mình là một bước tiến mới so với các công trình trước đó.

Tính hấp dẫn và hữu ích đối với bản thân: Đề tài đó làm mình thấy lôi cuốn, phù hợp với sở thích riêng, phù hợp với công việc của mình trong tương lai.

1.4. Các bước trong quá trình nghiên cứu

Bước 1: Xác định đề tài nghiên cứu và thể loại công trình nghiên cứu của mình.

Bước 2: Cố gắng đọc lướt tất cả các tài liệu có liên quan đến đề tài nghiên cứu.

Bước 3: Qua quá trình nghiên cứu (tại bước 2) cố gắng phân nhóm các quan điểm về từng vấn đề của đề tài nghiên cứu. Có thể tham khảo thêm quan điểm của nhiều thầy cô và các bạn (gặp trực tiếp hoặc thông qua giờ thảo luận)

Bước 4: Suy nghĩ để định ra quan điểm của riêng mình.

Bước 5: Phác thảo Đề cương. Đề cương phải được thiết kế sao cho có tính logic, phù hợp với đề tài của mình và thể hiện được ý đồ sáng tạo tổng thể của mình.

Bước 6: Viết từng phần của công trình nghiên cứu theo Đề cương định sẵn.

Bước 7: Quên đi tất cả những gì đã viết (1-2 tuần).

Bước 8: Đọc lại, tự phản biện và nhờ thầy cô sửa giúp.

Bước 9: Chỉnh sửa, hoàn thiện và nộp.

Bước 10: Tiếp tục nghiên cứu, đọc lại và chuẩn bị cho công việc bảo vệ.

Chương 2

HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ NGHIÊN CỨU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

2.1. Các bất đẳng thức đại số cơ bản :

2.1.1. Bất đẳng thức AM - GM :

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Bất đẳng thức AM - GM (Arithmetic Means - Geometric Means) là một bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rất rộng rãi. Đây là bất đẳng thức ta cần ghi nhớ rõ ràng nhất, nó sẽ là công cụ hoàn hảo cho việc chứng minh các bất đẳng thức.

2.1.2. Bất đẳng thức BCS :

Với hai bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta luôn có :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

2.1.3. Bất đẳng thức Jensen :

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và n điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ tùy ý trên đoạn $[a, b]$ ta có :

i) $f''(x) > 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

ii) $f''(x) < 0$ trong khoảng (a, b) thì :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

hoặc

Cho $f : R^+ \rightarrow R$ thỏa mãn $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \forall x, y \in R^+$ Khi đó với mọi $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ ta có bất đẳng thức :

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq n f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

2.1.4. Bất đẳng thức Chebyshev :

Với hai dãy số thực đơn điệu cùng chiều $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

2.2. Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác :

2.2.1. Đẳng thức :

2.2.2. Bất đẳng thức :

2.3. Một số định lý khác

2.3.1. Định lý Lagrange

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

2.3.2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a , với mọi số thực x .
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và giả sử $x_1 < x_2$. Thế thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ (tức là $x < x_1$ hay $x > x_2$) và $f(x)$ trái dấu với a khi x ở trong khoảng hai nghiệm (tức là $x_1 < x < x_2$).

2.3.3. Định lý về hàm tuyến tính

Xét hàm $f(x) = ax + b$ xác định trên đoạn $[\alpha; \beta]$

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(\alpha) \geq k \\ f(\beta) \geq k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

thì $f(x) \geq k \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$.

Một số kết quả nghiên cứu

2.4. Ứng dụng quan hệ của đường thẳng với đường conic vào bài toán tìm cực trị của một biểu thức đại số.

Dạng 1. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức sau: $F = ax + by$ với x, y thỏa mãn $px^2 + qy^2 = r$ (p, q, r cùng dấu và a, b là các hằng số cho trước)

Phương pháp: Biến đổi điều kiện đã cho về dạng: $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{p}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{r}{q}}\right)^2} = 1$

Điều kiện đã cho được biến đổi thành phương trình của một elip(E). Coi $F = ax + by$ là phương trình của đường thẳng d . Tìm dải mặt phẳng P hoặc miền góc Q chứa (E) và biên của chúng có duy nhất một điểm chung với (E). Từ đó tìm ra được GTNN và GTLN của biểu thức.

Ví dụ 2.4.1. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $F = 2x - y$ với x, y thỏa mãn

$$y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} \quad (y > 0)$$

Lời giải.

Điều kiện được viết dưới dạng phương trình của elip(E) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng có duy nhất một điểm chung với (E) và song song với đường thẳng $x + 2y = 0$.

Suy ra (d_1): $x + 2y = 5$, (d_2): $x + 2y = -5$

Xét dải mặt phẳng P với biên d_1, d_2 chứa (E). Biên P cắt Ox tại các điểm $M_1(5;0), M_2(-5;0)$.

Đường thẳng $x + 2y = F$ cắt M_1M_2 tại $M(F;0)$

Từ đó ta tìm được $Max F = 5$ đạt tại $x=3,4$ và $y=1,6$.

$Min F = -5$ đạt tại $x=-3,4$ và $y=-1,6$.

Dạng 2. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức sau $F = \sqrt{b-ax^2} + cx$ với a, b, c là các hằng số cho trước ($a < 1$) và x thuộc miền xác định của F .

Phương pháp: Đặt $y = \sqrt{b-ax^2}$

Bài toán chuyển về tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F = y + cx$ với

$$\begin{cases} y^2 + ax^2 = b \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

Điều kiện này gồm nửa đường elip phía trên trục Ox .

Ví dụ 2.4.2. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức sau $F = 2x + \sqrt{25 - \frac{x^2}{9}}$

Dạng 3. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $F = \sqrt{a-b(x+p)^2} + cx$ với x thuộc miền xác định của F và $a > 0, b > 0, c, p$ là các hằng số.

Phương pháp: Đặt $z = x + p$

Ta có $F = \sqrt{a-bz^2} + cz - cp$

Khi đó bài toán 3 được đưa về bài toán 2.

Dạng 4. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F = p\sqrt{a+bx} - q\sqrt{c+dx}$ với a, b, c, d, p, q là các hằng số thỏa mãn điều kiện $b.d < 0$.

Phương pháp: Coi $b > 0$, khi đó $d < 0$ và đặt $y = \sqrt{a+bx}, z = \sqrt{c+dx}$ ta có:

$$F = py + qz \text{ với } y, z \text{ thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} bz^2 + (-d)y^2 = bc - ad \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

bài toán 4 được đưa về bài toán 2.

Dạng 5. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ với x, y thỏa

$$\text{mãn điều kiện } \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

Từ đó ta có thể mở rộng: Tìm GTLN và GTNN của

$$F = \frac{p_1\sqrt{ax+b} + q_1\sqrt{cx+d} + r_1}{p_2\sqrt{ax+b} + q_2\sqrt{cx+d} + r_2}$$

với $a > 0, c > 0, b, d, p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ là các hằng số thỏa mãn các điều kiện $b.d < 0$.

Phương pháp: Coi $b > 0$, khi đó $d < 0$ và đặt $y = \sqrt{a+bx}, z = \sqrt{c+dx}$ ta tìm

GTLN và GTNN của $F = \frac{p_1y + q_1z + r_1}{p_2y + q_2z + r_2}$ với y, z thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} bz^2 + (-d)y^2 = bc - ad \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Dạng 6. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $F = \frac{\alpha\sqrt{a-bx^2} + p_1x + q_1}{\beta\sqrt{a-bx^2} + p_2x + q_2}$

với $ab > 0$, $0 \leq \alpha$, $b > 0$, $p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha, \beta$ là các hằng số.

Phương pháp: Đặt $y = \sqrt{a - bx^2}$ khi đó bài toán được đưa về tìm GTLN,

GTNN của $F = \frac{\alpha y + p_1 x + q_1}{\beta y + p_2 x + q_2}$ với x, y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} bx^2 + y^2 = a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a} \end{cases}$

2.5. Phương pháp xây dựng bất đẳng thức

2.5.1. Phương pháp xây dựng bất đẳng thức dạng phân thức

Chúng ta bắt đầu với hai bất đẳng thức khác nhau về thứ tự biến số

Ví dụ 2.5.1.1. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

Ví dụ 2.5.1.2. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$$

2.5.2. Đưa thêm tham số

Ví dụ 2.5.1.3. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$P = \frac{a}{b+\alpha c} + \frac{b}{c+\alpha a} + \frac{c}{a+\alpha b} \geq \frac{3}{1+\alpha}$$

2.5.3. Đổi bộ biến số

Từ các bất đẳng thức ở các ví dụ trên chúng ta thay đổi bộ biến số để thu được các bất đẳng thức mới sau đây:

Ví dụ 2.5.1.12. Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2a+b+3c} + \frac{b+c}{2b+c+3a} + \frac{c+a}{2c+a+3b} \geq 1$$

2.5.4. Ước lượng một biểu thức đối xứng

Thực chất khi thay thế một biểu thức trong bất đẳng thức bởi một biểu thức đối xứng khác sẽ nhận được một bất đẳng thức hệ quả (yếu hơn). Mặc dù vậy trong dạng phân thức thì bất đẳng thức mới khó hơn nhiều trong việc tìm cách chứng minh vì bậc của các số hạng thay đổi hay tính đối xứng thay đổi.

Trong phần này luận văn sẽ trình bày những bất đẳng thức dạng như vậy.

Ví dụ 2.5.1.16. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Lời giải. Ta có $1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$

Từ bất đẳng thức

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Suy ra

$$1 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$$

$$\leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$$

$$\leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(a + 2b^2) + b^2(b + 2c^2) + c^2(c + 2a^2)}$$

Ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{a + 2b^2}} a\sqrt{a + 2b^2} + \frac{b}{\sqrt{b + 2c^2}} b\sqrt{b + 2c^2} + \frac{c}{\sqrt{c + 2a^2}} c\sqrt{c + 2a^2} \right)^2$$

$$\leq P(a^2(a + 2b^2) + b^2(b + 2c^2) + c^2(c + 2a^2))$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(a + 2b^2) + b^2(b + 2c^2) + c^2(c + 2a^2)} \geq 1 \text{ (đpcm)}$$

2.6. Dạng hệ quả của bất đẳng thức Bunhi-acôpxki và áp dụng

2.6.1. Dạng hệ quả 1

Với $a_i \in R, b_i \in R^+ (i=\overline{1, n})$ ta có $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (2.1)$

Lời giải.

Ta có $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 = (\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{b_i}} \sqrt{b_i})^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \sum_{i=1}^n b_i$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i} \text{ (đpcm)}$$

2.6.2. Dạng hệ quả 2

Với $a_i, b_i \in R^+ (i=\overline{1, n})$ ta có

$$1. \sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i^2} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^3}{(\sum_{i=1}^n b_i)^2} \quad (2.3)$$

$$2. \sum_{i=1}^n \frac{a_i^4}{b_i^3} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^4}{(\sum_{i=1}^n b_i)^3} \quad (2.4)$$

2.6.3. Dạng hệ quả 3

Giả sử $a_i, b_i \in R^+ (i=\overline{1, n})$, chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{\sqrt{b_i}} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i}} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n b_i} \quad (2.8)$$

2.7. Đẳng thức - Bất đẳng thức xây dựng từ những bài toán trong tam giác

2.7.1. Một số kết quả cơ bản

Đặt $a = \tan \frac{A}{2}$ ta có $\sin A = \frac{2a}{1+a^2}, \cos A = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \sin \frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

+ Kết quả 1: $a, b, c > 0, ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$1 + a^2 = (a + b)(a + c)$$

$$1+b^2=(b+c)(b+a)$$

$$1+c^2=(c+a)(c+b)$$

+ Kết quả 2: $a, b \in R^+$, chứng minh rằng

$$\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \leq 1 \quad (1)$$

+ Kết quả 3: $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

+ Kết quả 4: $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$$

+ Kết quả 5: $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1, |a| < 1, |b| < 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} \geq \frac{1}{c}$$

+ Kết quả 6: $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} \geq 2c$$

2.7.2. Xây dựng bài toán mới và phương pháp giải

Từ bất đẳng thức: $2\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$ ta thu được

Ví dụ 2.7.2.1. $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{9}{4}$$

Ví dụ 2.7.2.2. $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2.7.2.3. $a, b, c > 0, ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leq \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

(Suy ra từ bất đẳng thức: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$)

Ví dụ 2.7.2.4. Cho $a, b > 0, 2a+b=a^2b$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{2a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

2.8. Một số phương pháp đặt ẩn phụ trong chứng minh bất đẳng thức

2.8.1. Bất đẳng thức với giả thiết $abc=1$

Cách đặt ẩn phụ thường dùng cho giả thiết này là $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ hoặc

$$a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z} \text{ hay } a=\frac{yz}{x^2}, b=\frac{zx}{y^2}, c=\frac{xy}{z^2}, \dots$$

Tùy thuộc vào đặc điểm của bất đẳng thức cần chứng minh mà ta chọn cách đặt ẩn phụ cho phù hợp, dễ nhìn để thuận tiện cho việc chứng minh bất đẳng thức mới. Ngoài những cách nêu(cách đặt trực tiếp) ở trên ta có thể đặt ẩn phụ theo các cách khác (cách gián tiếp), sau đó sử dụng giả thiết $abc = 1$ để tìm đẳng thức liên hệ giữa các ẩn mới và chứng minh bất đẳng thức mới.

2.8.2. Bất đẳng thức với giả thiết $ab + bc + ca + abc = 4$

Bổ đề. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng với a, b, c thỏa mãn điều kiện trên, luôn tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho

$$a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{x+z}, c = \frac{2z}{x+y} \quad (*)$$

2.8.3. Bất đẳng thức với giả thiết $ab + bc + ca = 1$

Bổ đề. Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Suy ra tồn tại

$$A, B, C \in (0; \pi) \text{ thỏa mãn } a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2} \text{ hoặc}$$

$$a = \cot A, b = \cot B, c = \cot C \text{ với } A, B, C \text{ thỏa mãn } A + B + C = \pi$$

2.8.4. Bất đẳng thức với giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

Bổ đề. Với $a, b, c \in [-1; 1]$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, từ đó suy ra tồn tại

$$A, B, C \in [0; \pi] \text{ thỏa mãn } a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C \text{ và } A + B + C = \pi$$

Chương 3 THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục đích và nhiệm vụ thực nghiệm

3.1.1. Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm sư phạm nhằm kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của đề tài “*Phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán ở bậc trung học phổ thông về bất đẳng thức và các bài toán cực trị*”

3.1.2. Nhiệm vụ thực nghiệm

- Thực hiện giảng dạy nhằm phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho các đối tượng học sinh khác nhau ở một số lớp học tại trường THPT Ngô Quyền – Hải Phòng.

- Đánh giá kết quả qua các bài kiểm tra ngắn sau mỗi giờ học hoặc qua một số chuyên đề nghiên cứu của các em(các em được giao nhiệm vụ về nhà nghiên cứu phát triển những nội dung đã được học).

3.1.3. Tổ chức thực nghiệm

Đối tượng là học sinh lớp 12A1 chọn và lớp 12A5 trường THPT Ngô Quyền. Lớp 12A1 có 40 em, lớp 12A5 có 45 em.

Thời gian thực nghiệm sư phạm: 8 tuần kể từ 15/9/2009 – 15/11/2009 khi các em đã học xong các chuyên đề cơ bản về Bất đẳng thức và các bài toán cực

trị. Trong thời gian này, các em được học chuyên đề về bất đẳng thức nâng cao, hai tuần một buổi (4 tiết).

Đặc điểm của lớp 12A1: Đây là lớp chọn đầu tiên của trường, các em được tạo điều kiện tối đa cho việc học và nghiên cứu, được nhiều thầy cô giáo tham gia giảng dạy theo các chuyên đề. Các em là các học sinh có tư chất.

Đặc điểm của lớp 12A5: Đây là lớp đại trà của trường, trình độ các em không đồng đều nhau, và các em cũng không được học nhiều các chuyên đề.

Việc chọn hai lớp có trình độ khác nhau để đảm bảo tính khách quan trong quá trình thực nghiệm, kiểm tra tính khả thi của đề tài.

Tại thời gian thực nghiệm, tác giả kiểm tra hai đợt, đợt thứ nhất là sau khi dạy ba tuần, đợt thứ hai là sau khi dạy 4 tuần. Mỗi đợt, đánh giá kết quả của hai lớp trong 45 phút làm bài với cùng một đề:

Bài kiểm tra đợt 1.

Bài 1. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh $8x^4 - 8x^2 + 4xy(x^2 - y^2) \leq \sqrt{2} - 1$

Bài 2. Cho các số dương $x, y, z < 1$: $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$: $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Bài kiểm tra đợt 2.

Bài 1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I, r).

Chứng minh rằng $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} + \frac{1}{IC} > \frac{1}{r}$

Bài 2. Cho $x, y, z > 0$: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Chứng minh $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$: $\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} = 1$

Chứng minh $abc > 1$.

Kết quả thực nghiệm sư phạm: Tính theo số học sinh làm được bài

Bài kiểm tra đợt 1.

Bài	1	2	3
Lớp			
12A1	38 95%	35 87,5%	31 77,5%
12A5	19 42,22%	21 46,67%	5 11,11%

Nhận xét qua việc chấm bài và quan sát các học sinh làm bài kiểm tra.

Bài 1.

Lớp 12A1: tất cả các học sinh đều tiến hành ngay việc đặt ẩn phụ đưa về lượng giác và dễ dàng chứng minh được.

Lớp 12A5: một số em không làm được vì xa vào biến đổi tương đương giữa các bất đẳng thức đại số.

Bài 2.

Lớp 12A1: 35 em làm được nhờ việc đặt x, y, z là tang của các góc đặc biệt và sử dụng bất đẳng thức trong tam giác

Lớp 12A5: 21 em phát hiện ra việc đặt ẩn phụ là tang của các góc đặc biệt và giải được. Còn lại cũng bế tắc vì biến đổi tương đương

Bài 3.

Đây là một bài thực sự khó nên ở lớp 12A5 chỉ có 5 em làm được nhờ biến đổi tương đương phức tạp. Tuy nhiên 31 em lớp 12A1 giải dễ dàng thông qua phép đổi biến $a = x/y, b = y/z, c = z/x$ ($x, y, z > 0$).

Bài kiểm tra đợt 2.

Bài	1	2	3
Lớp			
12A1	31 77,5%	35 87,5%	31 77,5%
12A5	4 8,89%	14 31,11%	18 40%

Đợt kiểm tra thứ hai này yêu cầu ở các em ở mức độ cao hơn, nếu các em không quen chuyển đổi phương diện thì rất khó giải toán hoặc mất nhiều thời gian giải.

Bài 1. Sau khi nhìn thấy sự khó khăn nếu chứng minh bằng bất đẳng thức hình học thì hầu hết các học sinh lớp 12A1 đều chuyển phương diện hình học sang phương diện lượng giác. $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > 1$. Các em đã biết chuyển đổi phương diện bằng cách xét một tam giác khác có các góc $A' = \frac{B+C}{2}; B' = \frac{C+A}{2}; C' = \frac{A+B}{2}$ và sử dụng tính chất

$$\cos A' + \cos B' + \cos C' = 1 + 4 \sin \frac{A'}{2} \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{C+A}{2} + \cos \frac{A+B}{2} > 1 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > 1.$$

Lớp 12A5: có một số em làm được bằng cách chứng minh trực tiếp bất đẳng thức lượng giác trên nhưng các em mất rất nhiều thời gian cho việc biến đổi lượng giác.

Bài 2.

Lớp 12A1: Đa số các em làm được ngay nhờ việc đặt $x = \cos A$, $y = \cos B$, $z = \cos C$ với A, B, C là ba góc một tam giác và chuyển bất đẳng thức cần

chứng minh về bất đẳng thức lượng giác quen thuộc $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Lớp 12A5: có 14 em làm được, trong đó nhiều em biến đổi đại số và dùng các bất đẳng thức cổ điển nên mất rất nhiều thời gian.

Bài 3.

Đây là bài tập có thể dễ dàng dùng bất đẳng thức Côsi nhưng các em lớp 12A5 phải mất nhiều công sức để phát hiện ra cách biến đổi:

$$1 - \frac{1}{1+2a} = \frac{2a}{1+2a} = \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geq \frac{2}{\sqrt{(1+2b)(1+2c)}}.$$

$$1 - \frac{1}{1+2b} = \frac{2b}{1+2b} = \frac{1}{1+2c} + \frac{1}{1+2a} \geq \frac{2}{\sqrt{(1+2c)(1+2a)}}$$

$$1 - \frac{1}{1+2c} = \frac{2c}{1+2c} = \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} \geq \frac{2}{\sqrt{(1+2a)(1+2b)}}$$

Nhân các vế tương ứng, ta có đpcm.

3.2. Một số kết quả nghiên cứu của học sinh

3.2.1. Tam giác đều

Tam giác đều có thể nói là tam giác đẹp nhất trong các tam giác. Ở nó ta có được sự đồng nhất giữa các tính chất của các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác, tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp tam giác, các dữ kiện đó lại cũng trùng hợp với điều kiện xảy ra dấu bằng ở các bất đẳng thức lượng giác đối xứng trong tam giác. Do đó sau khi giải được các bất đẳng thức lượng giác thì ta cần phải nghĩ đến việc vận dụng nó trở thành một phương pháp khi nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 3.2.1.1.

CMR $\triangle ABC$ đều khi thỏa mãn: $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$

Lời giải:

Theo BCS ta có :

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\text{mà : } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4} R^2$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2} R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow$ đpcm.

3.2.2. Tam giác cân:

Sau tam giác đều thì tam giác cân cũng đẹp không kém. Và ở đây thì chúng ta sẽ xét những bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi hai biến bằng nhau và khác biến thứ ba. Ví dụ $A = B = \frac{\pi}{6}; C = \frac{2\pi}{3}$. Vì thế nó khó hơn trường hợp xác định tam giác đều.

Ví dụ 3.2.2.1.

CMR $\triangle ABC$ cân khi nó thỏa điều kiện $\tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2}$ và nhọn.

Lời giải :

$$\text{Ta có : } \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C}$$

$$\text{vì } \cos(A-B) \leq 1 \Rightarrow \cos(A-B) - \cos C \leq 1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C} \geq \frac{2 \sin C}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2} = 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B \geq 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\text{Từ giả thiết : } \tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2} \leq 2 \left(\frac{\tan A + \tan B}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan^2 A + \tan^2 B) \leq \tan^2 A + \tan^2 B + 2 \tan A \tan B$$

$$\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \tan A = \tan B$$

$$\Leftrightarrow A = B$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.2.3. Tam giác vuông:

Ví dụ 3.2.3.1.

CMR $\triangle ABC$ vuông khi thỏa $3 \cos B + 6 \sin C + 4 \sin B + 8 \cos C = 15$

Lời giải :

Theo BCS ta có :

$$\begin{cases} 3 \cos B + 4 \sin B \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 B + \sin^2 B)} = 5 \\ 6 \sin C + 8 \cos C \leq \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 \cos B + 4 \sin B + 6 \sin C + 8 \cos C \leq 15$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 3 \cos B + 4 \sin B = 5 \\ 6 \sin C + 8 \cos C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos B}{3} = \frac{\sin B}{4} \\ \frac{\sin C}{6} = \frac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan B = \frac{4}{3} \\ \cot C = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.2.4. Sử dụng các bước đầu cơ sở

Ví dụ 3.2.4.1.

Cho $\triangle ABC$. Đường phân giác trong các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . CMR :

$$S_{ABC} \leq S_{A_1B_1C_1}$$

Lời giải :

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ thì nó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_1B_1C_1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C \leq 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 \quad (1)$$

Do $A_1 = \frac{B+C}{2}$; $B_1 = \frac{C+A}{2}$; $C_1 = \frac{A+B}{2}$ nên :

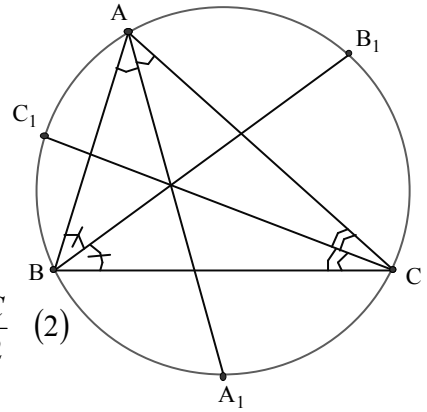
$$(1) \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \leq \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (2)$$

Vì $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} > 0$ nên :

$$(2) \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.



3.2.5. Đưa về vector và tích vô hướng:

Ví dụ 3.2.5.1.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Lấy các vector đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA .

Hiển nhiên ta có :

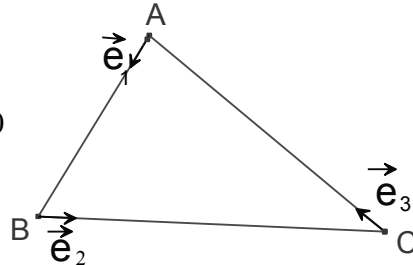
$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2 \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2 \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2 \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.



3.2.6. Kết hợp các bất đẳng thức cổ điển :

Ví dụ 3.2.6.1.

CMR $\forall \Delta ABC$ ta có :

$$\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Theo **AM - GM** ta có :

$$\frac{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} &= \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} &\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \\ &\geq \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &= \frac{9}{2} \sqrt[3]{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \quad (1) \end{aligned}$$

mà ta cũng có : $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \geq \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

3.2.7. Tận dụng tính đơn điệu của hàm số:**Ví dụ 3.2.7.1.**

$$CMR : \quad \sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \text{với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải :

$$\text{Xét} \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} \quad \text{với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\text{Xét} \quad g(x) = x \cos x - \sin x \quad \text{với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng đó.}$$

$$\Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

3.3. Một số nhận xét sau thực nghiệm

Sau khi dạy học theo cách phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho lớp chọn toán và lớp đại trà, tác giả rút ra một số nhận xét sau:

1. *Ưu điểm:* Nâng cao việc tự học của học sinh, tính tự giác và khả năng nghiên cứu khoa học độc lập, phát triển tư duy sáng tạo. Đồng thời cũng tạo phong trào nghiên cứu khoa học trong toàn trường, mặc dù bước đầu cũng chỉ là những kết quả đơn giản, nhưng đó là thành quả nghiên cứu của chính các em, và các em thấy tự hào về điều đó. Qua đó giúp các em dần tiếp cận với trình độ đào tạo theo chuẩn quốc tế mà các nước như Singapor, Australia, Thái Lan,... đang áp dụng.

2. *Nhược điểm:* Việc phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học khó dạy cho học sinh kém, học sinh các lớp đại trà, nhưng tác giả nghĩ rằng cũng có thể khắc phục được nhược điểm này bằng cách làm dễ các bài tập, các đề tài nghiên cứu cho phù hợp.

3. *Giải pháp:* Ngoài việc đưa bài tập dạng chuyên đề, chuyên đề cho học sinh khá giỏi, việc phát triển phong trào học tập nói chung và môn toán nói riêng ở trường phổ thông, cần phải tổ chức các hoạt động ngoại khoá về toán, trong đó ngoài việc vận dụng kiến thức cơ bản của sách giáo khoa, còn phải đưa các ứng dụng thực tế, thiết thực nhất của bộ môn cho học sinh thấy việc cần thiết của môn học. Phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán ở bậc trung học phổ thông về bất đẳng thức và các bài toán cực trị là một nội dung quan trọng nhằm mục đích đó.

Hoạt động này có thể ở nhiều dạng như:

a. *Dạy học chuyên đề:* Theo các chuyên đề từ dễ đến khó về bất đẳng thức và cực trị.

b. *Tìm hiểu lịch sử bộ môn :* Liên quan đến kiến thức đang học, nói chuyện về các bất đẳng thức đẹp và hay nhân dịp các ngày lễ, câu lạc bộ toán học, hội thảo toán...

Hiện nay sách giáo khoa cũng có những bài đọc thêm về các nhà toán học, về những ứng dụng của toán học. Đây cũng là một hướng tốt để các em hứng thú học bộ môn, noi gương các nhà toán học, hay cũng học tập được phần nào về cách học, cách sáng tạo, cách phát triển tư duy,...

c. Tổ chức các cuộc thi về toán: Hiện nay có nhiều cuộc thi giải toán cho các khối lớp trong nhà trường, trong tỉnh/thành phố, khu vực, toàn quốc hay trên tạp chí " Toán học và Tuổi trẻ" ra hàng tháng mà trong đó bất đẳng thức và cực trị luôn là những phần quan trọng. Từ đó giúp học sinh có thể trao đổi những vấn đề còn vướng mắc với các bạn, thầy cô trên mọi miền của đất nước.

d. Tập duyệt nghiên cứu toán học: Một hình thức nghiên cứu toán học điển hình ở các trường phổ thông là làm tập san, làm chuyên đề về bộ môn toán. Trong nhà trường nên thành lập một tiểu ban bộ môn toán do các thầy cô và học sinh giỏi yêu thích môn toán cho tờ báo chuyên san về toán của trường, để chào mừng các ngày lễ lớn trong năm về một số vấn đề như: Giải bài tập chuyên đề, kinh nghiệm học toán, phương pháp mới cho một dạng toán, cách chứng minh mới cho một định lý trong sách giáo khoa, phát hiện các vấn đề mới từ lý thuyết đã học, tìm các bài toán mới từ các bài toán đã biết, tìm nhiều lời giải cho một bài toán, phát hiện sai lầm trong giải toán, giới thiệu chùm bài toán theo một chuyên đề nào đó, giới thiệu các bài toán hay, khó...

Qua phần thực nghiệm, mới chỉ là bước đầu thực nghiệm, mong rằng qua thực tế lần này, cùng với sự dìu dắt của thầy hướng dẫn và góp ý của các thầy phản biện, của hội đồng giám khảo, tác giả sẽ tiếp thu, rút kinh nghiệm để làm thực nghiệm tốt hơn.

KẾT LUẬN CỦA LUẬN VĂN

Từ quá trình nghiên cứu lý luận và thực tiễn về việc phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán ở bậc trung học phổ thông về bất đẳng thức và các bài toán cực trị, có thể rút ra một số kết luận sau:

1. Việc phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh trong nhà trường phổ thông có vị trí rất quan trọng và là một mục tiêu của nền giáo dục phổ thông, đặc biệt trong giai đoạn đổi mới phương pháp dạy học tiếp cận với chuẩn quốc tế và hội nhập như hiện nay.

2. Luận văn đã trình bày những khái niệm và tính chất cơ bản của kỹ năng nghiên cứu khoa học.

3. Luận văn đã nêu một số biện pháp bồi dưỡng và phát triển kỹ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh năng khiếu toán bậc trung học phổ thông.

4. Luận văn đã xây dựng hệ thống các kết quả nghiên cứu cơ bản về bất đẳng thức và cực trị dưới dạng các bài báo nhỏ, thể hiện được một số thành phần cơ bản về kỹ năng nghiên cứu khoa học, mặc dù còn chưa đầy đủ do khuôn khổ của luận văn. Những khó khăn và sai lầm bước đầu của học sinh khi nghiên cứu khoa học.

5. Luận văn trước hết rất có ý nghĩa đối với tác giả, vì nó là một nội dung quan trọng trong chương trình dạy. Mong rằng luận văn cũng đóng góp một phần nhỏ bé trong công cuộc phát triển kỹ năng nghiên cứu cho học sinh nhằm nâng cao chất lượng giáo dục, đồng thời có thể là một tài liệu tham khảo cho các đồng nghiệp.

6. Kết quả thực nghiệm sư phạm phần nào kiểm nghiệm được tính khả thi và hiệu quả của đề tài.