

Mô c l ô c

LỜI NÓI ĐẦU.....	6
CHƯƠNG I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT SAI SỐ.....	7
1.1. Khái niệm về phép đo	7
1.2. Nhiệm vụ của lý thuyết sai số.....	8
1.3. Sai số đo đạc	9
1.4. Các tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác của kết quả đo	11
1.4.1. Sai số tuyệt đối	11
1.4.2. Sai số tương đối.....	18
1.5. Sai số trung phương của hàm các trị đo.....	20
1.6. Sai số làm tròn	24
1.7. Sai số hệ thống và các phương pháp làm giảm ảnh hưởng của chúng	26
1.7.1. Ảnh hưởng của sai số hệ thống tới độ chính xác của một trị đo	27
1.7.2. Ảnh hưởng của sai số hệ thống tới độ chính xác của trị trung bình số học	27
1.7.3. Ảnh hưởng của sai số hệ thống tới độ chính xác của tổng các trị đo có cùng độ chính xác.....	28
1.7.4. Các biện pháp làm giảm ảnh hưởng của sai số hệ thống.....	29
Bài tập chương I.....	33
CHƯƠNG II. XỬ LÝ CÁC KẾT QUẢ ĐO MỘT ĐẠI LƯỢNG	34
2.1. Xử lý các kết quả đo một đại lượng có cùng độ chính xác	34
2.2. Trọng số và trị trung bình trọng số.....	37
2.2.1. Khái niệm về trọng số và trị trung bình trọng số	37
2.2.2. Trọng số của hàm các trị đo	39
2.2.3. Vấn đề tính trọng số và sai số trung phương của trọng số đơn vị	41
2.3. Xử lý các kết quả đo một đại lượng không cùng độ chính xác	43
2.4. Đánh giá độ chính xác của dãy các trị đo kép.....	46
2.4.1. Sai số hệ thống không đáng kể	47
2.4.2. Sai số hệ thống cần phải tính đến.....	47
Bài tập chương II	50

CHƯƠNG III. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN BÌNH SAI VÀ NGUYÊN TẮC SỐ BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT.....	51
3.1. Khái niệm về bài toán bình sai	51
3.2. Nguyên tắc số bình phương nhỏ nhất	53
Bài tập chương III.....	55
CHƯƠNG IV. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI THAM SỐ.....	57
4.1. Bài toán bình sai tham số.....	57
4.2. Các bước giải bài toán bình sai tham số	59
4.3. Dạng ma trận của bài toán bình sai tham số	64
4.4. Đánh giá độ chính xác theo kết quả bình sai tham số	66
4.5. Một số dạng phương trình số hiệu chỉnh trong lưới trắc địa	71
4.5.1. Các phương trình số hiệu chỉnh trong lưới thủy chuẩn	72
4.5.2. Các phương trình số hiệu chỉnh trong lưới trắc địa mặt bằng.....	73
Bài tập chương IV	83
CHƯƠNG V. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN	85
5.1. Bài toán bình sai điều kiện.....	85
5.2. Các bước giải bài toán bình sai điều kiện	88
5.3. Dạng ma trận của bài toán bình sai điều kiện	92
5.4. Đánh giá độ chính xác theo kết quả bình sai điều kiện	94
5.5. Một số dạng phương trình điều kiện trong lưới trắc địa	97
5.5.1. Các phương trình điều kiện trong lưới thủy chuẩn.....	97
5.5.2. Các phương trình điều kiện chủ yếu trong lưới tam giác đo góc	98
5.5.4. Các phương trình điều kiện trong lưới đường chuyền.....	106
5.6. So sánh các phương pháp bình sai điều kiện và bình sai tham số	110
Bài tập chương V	111
CHƯƠNG VI. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI KẾT HỢP VÀ BÀI TOÁN TÍNH CHUYỂN ĐỔI TỌA ĐỘ	113
6.1. Phương pháp bình sai kết hợp.....	113
6.1.1. Cơ sở toán học của phương pháp bình sai kết hợp	113
6.1.2. Một số dạng của phương pháp bình sai kết hợp.....	115
6.2. Bài toán chuyển đổi tọa độ	118
6.3. Tính toán tham số chuyển đổi Helmert giữa hai hệ tọa độ vuông góc phẳng	119
6.3.1. Mô hình chuyển đổi với điểm xoay ở tâm tọa độ (mô hình 1)	120

6.3.2. Mô hình chuyển đổi với điểm xoay nằm ngoài tâm tọa độ (mô hình 2).....	122
6.4. Tính toán tham số chuyển đổi Helmert giữa hai hệ tọa độ vuông góc không gian gần nhau	127
6.4.1. Mô hình chuyển đổi với điểm xoay ở tâm tọa độ (mô hình 1)	127
6.4.2. Mô hình chuyển đổi với điểm xoay nằm ngoài tâm tọa độ (mô hình 2).....	130
Bài tập chương VI	140
ĐÁP SỐ VÀ LỜI GIẢI CỦA CÁC BÀI TẬP	142
PHỤ LỤC	155
A. Một số khái niệm của Lý thuyết xác suất và Thống kê toán học	155
B. Bảng hàm Laplace.....	168
C. Ma trận và hệ phương trình tuyến tính	169
D. Tuyến tính hóa bằng chuỗi Taylor	183
E. Tìm cực trị có điều kiện bằng hàm Lagrange	185
TÀI LIỆU THAM KHẢO	186

Lêi nãi ㉔

Lý thuyết sai số và Phương pháp số bình phương nhỏ nhất là môn học cơ bản trong chương trình đào tạo Cử nhân khoa học ngành Địa chính ở trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Đây là một môn học khó, song đóng vai trò then chốt trong khối các môn học về công nghệ địa chính. Có thể nói tất cả các lĩnh vực đo đạc trắc địa - bản đồ như đo vẽ địa chính, đo vẽ địa hình, trắc địa cao cấp, trắc địa ảnh, xử lý ảnh số, hệ thống định vị toàn cầu GPS,... đều có liên quan đến nội dung của Lý thuyết sai số và Phương pháp số bình phương nhỏ nhất.

Do thời lượng của môn học có hạn nên giáo trình được biên soạn với tiêu chí là giới hạn trong những kiến thức cơ bản nhất, song các kiến thức này được trình bày chi tiết và chặt chẽ nhằm giúp học viên nắm vững các vấn đề được đưa ra. Nội dung của giáo trình không đề cập đến một số vấn đề nâng cao như phát hiện sai số hệ thống và sai số thô trong lưới trắc địa, bình sai lưới trắc địa không gian và lưới trắc địa mặt đất - vệ tinh, bình sai lưới tự do, các thuật toán nâng cao sử dụng trong bình sai,... Người đọc quan tâm đến những vấn đề này có thể tham khảo thêm những tài liệu được liệt kê trong danh mục ở cuối giáo trình.

Lý thuyết sai số và Phương pháp số bình phương nhỏ nhất là môn học dựa trên nền tảng của Lý thuyết xác suất, Thống kê toán học và Đại số tuyến tính. Do đó, phương pháp học môn này cũng tương tự như đối với Toán học cao cấp: học viên không phải học thuộc các công thức trong giáo trình mà cần nắm được ý tưởng và phương pháp lập luận để đưa ra các công thức đó, khi cần có thể tự mình suy luận ra chúng hoặc tra cứu tài liệu. Để giúp người đọc nắm vững kiến thức lý thuyết, trong giáo trình có một số lượng lớn các ví dụ và bài tập tính toán. Sau khi học xong mỗi chương lý thuyết, học viên nên tự mình giải các bài tập của chương đó rồi so sánh với đáp số và lời giải được trình bày tóm tắt ở phần cuối của giáo trình. Ngoài ra, để có thể nhanh chóng tiếp thu các kiến thức lý thuyết, cần ôn lại những kiến thức nền của Toán học cao cấp được trình bày trong phần phụ lục.

Trong quá trình biên soạn giáo trình, tác giả đã nhận được nhiều đóng góp quý báu của các đồng nghiệp trong khoa Địa lý cũng như của các chuyên gia ở Bộ Tài nguyên và Môi trường. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc nhất tới các nhà giáo, các nhà khoa học đã giúp đỡ hoàn thành giáo trình này.

Đây là giáo trình được biên soạn lần đầu nên không thể tránh khỏi những sai sót và khiếm khuyết. Tác giả rất mong nhận được những đóng góp, phê bình của học viên và các nhà khoa học.

Hà Nội, tháng 10 năm 2005

T, c gi¶

Chương I

Cơ sở lý thuyết sai số

Lý thuyết sai số là khoa học nghiên cứu về nguyên nhân xuất hiện, luật phân phối và tính chất của các sai số trong đo đạc, trên cơ sở đó đề xuất các phương pháp đo và xử lý kết quả đo nhằm đảm bảo độ chính xác cần thiết.

1.1. Khái niệm về phép đo

Phép đo là đem so sánh đại lượng cần đo với đại lượng cùng loại được chọn làm đơn vị. Trong đo đạc địa chính, các đại lượng đo thường là khoảng cách, góc, độ cao (hay chênh cao) và tọa độ (hay số gia tọa độ). Để tăng độ chính xác, một đại lượng thường được đo nhiều lần.

Người ta phân biệt các phép đo có cùng độ chính xác và các phép đo không cùng độ chính xác:

- Các phép đo có cùng độ chính xác được thực hiện bằng một dụng cụ (hay các dụng cụ có cùng độ chính xác), theo cùng một phương pháp trong những điều kiện giống nhau. Ví dụ: đo góc ngang hay góc đứng bằng các máy kinh vĩ có cùng độ chính xác theo cùng một phương pháp và số lượng vòng đo, đo một khoảng cách nhiều lần bằng một thước dây theo cùng một phương pháp,...

- Nếu các điều kiện trên không được thực hiện thì các phép đo được coi là không cùng độ chính xác. Ví dụ: đo góc theo cùng một phương pháp và số lượng vòng đo nhưng với các máy kinh vĩ khác nhau về độ chính xác, đo một khoảng cách lớn bằng các thước dây có chiều dài khác nhau,...

Trong thực tế, có rất nhiều yếu tố ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả đo và chúng khó xác định nên người ta thường đưa ra kết luận các phép đo có cùng độ chính xác hay không dựa theo kinh nghiệm và các chỉ tiêu đánh giá độ chính xác (được nghiên cứu ở mục 1.4).

Để giải các bài toán trong đo đạc địa chính, ta thường phải đo nhiều đại lượng. Chẳng hạn, từ 2 điểm A và B đã biết trước, để xác định vị trí của điểm C trên mặt phẳng cần đo ít nhất 2 đại lượng. Số đại lượng tối thiểu phải đo để giải bài toán đặt ra được gọi là số đại lượng cần đo. Như vậy 2 là số đại lượng cần đo để xác định vị trí của 1 điểm trên mặt phẳng.

Trong đo đạc địa chính, để tăng độ chính xác, người ta thường đo nhiều đại lượng hơn số cần thiết. Hiệu giữa số đại lượng thực tế đo và số đại lượng cần đo được gọi là *số đại lượng đo dư* (hay còn gọi là số đại lượng đo thừa [2]). Như vậy, giữa số đại lượng cần đo k , thực tế đo n và đo dư r có mối quan hệ sau:

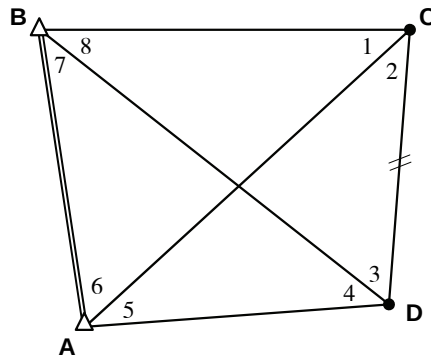
$$r = n - k. \quad (1.1)$$

Ví dụ 1.1.

a. Để xác định khoảng cách AB người ta đo bằng thước dây 3 lần. Như vậy, số đại lượng cần đo bằng 1, số đại lượng đo dư bằng 2.

b. Một tứ giác trắc địa có sơ đồ trên hình 1.1. Để xác định tọa độ phẳng của các điểm C và D khi đã biết tọa độ của A và B, người ta đo 8 góc được đánh số trên sơ đồ và khoảng cách CD.

Bởi vì để xác định tọa độ (x, y) của 1 điểm trên mặt phẳng cần đo 2 đại lượng nên số đại lượng cần đo $k = 2 \times 2 = 4$, số đại lượng thực tế đo $n = 8 + 1 = 9$, số đại lượng đo dư $r = n - k = 9 - 4 = 5$.



Hình 1.1. Sơ đồ tứ giác trắc địa (ví dụ 1.1)

1.2. Nhiệm vụ của lý thuyết sai số

Một phép đo cho dù có được thực hiện cẩn thận bao nhiêu thì cũng vẫn có sai số. Việc hoàn thiện phương pháp đo đạc và các dụng cụ đo, cũng như việc nâng cao trình độ của người đo chỉ có thể làm tăng độ chính xác của các kết quả đo chứ không thể triệt tiêu hoàn toàn được các sai số. Bởi vậy, trong thực tế người ta thường thực hiện đo đạc với một độ chính xác cho trước. Việc đặt ra độ chính xác cho trước đó cũng như việc đánh giá độ chính xác của các kết quả đo là nhiệm vụ chủ yếu của lý thuyết sai số.

Lý thuyết sai số nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Nghiên cứu nguyên nhân xuất hiện và luật phân phối của sai số đo đạc và sai số tính toán, trên cơ sở đó đề xuất các phương pháp làm giảm ảnh hưởng của chúng.

2. Xác định giá trị tin cậy nhất của các đại lượng đo.
3. Đánh giá độ chính xác của các kết quả đo và hàm của chúng.
4. Xác định các giới hạn để loại bỏ những trị đo không đạt yêu cầu nhằm đảm bảo độ chính xác cần thiết.

1.3. Sai số thực

Như chúng ta đã biết, bất kỳ phép đo nào cũng có sai số, tức là sự khác biệt giữa giá trị đo được và giá trị thực. Nguyên nhân phát sinh ra sai số là do trong quá trình đo đạc, ngoài đối tượng đo còn có sự tham gia của người đo, dụng cụ đo và môi trường xung quanh. Toàn bộ các điều kiện trên luôn luôn thay đổi theo thời gian và chúng ta không thể đánh giá chính xác và triệt tiêu ảnh hưởng của chúng được. Bởi vậy, kết quả đo bao giờ cũng khác giá trị thực và mỗi lần một khác. Nếu gọi tập hợp các yếu tố ảnh hưởng đến kết quả đo: đối tượng đo, người đo, phương pháp đo, dụng cụ đo và môi trường xung quanh là *điều kiện đo* thì có thể cho rằng sự dao động của các kết quả đo thể hiện những thay đổi của điều kiện đo.

Để nghiên cứu tính chất của sai số thì tốt nhất là biết được giá trị thực của các đại lượng đo. Trong thực tế, có thể coi giá trị thực là giá trị của các đại lượng đo đã được biết với độ chính xác cao, có sai số nhỏ hơn nhiều so với sai số của các phép đo mà chúng ta thực hiện. Ngoài ra, có một số hàm của các đại lượng đo có giá trị thực đã biết trước, ví dụ như tổng các góc trong một tam giác bằng 180° , tổng chênh cao trong một tuyến thủy chuẩn khép kín bằng 0, hiệu giữa 2 kết quả đo một đại lượng bằng 0,...

Khi đo một đại lượng có giá trị thực bằng X thì *sai số thực* θ của kết quả đo (hay trị đo) x được xác định bởi công thức sau:

$$\theta = x - X. \quad (1.2)$$

Nếu chúng ta biết một số lượng lớn các sai số thực thì có thể nghiên cứu quy luật xuất hiện của chúng. Tuy nhiên, trong đa số các trường hợp, giá trị thực X (và suy ra là các sai số thực θ), không biết được. Bởi vậy, để nghiên cứu tính chất của sai số, người ta thường sử dụng các phương pháp nghiên cứu gián tiếp như nghiên cứu luật phân phối xác suất của trị đo hay của hàm các trị đo.

Khi ta đo một đại lượng nào đó thì kết quả đo chịu ảnh hưởng của vô số các yếu tố khác nhau. Ví dụ như khi đo góc ngang bằng máy kinh vĩ có thể có các nguồn sai số sau: sai số hiệu chỉnh máy, sai số định tâm máy, sai số của bàn độ ngang, sai số của bộ phận đọc kết quả, sai số của người đo khi ngắm mục tiêu và khi đọc kết quả, sai số do khúc xạ của tia ngắm, sự không ổn định của điểm ngắm và của máy kinh vĩ, ảnh hưởng của nhiệt độ không khí,... Về phần mình, sai số hiệu chỉnh máy lại bao gồm các sai số do trục ngắm không vuông góc với trục quay của ống kính,

trục quay của máy không vuông góc với trục của ống thủy dài,... Nếu phép đo được thực hiện cẩn thận thì mỗi yếu tố trên có ảnh hưởng rất nhỏ so với tổng ảnh hưởng của chúng tới kết quả đo. Khi đó, theo định lý giới hạn trung tâm của lý thuyết xác suất thì *kết quả đo có phân phối chuẩn* (xem phụ lục A.3).

Theo nguồn gốc phát sinh và quy luật xuất hiện, các sai số đo được phân loại thành sai số thô, sai số hệ thống và sai số ngẫu nhiên.

- **Sai số thô** (hay còn gọi là sai lầm hay sai số lớn) phát sinh do lỗi lầm hay sự thiếu trách nhiệm của người đo hoặc do hỏng hóc của máy đo. Ví dụ như khi đo khoảng cách bằng nhiều đoạn ngắn người đo đếm nhầm số đoạn, hoặc khi đo góc quên không khóa vành độ ngang,... Sai số thô cần được phát hiện và loại bỏ ra khỏi các kết quả đo. Phương pháp đơn giản nhất để phát hiện sai số thô là đo lặp nhiều lần một đại lượng rồi phân tích thống kê dãy các kết quả thu được. Phương pháp này tuy đơn giản nhưng tốn nhiều công sức, nhất là khi xây dựng các lưới trắc địa có nhiều đại lượng đo. Do đó, việc đề xuất các phương pháp phát hiện sai số thô là một trong những vấn đề cấp thiết của Lý thuyết sai sốⁱ.

- **Sai số hệ thống** là sai số phát sinh theo một quy luật nhất định từ một nguồn nào đó. Nếu xét sai số hệ thống như một đại lượng ngẫu nhiên thì kỳ vọng của nó thường khác 0. Ví dụ như nếu sử dụng thước dây có chiều dài thực lớn hơn danh nghĩa của nó (20,01m thay vì 20,00m) thì kết quả đo bao giờ cũng nhỏ hơn khoảng cách thực. Trong nhiều trường hợp, sai số hệ thống là một số không đổi cả về giá trị và dấuⁱⁱ. Các phương pháp giảm thiểu sai số hệ thống sẽ được nghiên cứu ở mục 1.7.

- **Sai số ngẫu nhiên** là sai số không phát sinh theo một quy luật nhất định. Nếu xét sai số ngẫu nhiên như một đại lượng ngẫu nhiên thì nó có kỳ vọng bằng 0 hoặc gần bằng 0. Ví dụ: sai số do định tâm máy, ngắm không chính xác vào mục tiêu, ước lượng phần lẻ khi đọc kết quả trên vành độ khi đo gócⁱⁱⁱ hoặc sai số do lực căng không đều khi đo khoảng cách bằng thước dây,... Các sai số làm tròn trong đo đạc và tính toán cũng là sai số ngẫu nhiên. Thông thường, sai số ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn, trừ một số trường hợp ngoại lệ như sai số làm tròn tuân theo luật phân phối đều. Chú ý rằng khi điều kiện đo thay đổi thì một số nguồn phát sinh sai số hệ thống sẽ trở thành nguồn phát sinh sai số ngẫu nhiên và ngược lại.

Một số tính chất của sai số ngẫu nhiên:

ⁱ Người đọc có thể tham khảo thêm về vấn đề này trong [12].

ⁱⁱ Trong một số tài liệu, sai số hệ thống được coi là có dấu không đổi. Khẳng định này không hoàn toàn chính xác vì có một số ít trường hợp như khi vành độ của máy kinh vĩ chia không đều thì sai số hệ thống đo góc sẽ có dấu thay đổi tùy theo góc được đo nằm trên phần nào của vành độ.

ⁱⁱⁱ Ví dụ như nếu vành độ chia đến phút nhưng người đo ước lượng và đọc kết quả đến giây thì trong kết quả thu được có sai số ngẫu nhiên do phần giây được ước lượng không hoàn toàn chính xác.