

Rèn luyện kỹ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức cho học sinh khá, giỏi cuối cấp trung học phổ thông : \b Luận văn ThS. Giáo dục học: \ Nguyễn Thị Thanh Thủy ; Nghd. : PGS.TS. Bùi Văn Nghị

1. Lí do chọn đề tài

Theo Luật giáo dục Việt Nam năm 2005, mục tiêu giáo dục phổ thông của chúng ta là “*Giúp học sinh phát triển toàn diện về đạo đức, trí tuệ, thể chất, thẩm mỹ và các kỹ năng cơ bản, phát triển năng lực cá nhân, tính năng động và sáng tạo, hình thành nhân cách con người Việt Nam Xã hội chủ nghĩa, xây dựng tư cách và trách nhiệm cộng đồng, chuẩn bị cho học sinh tiếp tục học lên hoặc đi vào cuộc sống lao động, tham gia xây dựng và bảo vệ Tổ quốc*”. Về phương pháp giáo dục, cần phải “*Phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, tư duy sáng tạo của người học; bồi dưỡng năng lực tự học, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên*”, “*bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh*”. Môn Toán là môn học công cụ, giữ một vai trò hết sức quan trọng trong chương trình THPT. Trong đó các bài toán về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là những bài toán yêu cầu cao ở học sinh về tư duy, về kỹ năng. Song, đối với học sinh thì dạng toán này là một trong những dạng toán khó, cần phải chú ý và có những biện pháp để rèn luyện kỹ năng giải dạng toán này, góp phần nâng cao chất lượng dạy học chủ đề này.

Từ những lí do trên, đề tài được chọn là: ***“Rèn luyện kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức cho học sinh khá, giỏi cuối cấp THPT”***.

2. Lịch sử nghiên cứu

Hiện nay đã có một số công trình nghiên cứu gần gũi với đề tài này, nhưng chủ yếu nghiên cứu về rèn luyện kĩ năng cho HS trong giải toán Hình học. Một số trong những đề tài đó là: “Rèn luyện kĩ năng giải bài toán Hình học không gian bằng phương pháp tọa độ ở trường THPT” - Luận văn thạc sĩ của Thái Thị Anh Thư, ĐHSP HN, năm 2004; “Rèn luyện kĩ năng giải các bài toán thiết diện của các hình không gian trong chương trình Hình học PT” - luận văn thạc sĩ của Nguyễn Tiến Trung, ĐHSP HN, năm 2006, “Rèn luyện kĩ năng giải toán về Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, Quan hệ song song cho học sinh lớp 11 Trung học phổ thông”, luận văn thạc sĩ của Nguyễn Thị Định, K3, ĐHGD - ĐHQG HN, năm 2010 v.v....

Đề tài này khác những đề tài nói trên về chủ đề cần rèn luyện và đối tượng học sinh. Đó là chủ đề tìm GTLN, GTNN và đối tượng là HS khá, giỏi cuối cấp THPT.

Sở dĩ chúng tôi chọn đối tượng là HS khá, giỏi cuối cấp THPT, bởi vì, có ở cuối cấp thì các em mới biết được nhiều phương pháp giải dạng toán này. Hơn nữa, như chúng tôi đã trình bày ở trên, đây là dạng toán khó, nên với HS khá, giỏi là phù hợp hơn.

3. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

+ Mục đích nghiên cứu: Đề xuất một giải pháp nhằm rèn luyện có hiệu quả kĩ năng tìm GTLN, GTNN cho HS.

+ Nhiệm vụ nghiên cứu:

- Nghiên cứu hệ thống lí luận về kĩ năng giải toán, giải bài tập toán học.
- Nghiên cứu các dạng toán và các phương pháp tìm GTLN, GTNN.
- Nghiên cứu và đề xuất một giải pháp rèn luyện có hiệu quả kĩ năng tìm GTLN, GTNN cho HS khá, giỏi cuối cấp THPT.
- Thực nghiệm sư phạm nhằm kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

4. Đối tượng nghiên cứu và khách thể nghiên cứu

- Đối tượng nghiên cứu: là quá trình dạy học tìm GTLN, GTNN ở trường THPT.
- Phạm vi nghiên cứu: là các bài toán tìm GTLN, GTNN ở trường THPT.
- Khách thể nghiên cứu: là HS khá, giỏi cuối cấp THPT.

5. Mẫu khảo sát

Một số lớp 12, trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

6. Vấn đề nghiên cứu

- Các kĩ năng tìm GTLN, GTNN của một biểu thức?
- Giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm GTLN, GTNN của một biểu thức cho học sinh khá, giỏi cuối cấp THPT?

7. Giả thuyết khoa học

Giải pháp quan trọng cho việc nâng cao kĩ năng giải toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức cho học sinh khá, giỏi cuối cấp Trung học phổ thông là việc hệ thống hóa được các dạng toán, các kĩ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức và có biện pháp thích hợp rèn luyện cho học sinh.

8. Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp nghiên cứu lí luận
- Phương pháp điều tra quan sát
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm

9. Cấu trúc luận văn

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, nội dung luận văn được trình bày trong 3 chương:

Chương 1. Kỹ năng giải toán

Chương 2. Giải pháp rèn luyện kỹ năng tìm GTLN, GTNN của một biểu thức cho học sinh khá, giỏi cuối cấp THPT

Chương 3. Thực nghiệm sư phạm

CHƯƠNG 1

KĨ NĂNG GIẢI TOÁN

1.1. Quan niệm về kĩ năng, kĩ năng giải toán

1.1.1. Quan niệm về kĩ năng, kĩ năng giải toán

Tùy theo các phương diện nhìn nhận khác nhau về kĩ năng: xét về tâm lí, hành vi, hay xét theo năng lực vận dụng, hành động, hay xét theo phương diện giáo dục, mà có những cách định nghĩa khác nhau về kĩ năng. Trong luận văn này, chúng tôi quan niệm: Kĩ năng là khả năng vận dụng tri thức (khái niệm, định lí, thuật giải, phương pháp) để giải quyết nhiệm vụ đặt ra. Như vậy, tri thức (bao gồm cả tri thức sự vật, tri thức phương pháp) là cơ sở của kĩ năng. Trong Toán học, kĩ năng là khả năng giải các bài toán, thực hiện các chứng minh cũng như phân tích có phê phán các lời giải và chứng minh nhận được. Kĩ năng giải bài tập toán của HS là khả năng sử dụng có mục đích, sáng tạo những kiến thức toán học đã học để giải bài tập toán học.

1.1.2. Điều kiện để có kĩ năng

Muốn có kĩ năng về hành động nào đó chủ thể cần phải: Có kiến thức để hiểu được mục đích của hành động, biết được điều kiện, cách thức để đi đến kết quả, để thực hiện hành động; Tiến hành hành động đó với yêu cầu của nó; Đạt được kết quả phù hợp với mục đích đã đề ra; Có thể hành động có hiệu quả trong những điều kiện khác nhau; Có thể qua bất chước, rèn luyện để hình thành kĩ năng.

1.1.3. Các mức độ của kĩ năng giải toán

Kĩ năng giải bài tập toán học có thể chia thành ba mức độ khác nhau: biết làm, thành thạo; mềm dẻo, linh hoạt, sáng tạo.

1.2. Nhiệm vụ rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh

1.2.1. Mục tiêu dạy học môn toán

Trang bị cho HS những tri thức, kỹ năng, phương pháp toán học phổ thông, cơ bản, thiết thực; Góp phần phát triển năng lực trí tuệ, bồi dưỡng phẩm chất trí tuệ cho HS; Góp phần hình thành và phát triển các phẩm chất, phong cách lao động khoa học, biết hợp tác lao động, có ý chí và thói quen tự học thường xuyên; Tạo cơ sở để HS tiếp tục học CĐ, ĐH, TCCN, học nghề hoặc đi vào cuộc sống lao động.

1.2.2. Yêu cầu rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh ở trường THPT

Giúp học sinh hình thành và nắm vững những mạch kiến thức cơ bản trong chương trình; Giúp học sinh phát triển các năng lực trí tuệ (Tư duy logic và ngôn ngữ chính xác; Khả năng suy đoán, tư duy trừu tượng và trí tưởng tượng trong không gian; Những thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp khái quát hóa; Các phẩm chất trí tuệ như tư duy độc lập, tư duy linh hoạt và sáng tạo).

1.3. Giải bài tập toán học

1.3.1. Vai trò của bài tập toán học

Bài tập có vai trò quan trọng trong bộ môn toán. Thông qua việc giải bài tập học sinh phải thực hiện những hoạt động nhất định; Những bài tập cũng thể hiện những khả năng khác nhau hướng đến việc thực hiện các mục tiêu dạy học môn toán; Thông qua bài tập, giáo viên có thể hoàn chỉnh hay bổ sung những tri thức nào đó đã được trình bày trong phần lý thuyết. Điều quan trọng hơn cả là thông qua bài tập giáo viên sẽ rèn luyện các kỹ năng giải toán cho học sinh.

1.3.2. Ý nghĩa của việc giải bài toán theo nhiều cách

Việc đi sâu vào tìm hiểu nhiều cách giải khác nhau cho một bài toán có vai trò to lớn trong việc rèn luyện kỹ năng, củng cố kiến thức, rèn luyện trí thông minh, óc sáng tạo cho học sinh.

1.4. Những tri thức liên quan đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

1.4.1. Những phương pháp thông thường tìm GTLN, GTNN của biểu thức một biến số

Dựa vào bất đẳng thức; Dựa vào khảo sát hàm số; Tìm tập giá trị.

1.4.2. Những phương pháp thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Sử dụng bất đẳng thức; khảo sát hàm số; hình học hóa, lượng giác hóa.

1.4.3. Những bất đẳng thức thường dùng trong bài toán tìm GTLN, GTNN

Gồm những bất đẳng thức cơ bản có trong SGK, những BĐT mở rộng.

1.4.4. Mối liên quan giữa bài toán chứng minh BĐT và bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Các phương pháp chứng minh BĐT là các phương pháp chủ yếu sử dụng trong bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức và ngược lại; Về cơ bản hai dạng toán này có thể chuyển hóa cho nhau, tuy nhiên cũng có những điểm khác nhau; Về yêu cầu: Bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức thì bắt buộc phải chỉ ra đẳng thức xảy ra khi nào, còn bài toán chứng minh BĐT không nhất thiết phải làm điều đó.

1.5. Một số đặc điểm về phong cách học tập của học sinh khá, giỏi

Những HS khá, giỏi thường có một số đặc điểm về phong cách học tập như sau:

- Thể hiện rõ những đặc điểm của tư duy toán học (theo Viện sĩ B.V. Gờ-nhe-den-cô, =ó là: Năng lực nhìn thấy sự không rõ ràng của quá trình suy luận, thấy được sự thiếu sót của những điều cần thiết trong chứng minh; Sự cô đọng; Sự chính xác của các kí hiệu; Phân chia rõ ràng tiến trình suy luận; lí lẽ đầy đủ và lôgic).

- Thể hiện được những nét độc đáo của tư duy toán học (theo A.Ia. Khinchin, =ó là: Suy luận theo sơ đồ lôgic chiếm ưu thế; Khuynh hướng tìm con đường ngắn nhất dẫn đến mục đích; Phân chia rành mạch các bước suy luận; Sử dụng chính xác các kí hiệu, Tính có căn cứ đầy đủ của lập luận).
- Thường ngại tính toán, không thích làm đi làm lại những điều đã biết nếu không có gì mới. HS khá, giỏi thường suy nghĩ nhanh và hiệu quả, nhưng thường ngại tính toán cụ thể, không thích lặp đi lặp lại những kiểu làm nhàm chán.

1.6. Định hướng cho giải pháp rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh

1.6.1. Quy trình hình thành kĩ năng

Theo chúng tôi, quy trình hình thành kĩ năng giải toán nói chung, kĩ năng tìm GTLN, GTNN cho HS gồm ba bước sau:

Bước 1: Hướng dẫn HS giải một số bài toán mẫu ở trên lớp, có phân tích phương pháp suy nghĩ, tìm lời giải, lưu ý cho HS những điểm cần thiết.

Bước 2: HS tự rèn luyện kĩ năng giải toán theo hệ thống bài toán có chủ định của giáo viên, giáo viên phân tích, khắc phục những khó khăn, thiếu sót cho HS.

Bước 3: Rèn luyện kĩ năng giải toán ở mức độ cao hơn, tổng hợp hơn.

1.6.2. Những yêu cầu đối với giáo viên trong việc hình thành kĩ năng giải toán cho học sinh

Để hình thành kĩ năng giải bài tập toán học cho HS, giáo viên cần thực hiện tốt các vấn đề sau: Xác định từng kĩ năng cụ thể trong hệ thống kĩ năng giải bài tập toán học cho HS THPT và mức độ của nó ở mỗi lớp học, cấp học tương ứng; Xác định hệ thống bài tập toán học tương ứng chủ yếu để HS luyện tập kĩ năng giải các bài tập cơ bản, bài tập tổng hợp; Xây dựng sơ đồ định hướng khái quát, các thuật toán giải

mỗi dạng, loại bài tập; Hướng dẫn học sinh hoạt động tìm kiếm lời giải, bài tập mẫu và bài tập tương tự nhằm giúp HS nắm được sơ đồ định hướng giải bài tập toán học nói chung và mỗi bài tập cụ thể nói riêng; Sử dụng hệ thống bài tập sau mỗi bài, mỗi chương để giúp HS luyện tập theo mẫu, không theo mẫu, thường xuyên và theo nhiều hình thức giải khác nhau; Chú ý đến tính hệ thống của các kỹ năng.

CHƯƠNG 2

GIẢI PHÁP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHO HỌC SINH

Trong chương trình này chúng tôi trình bày việc rèn luyện kỹ năng tìm GTLN, GTNN của biểu thức cho HS theo từng dạng khác nhau. Trong mỗi dạng sẽ sử dụng một số PP như đã xác định ở mục 1.4 chương 1. Chúng tôi trình bày theo cấu trúc như vậy một mặt để thuận lợi cho việc rèn luyện kỹ năng cho học sinh theo từng bài, mặt khác mỗi dạng có thể có nhiều PP giải khác nhau. Mỗi phần nhỏ sẽ được trình bày theo ba bước như đã xác định ở mục 1.6 chương 1.

2.1. Dạng tìm GTLN, GTNN của hàm số

Ví dụ 1: Tìm GTLN, GTNN của $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên mỗi tập hợp D cho dưới đây: a. $D = [1; 4]$ b. $D = [1; 4)$ c. $D = (1; 4]$ d. $D = (1; 4)$.

Bài này giúp HS phân biệt được GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng đóng, khoảng không đóng: Trên khoảng không đóng thì phải dựa vào bảng biến thiên hàm số để kết luận; Trên khoảng đóng $[a; b]$ thì chỉ cần tìm GTLN, GTNN trong tập hợp các giá trị của hàm số tại $a; b$; các điểm tới hạn thuộc đoạn $[a; b]$.

Ví dụ 2: Tìm GTLN, GTNN của $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$

Cách 1: Tìm tập giá trị của hàm số; *Cách 2:* Dùng khảo sát hàm số

2.2. Dạng biểu thức chỉ chứa một biến

Nếu biểu thức chỉ chứa một biến số thì đương nhiên ta có thể sử dụng phương pháp khảo sát hàm số như ở mục 2.1 trên. Tuy nhiên, không phải hàm số nào cũng dễ dàng khảo sát được, nên mục này chủ

yếu sẽ trình bày những phương pháp khác ngoài phương pháp khảo sát hàm số.

2.2.1. Sử dụng các bất đẳng thức đã biết

2.2.2. Xét biểu thức có liên quan

Ví dụ 3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

Hướng dẫn: Xét y^2 .

2.2.3. Đặt ẩn phụ

Ví dụ 4: Tìm GTNN của $y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 3 \left[(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x \right]$

Chú ý: HS dễ mắc phải sai lầm khi tìm tập giá trị của ẩn phụ; Đặt ẩn phụ trong một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp: dạng $a + \frac{1}{a}$, dạng căn thức....

2.2.4. Sử dụng điểm thuộc đồ thị hàm số

Ví dụ 5: Xét $(C)y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Tìm trên (C) điểm M để tổng khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận xiên của (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

2.2.5. Lượng giác hóa

+ Đa thức Trê-bư-sep: $2x^2 - 1 = \cos 2t$; $4x^3 - 3x = \cos 3t$...

+ Dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x \in [-a, a]$. Đặt $\begin{cases} x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a \cos t, t \in [0, \pi] \end{cases}$

Ví dụ 6 : Tìm GTLN của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot (2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1)$ trên $[-1;1]$

Hướng dẫn:

Do $x \in [-1;1]$ nên $\exists t \in [0; \pi]: \cos t = x$; $f(x) = \sin t \cos t \cos 2t \cos 4t = \frac{1}{8} \sin 8t = g(t)$.

2.3. Dạng biểu thức chứa hai biến

Với những dạng toán mà điều kiện ràng buộc giữa hai biến là bậc nhất, dễ dàng rút được biến này theo biến kia, quy về một biến rồi khảo sát hàm số một biến đó thì phương pháp giải bài toán đã rõ ràng. Tuy nhiên, trong trường hợp này, giáo viên có thể khuyến khích học sinh tìm cách giải khác nhanh hơn, do có những nhận xét tốt hơn. Phần trình bày dưới đây chủ yếu quan tâm tới những phương pháp khác với phương pháp quy về một biến.

2.3.1. Dựa vào trường hợp xảy ra đẳng thức khi sử dụng BĐT Cô-si

Ví dụ 7: Cho $\begin{cases} xy + x + y = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$. Tìm GTNN của P: $P = x^4 + y^4$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \alpha = \sqrt{2} - 1$, nên phải áp dụng BĐT Cô-si phù hợp:

$$x^4 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^4 \geq 4\sqrt{x^4 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^4} = 4x\alpha^3; y^4 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^4 \geq 4\sqrt{y^4 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^4} = 4y\alpha^3 \Rightarrow$$

$$P \geq \frac{4\alpha^3 - (6 + \alpha)\alpha^4}{1 + \alpha} = \text{const} = 2(2 - 8\sqrt{2} + 12 - 4\sqrt{2} + 1) = 30 - 24\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1.$$

2.3.2. Dựa vào tính đối xứng của hai biến

2.3.2.1. Quy về đánh giá các đơn thức, đa thức đối xứng $(x + y); xy; (x^2 + y^2) \dots$

Ví dụ 8: Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Cách 1: Đánh giá xy , từ đó đánh giá A

Cách 2: Rút về 1 biến $y = 1 - x$. Biến đổi A về hàm số đối với biến x .

Cách 3: Đưa về biến mới. Đặt $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \end{cases}$. Biến đổi A về hàm số đối với

biến t .

2.3.2.2. Đặt ẩn phụ

Ví dụ 9: Cho $xy=1; x>y$. Tìm GTNN của A: $A = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$

Cách 1: Rút $y = \frac{1}{x}$. Có: $A = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}}$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$

Cách 2: Xét $A^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x - y)^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2 - 2}$ (do $xy=1$) Đặt $t = x^2 + y^2$.

2.3.2.3. Đánh giá tổng nghịch đảo

Ví dụ 10: Tìm GTNN của P: $P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

2.3.3. Dựa vào dấu hiệu ràng buộc của hai biến trong giả thiết

2.3.3.1. Bài toán có giả thiết $x+y=k$ (k là hằng số)

Chú ý: GTNN thường đặt ra cho những biểu thức dạng: $(x^n + y^n)$; $n \in \mathbb{N}^* \dots$

GTLN thường đặt ra cho những biểu thức dạng: $xy; \sqrt{x+a} + \sqrt{y+b}$.

Ví dụ 11: Cho $\begin{cases} x>0; y>0 \\ x+y=1 \end{cases}$; $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$. Tìm GTNN của P.

2.3.3.2. Một số dạng khác

Ví dụ 12: Cho $x^2 + y^2 = 1$ Tìm GTLN, GTNN của P: $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

2.3.4. Khảo sát theo từng biến

Ví dụ 13: Cho $x \in [0;1]; y \in [0;2]$. Tìm GTNN của $P = (1-x)(2-y)(4x-2y)$

Hướng dẫn: $P = 2(1-x)(2-y)[(2-y)-2(1-x)]$. Xét $D = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ v = 2-y \end{cases}$. Có: $u \in [0;1]; v \in [0;2]$; $P = 2uv(v-2u) = 2(-2u^2v + uv^2) = g(u; v)$.

$\min_{(x;y) \in D} P = \min_{(u;v) \in D_1} g(u; v) = \min_{v \in [0;2]} \left(\min_{u \in [0;1]} g(u; v) \right)$ với $D_1 = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 2\}$

Xét hàm số $f(u) = -2vu^2 + v^2u$; $u \in [0;1]$; với tham số $v \in [0;2]$.

$\min_{u \in [0;1]} f(u) = \min(f(0), f(1)) = \min(0; v^2 - 2v)$. Xét $h(v)$ với $v \in [0;2]$. Suy ra $\min P = -2$

2.3.5. Lượng giác hóa

Những trường hợp thường dùng phương pháp lượng giác hóa:

+ Muốn khử căn $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x \in [-a, a]$. Đặt $\begin{cases} x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = a \cos t, t \in [0, \pi] \end{cases}$

+ Muốn khử $\sqrt{a-x}, \sqrt{a+x}$: Đặt $x = a \cos 2t \left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{a(1-\cos 2t)} = \sqrt{2a} \cdot \sin t; \quad \sqrt{a+x} = \sqrt{a(1+\cos 2t)} = \sqrt{2a} \cdot \cos t$$

+ Muốn biến đổi $(1+x^2)$: Đặt $t = \arctan x \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \right)$; có:

$$1+x^2 = 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

+ Có: $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0) \Leftrightarrow \exists t \in [0; 2\pi]: \begin{cases} x = a \sin t \\ y = a \cos t \end{cases}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0) \Leftrightarrow \exists t \in [0; 2\pi]: \begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}$$

+ Có biểu thức $\frac{x-y}{1+xy}$: Đặt $x = \tan u, y = \tan v$; Có $\frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \tan(u-v)$

+ Có: $\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}; \frac{2t}{1-t^2}$ Đặt $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\text{Có: } \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x; \quad \frac{2t}{1+t^2} = \sin x; \quad \frac{2t}{1-t^2} = \tan x$$

+ Muốn khử căn: $\sqrt{x^2-1}$: Đặt $x = \frac{1}{\cos t} \left(t \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \right)$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = |\tan t|$$

Ví dụ 14: Cho $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ (1). Tìm GTLN, GTNN của P:

$$P = \sqrt{3}(x^2 - y^2) - 2(\sqrt{3}+1)x + 2(\sqrt{3}-1)y + 2xy + 2$$

Hướng dẫn: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in [0; 2\pi]: \begin{cases} x-1 = \sin t \\ y-1 = \cos t \end{cases}$

2.3.6. Hình học hóa

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow M(x,y) \in$ đường tròn tâm $I(x_0; y_0)$; bán kính R .

$ax_0 + by_0 + c = 0 \Leftrightarrow M(x_0; y_0) \in$ đường thẳng: $ax + by + c = 0$.

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = M_1 M_2$ với $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2)$

$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d(M; (\Delta))$ với $M(x_0; y_0); (\Delta): ax + by + c = 0$

$k = \frac{b}{a}$: hệ số góc đường thẳng OM với $O(0;0); M(a;b)$

Ví dụ 15: Tìm GTNN của $f(x) = \sqrt{x^2 - 2px + 2p^2} + \sqrt{x^2 - 2qx + 9q^2}$
($p \neq q$)

Hướng dẫn:

Xét $A(x-p, |p|), B(x-q, -|q|), OA = \sqrt{(x-p)^2 + p^2}; OB = \sqrt{(x-q)^2 + q^2}$

$\begin{cases} A \in (\Delta_1): y = |p| \\ B \in (\Delta_2): y = -|q| \end{cases}$ $(\Delta_1)(\Delta_2)$ thuộc hai nửa mặt phẳng bờ là trục hoành.

Do $f(x) = OA + OB \geq AB = \text{const.}$ Vậy khi O thuộc đoạn $AB \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-p & |p| \\ x-q & -|q| \end{vmatrix} = 0$

thì $\min f(x) = \sqrt{(p-q)^2 + (|p|+|q|)^2} \Leftrightarrow x = \frac{p|q| + q|p|}{|p|+|q|}$

2.4. Dạng biểu thức có từ 3 biến số trở lên

2.4.1. Dạng biểu thức đối xứng hoặc xoay vòng đối với các biến theo điều kiện ràng buộc biến

2.4.1.1. Dạng có ràng buộc biến: $\begin{cases} x_1; x_2; \dots; x_n \in D \\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{cases}$

Dạng này GTLN hoặc GTNN xảy ra khi $\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n \in D \\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$. Từ đó mà có

cách đánh giá phù hợp.

Chú ý: Một số hệ quả của BĐT Cô-si:

$$+ \forall x_i > 0 (i = \overline{1, n}); \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

$$+ \forall x_i \geq 0 (i = \overline{1, n}); (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right)^n$$

$$+ \forall x_i \geq 0 (i = \overline{1, n}); \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_i = x_j \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$

Một số hệ quả của BĐT Bu-nhia-côp-ski:

$$+ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow ad = bc$$

$$+ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c} \quad \forall a, b, c > 0. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Ví dụ 16: Cho $a, b, c > 0; abc \geq 1$. Tìm GTNN của P; Q:

$$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}; \quad Q = \frac{a^2}{\alpha b + \beta c} + \frac{b^2}{\alpha c + \beta a} + \frac{c^2}{\alpha a + \beta b} \quad \text{với } \alpha, \beta > 0 \text{ cho trước}$$

Hướng dẫn: P đạt GTNN khi và chỉ khi: $\begin{cases} a=b=c > 0 \\ abc=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Ta có thể chứng minh: $P \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$ theo nhiều cách, dựa vào các BĐT

quen thuộc. Chẳng hạn: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = a \dots$

Ví dụ 17: Cho $\begin{cases} a > 0; b > 0; c > 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \end{cases}$ Tìm GTNN của

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} + \sqrt{b^2 + c^2 + bc} + \sqrt{c^2 + a^2 + ca}$$

$$Q = \sqrt{a^2 + 2b^2 + ab} + \sqrt{b^2 + 2c^2 + bc} + \sqrt{c^2 + 2a^2 + ca}$$

Hướng dẫn: P:

$$a^2 + b^2 + ab = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

$$\Rightarrow P \geq 3\sqrt{3} \text{ khi } a = b = c = 1.$$

2.4.1.2. Dạng có ràng buộc hai biến có liên quan đến biểu thức lượng giác

Với 3 số dương $x; y; z$: $xy + yz + zx = 1$; luôn tồn tại một tam giác ABC sao cho : $x = \tan \frac{A}{2}$; $y = \tan \frac{B}{2}$; $z = \tan \frac{C}{2}$.

Nếu thêm GT 3 số $x; y; z$ cùng nhỏ hơn 1 thì tồn tại một tam giác nhọn thỏa mãn tính chất trên.

Khi đó: $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos A$; $\frac{2x}{1+x^2} = \sin A$; $\frac{2x}{1-x^2} = \tan A$; $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin \frac{A}{2}$.

Ví dụ 18: Cho 3 số dương cùng nhỏ hơn 1 là $x; y; z$: $xy + yz + zx = 1$;

Tìm GTNN của P: $P = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Hướng dẫn: Tồn tại tam giác ABC nhọn và $P = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B + \tan C)$.

2.4.1.3. Dạng có ràng buộc hai biến có liên quan đến biểu thức hình học

Ví dụ 19: Cho $a, b, c \in [0; 2]$, $a + b + c = 3$. Tìm GTLN, GTNN của $T = a^2 + b^2 + c^2$

Hướng dẫn: $a, b, c \in [0; 2] \Leftrightarrow M(a; b; c) \in$ khối lập phương :

$\{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2\}$ có 4 đỉnh: $O(0; 0; 0)$; $A(2; 0; 0)$; $B(0; 2; 0)$; $C(0; 0; 2)$.

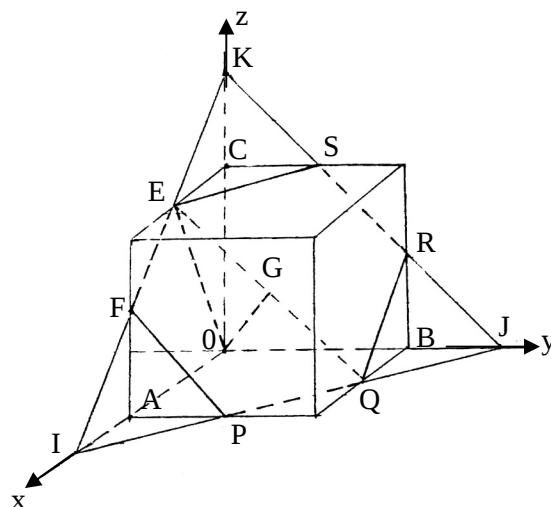
$M(a; b; c)$ với $a + b + c = 3 \Leftrightarrow M(a; b; c) \in mp(\alpha)$ $x + y + z = 3$; $mp(\alpha) \equiv mp(IJK)$

$M(a, b, c)$ thỏa mãn 2 điều kiện trên khi và chỉ khi M thuộc thiết diện tạo bởi mp(IJK) cắt khối lập phương.

Thiết diện đó là lục giác EFPQRS

(trong đó E, F, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh).

KL: $\max T = 5 \Leftrightarrow \{a; b; c\} = \{0; 1; 2\}$;
 $\min T = 3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$



2.4.2. Dạng biểu thức khác (không đối xứng, không xoay vòng)

2.4.2.1. Đánh giá dựa vào các bất đẳng thức thông dụng

Ví dụ 20: Cho $a; b; c > 0$. Tìm GTNN của P: $P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}$

Hướng dẫn: Xét $P+12 = \left(\frac{3a}{b+c} + 3\right) + \left(\frac{4b}{c+a} + 4\right) + \left(\frac{5c}{a+b} + 5\right)$

$$= (a+b+c) \left(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2 \right] \left[\left(\sqrt{\frac{3}{b+c}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{c+a}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{a+b}} \right)^2 \right]$$

Đánh giá tiếp theo BĐT Bu-nhia-côp-ski.

Ví dụ 21: Cho tam giác ABC. Tìm GTLN của $M = 2(\cos A + \cos B) + 3\cos C$

Hướng dẫn: $M = 3 \left(1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \right) + 4\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = -6\sin^2 \frac{C}{2} + 4\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 3$

$M \leq \frac{11}{3}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C: $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

2.4.2.2. Lượng giác hóa

Ví dụ 22: Cho 3 số dương $x; y; z$: $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTLN của M:

$$M = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} + \frac{2(1-y^2)}{1+y^2} + \frac{3(1-z^2)}{1+z^2}$$

Hướng dẫn: Tồn tại tam giác ABC sao cho:

$$x = \tan \frac{A}{2}; y = \tan \frac{B}{2}; z = \tan \frac{C}{2}$$

$$M = 2(\cos A + \cos B) + 3\cos C.$$

2.4.2.3. Hình học hóa

Bổ đề: Với 3 số dương cho trước $x; y; z$, luôn tồn tại 1 tam giác ABC có độ dài các cạnh đối diện A; B; C lần lượt là $a; b; c$ sao cho: $a = y + z$; $b = z + x$;

$$c = x + y$$

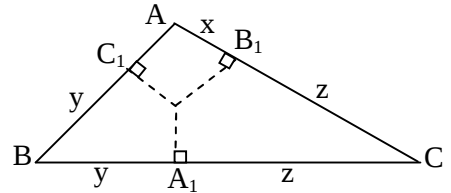
Ví dụ 23: Cho $x, y, z > 0 : xyz(x + y + z) = 1$. Tìm GTNN của $P = (x + y)(y + z)$

Xét $\triangle ABC$ có: $AB = x + y; BC = y + z; CA = z + x$

(x, y, z là độ dài các tiếp tuyến kẻ từ A, B, C tới đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$)

Hướng dẫn: Đặt $BC = a; CA = b; AB = c$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z).xyz} = 1$$

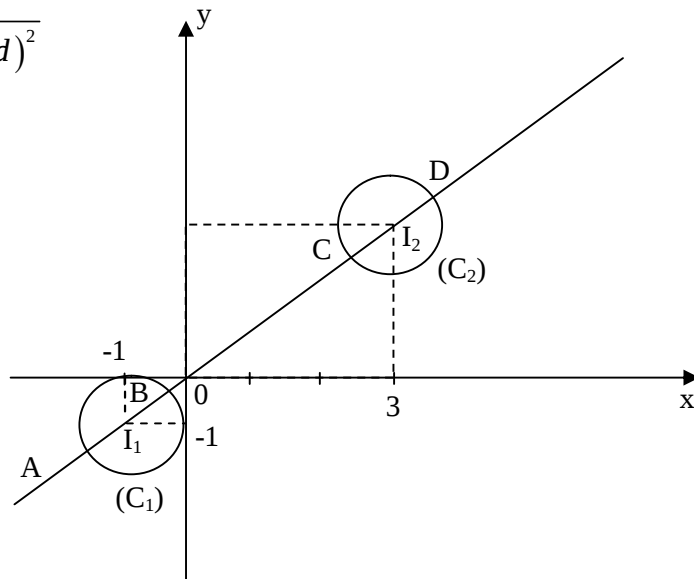


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \leq \frac{1}{2} AB \cdot BC \Rightarrow AB \cdot BC \geq 2 \Rightarrow (x + y)(y + z) \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} zx = 1 = y(x + y + z) = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Ví dụ 24: Cho $\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a + 2b + 1 = 0 & (1) \\ c^2 + d^2 + 17 = 6(c + d) & (2) \end{cases}$. Tìm GTNN của P :

$$P = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$



Hướng dẫn:

$$(1) \Leftrightarrow (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow M(a; b) \in (C_1).$$

$$(2) \Leftrightarrow (c - 3)^2 + (d - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow N(c; d) \in (C_2)$$

$P = MN$, $(C_1), (C_2)$ ở ngoài nhau.

$$(C_1) \cap (C_2) = \emptyset.$$

Gọi A, B, C, D lần lượt là giao điểm $I_1 I_2$ với $(C_1), (C_2)$,

$$\forall M, N \text{ lần lượt } \in (C_1), (C_2), BC \leq MN \leq AD$$

$$\Rightarrow I_1 I_2 - (R_1 + R_2) \leq MN \leq I_1 I_2 + (R_1 + R_2) \Rightarrow 4\sqrt{2} - 2 \leq P \leq 4\sqrt{2} + 2$$

$$P = 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow M \equiv B; N \equiv C; P = 4\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow M \equiv A, N \equiv D$$

$$\max P = 4\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow a = b = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; c = d = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\min P = 4\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow a = b = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; c = d = 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.5. Dạng biểu thức lượng giác

2.5.1. Sử dụng bất đẳng thức lượng giác

Ví dụ 25: Tìm GTNN của $y = \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{1}{2} \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 < \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 2x} \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{2} (1 + 4 \cdot 1)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Chú ý: Một số HS sai lầm là đánh giá GTNN của từng số hạng, nhưng không chú ý xem đẳng thức có xảy ra hay không, dẫn đến $\min y = 8$.

2.5.2. Đưa về tổng các số không âm, không dương

Ví dụ 26: Tìm GTNN của $y = 4\sin 3x + \cos 2x - \cos 6x + 6$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} y &= 2\sin^2 3x - 1 + 4\sin 3x + \cos 2x + 6 \\ &= 2(\sin 3x + 1)^2 + 1 + \cos 2x + 2 \geq 2 \forall x, \text{ do } \begin{cases} \cos 2x \geq -1 \\ (\sin 3x + 1)^2 \geq 0 \end{cases} \forall x \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\text{Vậy } \min y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

2.5.3. Quy về một hàm số lượng giác

Ví dụ 27: Tìm GTLN, GTNN của $y = 2(1 + \sin 2x \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

Hướng dẫn: $y = 2 + \sin 2x(2 \cos 4x - \sin 6x)$. Đặt $t = \sin 2x (t \in [-1; 1])$

$$y = 2 + t(2(1 - 2t^2) - (3t - 4t^3)) = 4t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t + 2 = f(t);$$

Bài toán đưa về tìm GTLN ; GTNN của hàm số $f(t)$ trên $[-1; 1]$

Kết quả: $\max y = 5$; $\min y = 1$

2.5.4. Sử dụng bất đẳng thức phụ

Ví dụ 28: Tìm GTNN của $y = \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn: Sử dụng BĐT phụ: $(1+u)(1+v) \geq (1+\sqrt{uv})^2 \forall u, v > 0$.

$$\min_{x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} y = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

2.6. Dạng hình học

Ví dụ 29: Cho $M(1; 1; 1)$. Lập phương trình mặt phẳng qua M, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích đạt GTNN.

Hướng dẫn: Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $M(1; 1; 1) \in (\alpha)$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} |a| \cdot |b| \cdot |c| = \frac{1}{6} abc = V.$$

$$\text{Theo Côsi: } 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 3 \Rightarrow V \geq \frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min V = \frac{9}{2} \text{ (đvtt)} \Leftrightarrow a = b = c = 3.$$

CHƯƠNG 3

THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục ! ích, nội dung, tổ chức thực nghiệm sư phạm (TNSP)

- + Mục đích TNSP: kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của đề tài.
- + Nội dung TNSP lấy từ chương 2 của luận văn
- + Tổ chức thực nghiệm:
 - Lớp thực nghiệm: Lớp 12 Tự nhiên 1 trường THPT chuyên Trần Phú.
Số: 50.
 - Lớp đối chứng: Lớp 12 Tự nhiên 2 trường THPT chuyên Trần Phú.
Số: 50.
 - Thời gian: Dạy TNSP vào 4 tiết bồi dưỡng của lớp, vào các ngày 20, 24/10/ 2010
 - Giáo viên dạy TNSP: Nguyễn Thị Thanh Thủy

3.2. Giáo án thực nghiệm sư phạm (có trong luận văn)

3.3. Kết quả thực nghiệm sư phạm

3.3.1. Đề kiểm tra (45 phút) và kết quả làm bài của HS:

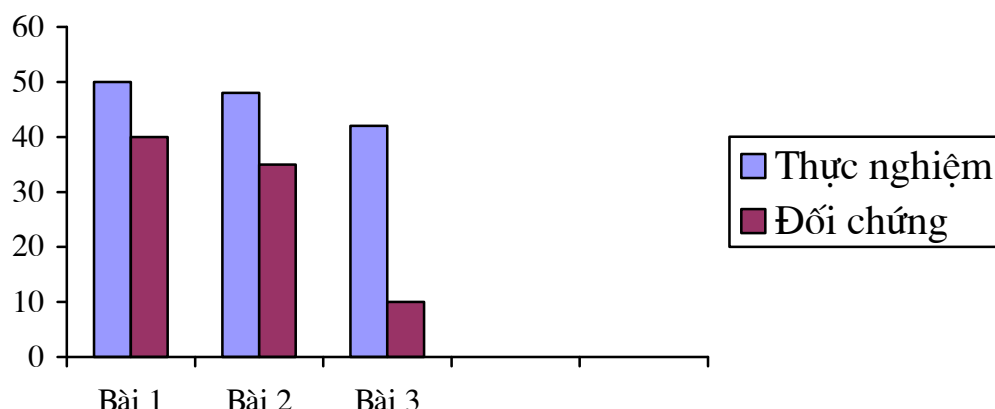
Bài 1 Cho $x > 0; y > 0; xy + x^2 + y^2 = 3$. Tìm GTNN của Q: $Q = x^4 + y^4$

Bài 2 Cho $x > 0; y > 0; x + y = 1$. Tìm GTNN của P: $P = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$

Bài 3: Cho $\begin{cases} x > y \\ xy = 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của A: $A = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$

Bài kiểm tra này tác giả nhằm mục đích kiểm tra kĩ năng tìm GTLN, GTNN của biểu thức đối xứng đối với hai biến bằng các phương pháp đã nêu trong giáo án.

Kết quả bài kiểm tra



Biểu đồ 3.1: Kết quả số học sinh của lớp thực nghiệm và lớp đối chứng làm đúng từng bài

Một số nhận xét: Đa số HS lớp thực nghiệm đều nhanh chóng tìm được nhiều cách giải và làm đúng, một số em ở lớp đối chứng tuy cũng làm được bài này nhưng cũng loay hoay một thời gian khá lâu mới tìm được hướng giải, các em còn lại thì sa vào biến đổi đại số phức tạp, không tìm được hướng giải.

3.3.2. Kết quả đánh giá của các giáo viên, giáo sinh dự giờ TNSP

Chúng tôi đã biên soạn các phiếu đánh giá và phiếu hỏi để lấy ý kiến của giáo viên và học sinh, theo các mẫu. Kết quả được xử lý sau thống kê cho thấy:

- Giờ dạy thực nghiệm đã có được không khí học tập sôi nổi, học sinh rất hứng thú, thi đua nhau về tốc độ phát hiện hướng giải, tích cực làm bài. Hiệu quả rất rõ là các em đã thực sự chắc chắn trong việc giải những dạng toán đã được rèn luyện. Hơn nữa, các em có sự bình tĩnh, tự tin đứng trước bài toán khó, có tốc độ xử lý bài toán nhanh hơn và tốt hơn.
- Các giáo án TNSP có tính khả thi và hiệu quả.

KẾT LUẬN

Luận văn có những kết quả chủ yếu sau đây:

1. Tổng quan một số vấn đề thuộc về lí luận liên quan đến kĩ năng giải toán nói chung và kĩ năng tìm GTLN, GTNN của biểu thức nói riêng; tóm tắt những tri thức liên quan đến bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.
2. Từ những căn cứ lí luận, đồng thời căn cứ vào những đặc điểm về phong cách học tập của học sinh khá giỏi, luận văn đã xác định phương hướng cho giải pháp rèn luyện kĩ năng giải toán cho học sinh thông qua quy trình ba bước hình thành kĩ năng giải toán nói chung, kĩ năng tìm GTLN, GTNN nói riêng cho học sinh và những yêu cầu đối với giáo viên trong việc hình thành kĩ năng giải toán cho học sinh.
3. Đề xuất một giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm GTLN, GTNN của biểu thức cho học sinh thông qua hệ thống gồm 6 dạng khác nhau, với 58 ví dụ có phân tích, minh họa. Việc thiết kế hệ thống theo dạng thuận lợi cho việc rèn luyện kĩ năng cho học sinh theo từng bài, mỗi dạng có thể có nhiều phương pháp giải khác nhau.
Trong mỗi dạng, giáo viên thực hiện theo quy trình ba bước hình thành kĩ năng giải toán cho học sinh.
4. Giải pháp rèn luyện kĩ năng tìm GTLN, GTNN của biểu thức cho học sinh đề xuất trong luận văn một phần đã được kiểm nghiệm, đánh giá qua Thực nghiệm sư phạm. Tuy phạm vi thực nghiệm chưa rộng nhưng đã chứng tỏ được tính khả thi và hiệu quả của đề tài.
5. Luận văn có thể là một tài liệu tham khảo bổ ích cho các đồng nghiệp và sinh viên khoa Toán các trường ĐHSP.