

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ HUỆ

MỘT SỐ THUẬT TOÁN CHIỀU - ĐIỂM GẦN KÈ
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ VỚI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội - 2011

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ HUỆ

MỘT SỐ THUẬT TOÁN CHIỀU - ĐIỂM GẦN KÈ
GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VỚI TOÁN TỬ ĐƠN ĐIỀU

Chuyên ngành: Toán học tính toán

Mã số: 604630

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Giáo viên hướng dẫn: **GS TSKH Phạm Kỳ Anh**

Hà Nội - 2011

Lời nói đầu

Nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật như bài toán chấp nhận lỗi có ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, khôi phục ảnh, phương pháp xử lý bức xạ,..., có thể đưa về bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình với toán tử đơn điệu hoặc tìm điểm bất động của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn (tương đối).

Thuật toán điểm gần kề tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại được Rockafellar [8] đề xuất vào năm 1976 và trải qua nhiều lần cải biên. Tuy nhiên các thuật toán này nói chung chỉ cho kết quả hội tụ yếu. Năm 2000, M. V. Solodov và B. F. Svaiter [11] đã kết hợp thuật toán điểm gần kề với phép chiếu đơn giản lên giao của các nửa không gian để thu được kết quả hội tụ mạnh. Gần đây, P. K. Anh và C. V. Chung [3] đã thực hiện song song hóa thuật toán chiếu-điểm gần kề để tìm nghiệm của hệ phương trình toán tử đơn điệu.

Cũng dựa trên ý tưởng lai ghép, Nakajo và Takahashi đã thu được định lý hội tụ mạnh cho ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Hilbert và S. Matsushita [7] đã tổng quát kết quả này cho không gian Banach. Năm 2011, Liu [6] đã cải biên thuật toán CQ của Qin và Su [9] để thu được định lý hội tụ mạnh cho thuật toán lặp xoay vòng tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Banach. Đến năm 2011, P. K. Anh và C. V. Chung đã đề xuất phương pháp CQ song song và chỉ ra rằng thuật toán này tốt hơn thuật toán lặp xoay vòng của Liu ngay cả khi chạy ở chế độ tuần tự.

Bản luận văn này tập trung trình bày các thuật toán lai ghép với phép chiếu để giải hệ phương trình với các toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert và tìm điểm bất động của họ các ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Banach.

Ngoài các phần Mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 4 chương:

Chương 1: "**Kiến thức chuẩn bị**" trình bày một số khái niệm về toán tử đơn điệu, hình học của không gian Banach và một vài tính chất quan trọng của phép chiếu dùng trong luận văn.

Chương 2: "**Phương pháp chiếu-điểm gần kề**" trình bày hai thuật toán lai ghép giữa phương pháp chiếu và phương pháp điểm gần kề trong không gian Hilbert, trong đó phần 2 của Chương 2 trình bày thuật toán chiếu-điểm gần kề tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại (đơn trị hoặc đa trị) và các định lý hội tụ mạnh; phần 3 của Chương 2 trình bày thuật toán chiếu-điểm gần kề song song tìm nghiệm của hệ phương trình toán tử đơn điệu và định lý hội tụ mạnh của nó.

Chương 3: "**Phương pháp CQ**" trình bày các định lý hội tụ mạnh của phương pháp CQ cho một toán tử không giãn tương đối, phương pháp CQ xoay vòng và phương pháp CQ song song cho một họ các toán tử không giãn tương đối trong không gian Banach. Phần 3 của Chương 3 trình bày một ứng dụng của phương pháp CQ và một cải biên của CQ song song trong không gian Hilbert.

Chương 4: "**Áp dụng**", chúng tôi áp dụng các phương pháp song song trong luận văn để giải bài toán khôi phục ảnh trong không gian Hilbert và giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Trong chương này chúng tôi cũng đưa ra một ví dụ số thực hiện trong môi trường Matlab và minh họa hình học cho phương pháp chiếu-điểm gần kề song song.

Hà nội, ngày 1 tháng 12 năm 2011

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số khái niệm

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực, E là không gian Banach và E^* là đối ngẫu của E .

1. Tập lồi: Tập $C \subset \mathcal{H}$ (hoặc E) được gọi là lồi nếu C chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

2. Toán tử đơn điệu: Ánh xạ $T : E \rightarrow E^*$ được gọi là đơn điệu nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in E,$$

trong đó ký hiệu $\langle f, x \rangle$ chỉ tích đối ngẫu. Trường hợp $E = E^* = \mathcal{H}$ ta có tích vô hướng trong $\mathcal{H}$.

Bổ đề 1.1.1. *Giả sử S là tập các không điểm của T , tức là*

$$S = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = \theta\}.$$

Nếu T là toán tử đơn điệu và $S \neq \emptyset$ thì S là tập lồi.

Chứng minh. Với mọi $x_1, x_2 \in S$ và $t \in (0, 1)$ đặt $x = tx_1 + (1 - t)x_2$. Vì T là toán tử đơn điệu nên ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Tx - Tx_1, x - x_1 \rangle = \langle Tx, tx_1 + (1 - t)x_2 - x_1 \rangle \\ &= (1 - t)\langle Tx, x_2 - x_1 \rangle \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Tx - Tx_2, x - x_2 \rangle = \langle Tx, tx_1 + (1-t)x_2 - x_2 \rangle \\ &= t\langle Tx, x_1 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Từ điều này suy ra $\langle Tx, x_1 - x_2 \rangle = 0$. Vậy $Tx = \theta$ nghĩa là $x \in S$. ■

3. Toán tử ngược-đơn điệu mạnh: T được gọi là đồng bức với hằng số $c > 0$ hay c -ngược đơn điệu mạnh trên $\mathcal{H}$ nếu

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq c\|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

4. Toán tử đơn điệu cực đại: Toán tử T được gọi là đơn điệu cực đại nếu nó là đơn điệu và đồ thị của nó không phải là tập con thực sự của đồ thị của một toán tử đơn điệu nào khác.

Toán tử $J : E \rightarrow E^*$ xác định bởi

$$J(x) = \{f \in E^* \mid \langle f, x \rangle = \|x\|_E^2 = \|f\|_{E^*}^2\}$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Hàm số $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2$$

với mọi $x, y \in E$, trong đó J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc từ E vào E^* . Đại lượng $\sqrt{\phi(x, y)}$ gọi là khoảng cách suy rộng trên E .

5. Ánh xạ không giãn và ánh xạ không giãn tương đối: Cho C là một tập con lồi đóng của E và T là ánh xạ từ C vào chính nó. Ký hiệu $F(T)$ là tập các điểm bất động của T . Một điểm p trong C được gọi điểm bất động tiệm cận của T nếu C chứa một dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới p sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - Tx_n) = 0$. Ký hiệu tập tất cả các điểm bất động tiệm cận của T là $\widehat{F}(T)$. Ánh xạ T được gọi là không giãn nếu $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C$. T là ánh xạ không giãn tương đối nếu $\widehat{F}(T) = F(T)$ và $\phi(p, Tx) \leq \phi(p, x)$ với mọi $x \in C$ và $p \in F(T)$.

Nếu T là toán tử không giãn trên không gian Hilbert thì $A = I - T$ là toán tử đơn điệu, trong đó I là toán tử đồng nhất. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ ta có

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Ax - Ay\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\langle x - y, Tx - Ty \rangle + \|Tx - Ty\|^2 \\ &\leq 2(\|x - y\|^2 - \langle x - y, Tx - Ty \rangle) \\ &= 2\langle Ax - Ay, x - y \rangle. \end{aligned}$$

6. Không gian Banach lồi đều: Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ và $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có $\|x + y\| < 2(1 - \delta(\varepsilon))$.

Chú ý 1. Có thể thay đổi như sau: với mọi $x, y \in E, d > 0$ tồn tại $\delta(\frac{\varepsilon}{d}), \|x\| \leq d, \|y\| \leq d, \|x - y\| \geq \varepsilon$ ta có $\|x + y\| \leq 2d(1 - \delta(\frac{\varepsilon}{d}))$.

Chú ý 2. Mọi không gian Hilbert đều là không gian lồi đều. Thật vậy, giả sử $\varepsilon > 0, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ sao cho $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Từ bất đẳng thức hình bình hành suy ra

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2.$$

Do đó

$$\|x + y\| \leq \sqrt{4 - \varepsilon^2} = 2 \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{4}} \right) \right).$$

Chú ý 3. Mọi không gian Banach lồi đều là không gian phản xạ, tức là $E^{**} = E$.

7. Không gian Banach lồi chặt: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ta có $\|x + y\| < 2$.

8. Không gian Banach trơn và trơn đều: Đặt $U = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ là hình cầu đơn vị của E . Khi đó không gian Banach E được gọi là trơn nếu giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

tồn tại với mỗi $x, y \in U$. E được gọi là trơn đều nếu giới hạn trên đều với mọi $x, y \in U$. Nếu E là trơn đều thì J liên tục chuẩn-chuẩn đều trên mỗi tập con bị chặn của E .

9. Tính chất Kadec-Klee: Không gian Banach E có tính chất Kadec-Klee nếu $x_n \rightharpoonup x$ và $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ thì $x_n \rightarrow x$ khi $n \rightarrow \infty$.

Bổ đề 1.1.2. Mọi không gian Banach lồi đều đều có tính chất Kadec-Klee.

1.2 Phép chiếu trong không gian Hilbert

Định nghĩa 1.2.1. Cho A là một tập khác rỗng (không nhất thiết lồi) của $\mathcal{H}$ và điểm $x \in \mathcal{H}$. Đặt

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} \|y - x\|.$$

Ta nói $d_A(x)$ là khoảng cách từ x đến A . Nếu tồn tại $\pi \in A$ sao cho $d_A(x) = \|\pi - x\|$ thì ta nói π là hình chiếu vuông góc của x lên A . Ký hiệu là $\pi = P_A(x)$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của phép chiếu trực giao mà chúng ta sẽ sử dụng trong Chương 2, 3 và 4.

Bổ đề 1.2.1. Cho A là một tập lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$. Khi đó với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và $z \in A$, các tính chất sau đúng:

$$\langle x - P_A(x), z - P_A(x) \rangle \leq 0;$$

$$\|P_A(x) - P_A(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_A(x) - x + y - P_A(y)\|^2.$$

Bổ đề 1.2.2. Cho A là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$. Khi đó với mọi $x \in \mathcal{H}$ hình chiếu $P_A(x)$ của x trên A luôn tồn tại và duy nhất.

Cho siêu phẳng $H = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle a, z \rangle = b\}$ của $\mathcal{H}$. Khi đó hình chiếu của điểm $x \in \mathcal{H}$ bất kỳ lên H là

$$P_H(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle - b}{\|a\|^2} a.$$

Chương 2

Phương pháp chiếu-điểm gần kề

Trong chương này chúng ta sẽ đề cập đến một cải tiến của phương pháp điểm gần kề cổ điển giải bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Thuật toán mới thu được bằng cách lai ghép phương pháp điểm gần kề và phương pháp chiếu. Trong thuật toán này, chúng ta vẫn giữ lại những ưu điểm của phương pháp điểm gần kề trong khi không mất nhiều chi phí tính toán trong bước chiếu. Đặc biệt, dựa vào tính chất của toán tử đơn điệu cực đại và tính chất của phép chiếu, thuật toán sẽ cho chúng ta kết quả hội tụ mạnh đến một nghiệm của bài toán.

2.1 Giới thiệu

Xét bài toán

$$\text{tìm } x \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in T(x), \quad (2.1)$$

trong đó $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert và $T(\cdot)$ là một toán tử đơn điệu cực đại (nói chung là toán tử đa trị) trên $\mathcal{H}$. Ký hiệu tập nghiệm của bài toán này là

$$S := \{x \in \mathcal{H} \mid 0 \in T(x)\}.$$

1. Phương pháp điểm gần kề: Giả sử đã có $x^k \in \mathcal{H}$ là một xấp xỉ tới nghiệm của bài toán (2.1), điểm lặp tiếp theo thu được từ việc giải bài toán phụ gần kề

$$0 \in T(x) + \mu_k(x - x^k), \quad (2.2)$$

trong đó $\mu_k > 0$ là tham số hiệu chỉnh.

Nếu dãy tham số hiệu chỉnh $\{\mu_k\}$ được chọn bị chặn thì dãy lặp $\{x^k\}$ của phương pháp điểm gần kề *hội tụ yếu* tới một nghiệm của bài toán (2.1) (giả thiết bài toán (2.1) có nghiệm). O. Güler [4] đã đưa ra ví dụ một hàm f -lồi thực sự trong không gian Hilbert vô hạn chiều l^2 , thuật toán điểm gần kề cho $T = \partial f$ hội tụ yếu nhưng không hội tụ mạnh.

2. Việc giải chính xác bài toán phụ gần kề (2.2) nói chung khó thực hiện. Vì vậy trong thực tế bài toán (2.2) chỉ cần giải gần đúng, nghĩa là tìm một cặp $y^k \in \mathcal{H}$ và $v^k \in T(y^k)$ sao cho

$$\varepsilon^k = v^k + \mu_k(y^k - x^k), \quad (2.3)$$

trong đó ε^k là sai số trên nghiệm chính xác của bài toán con (2.2).

Trong *phương pháp điểm gần kề gần đúng thuần túy*, điểm lặp tiếp theo được xác định từ công thức

$$x^{k+1} := y^k.$$

Các điều kiện đảm bảo các phép lặp (2.3) hội tụ là

$$\|\varepsilon^k\| \leq \sigma_k \mu_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k < \infty,$$

hoặc

$$\|\varepsilon^k\| \leq \sigma_k \mu_k \|y^k - x^k\|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k < \infty.$$

Điều kiện đầu tiên sẽ đảm bảo sự hội tụ toàn cục, trong khi điều kiện thứ hai (cùng với giả thiết nào đó) sẽ cho tốc độ hội tụ tuyến tính địa phương. Chú ý rằng, dãy khả tổng $\{\sigma_k\}$ nói chung là được chọn trước.

Trong điều kiện thứ hai, sai số cho phép σ_k thỏa mãn

$$\frac{\|\varepsilon^k\|}{\mu_k \|y^k - x^k\|} \leq \sigma_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k < \infty.$$

Trong mọi trường hợp $\sigma_k \rightarrow 0$, nên các điều kiện đặt lên sai số ε^k là quá chặt. Nếu $\{\sigma_k\}$ là dãy hằng khác không thì sự hội tụ của dãy lặp gần kề gần đúng không được đảm bảo, thậm chí cả trong trường hợp hữu hạn chiều.

3. Để khắc phục những khó khăn trong đánh giá sai số của thuật toán điểm gần kề gần đúng thuần túy, chúng ta sẽ phải cải tiến phương pháp này theo

hướng cố định sai số cho phép σ . Nói cách khác là chúng ta chấp nhận $y^k \in \mathcal{H}$ và $v^k \in T(y^k)$ là một nghiệm của (2.3) nếu một trong hai điều kiện sau đúng:

$$\frac{\|\varepsilon^k\|}{\mu_k \|y^k - x^k\|} \leq \sigma \quad \text{hoặc} \quad \frac{\|\varepsilon^k\|}{\|v^k\|} \leq \sigma,$$

trong đó $\sigma \in [0, 1)$. Dưới điều kiện này, siêu phẳng

$$H_k := \{x \in \mathcal{H} \mid \langle v^k, x - y^k \rangle = 0\}$$

tách chặt điểm lặp x^k khỏi tập nghiệm S (giả thiết S khác rỗng). Chúng ta thu được một *thuật toán lai ghép chiếu-điểm gần kề* sau đây:

Thuật toán 2.1.1. ([10]) *Chọn giá trị ban đầu tùy ý $x^0 \in \mathcal{H}$ và $\sigma \in [0, 1)$. Giả sử đã có x^k , chọn $\mu_k > 0$ và*

$$\text{tìm } y^k \in \mathcal{H} \text{ sao cho } \varepsilon^k = v^k + \mu_k(y^k - x^k), \quad v^k \in T(y^k),$$

trong đó

$$\|\varepsilon^k\| \leq \sigma \max\{\|v^k\|, \mu_k \|y^k - x^k\|\}.$$

Dừng nếu $v^k = 0$ hoặc $y^k = x^k$. Nếu không, xây dựng siêu phẳng

$$H_k = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle v^k, x - y^k \rangle = 0\}.$$

Đặt

$$x^{k+1} = P_{H_k}(x^k).$$

Trong phương án cải tiến này, chúng ta giữ lại tất cả các ưu điểm về hội tụ của phương pháp điểm gần kề trong khi sai số cho phép σ được cố định. Đặc biệt, phép chiếu x^k lên siêu phẳng H_k có thể được viết dưới dạng công thức tường minh, bởi vậy nó không cần thêm nhiều chi phí tính toán. Tuy nhiên, phương pháp lai ghép này cũng chỉ sinh ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán (2.1).

Định nghĩa 2.1.1. *Cho $x \in \mathcal{H}$, $\mu > 0$ và $\sigma \in [0, 1)$. Cặp $(y, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ được gọi là nghiệm gần đúng với sai số cho phép σ của $0 \in T(\cdot) + \mu(\cdot - x)$ nếu*

$$v \in T(y),$$

$$v + \mu(y - x) = \varepsilon,$$

$$\text{và} \quad \|\varepsilon\| \leq \sigma \max\{\|v\|, \mu \|y - x\|\}.$$

Mệnh đề 2.1.1. Cho $x \in \mathcal{H}, \mu > 0, \sigma \in [0, 1)$ và giả sử rằng (y, v) là một nghiệm gần đúng của $0 \in T(\cdot) + \mu(\cdot - x)$ với sai số cho phép σ . Khi đó

$$\langle x - y, v \rangle \geq (1 - \sigma) \max\{\mu\|x - y\|^2, \|v\|^2/\mu\} \geq (1 - \sigma)\|v\|\|x - y\|. \quad (2.4)$$

Đặt

$$H := \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - y, v \rangle \leq 0\}.$$

Bốn khẳng định sau là tương đương

$$x \in H;$$

$$y = x;$$

$$v = 0;$$

x là một nghiệm của bài toán (2.1).

Hơn nữa,

$$\|P_H(x) - x\| \geq (1 - \sigma) \max\{\|x - y\|, \|v\|/\mu\}. \quad (2.5)$$

2.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp chiếu-điểm gần kề

2.2.1 Thuật toán chiếu-điểm gần kề

Thuật toán 2.2.1. ([11]) Cho $x^0 \in \mathcal{H}$ là xấp xỉ ban đầu bất kỳ và $\sigma \in [0, 1)$.

Giả sử tại bước lặp thứ k chúng ta đã có x^k .

Bước 1: Chọn $\mu_k > 0$, tìm (y^k, v^k) là một nghiệm gần đúng của bài toán

$$0 \in T(x) + \mu_k(x - x^k)$$

với sai số cho phép σ .

Bước 2 (Bước chiếu): Xác định

$$H_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - y^k, v^k \rangle \leq 0\},$$

và

$$W_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - x^k, x^0 - x^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$x^{k+1} = P_{H_k \cap W_k}(x^0).$$

2.2.2 Định lý hội tụ

Chúng ta sẽ chỉ ra một số tính chất của Thuật toán 2.2.1 mà không cần giả thiết bài toán có nghiệm. Giả sử $x^k, y^k, v^k, k = 0, 1, \dots$ là những đại lượng sinh bởi Thuật toán 2.2.1.

Mệnh đề 2.2.1. *Giả sử Thuật toán 2.2.1 đúng đến $k + 1$. Khi đó các bất đẳng thức sau đúng*

$$\|x^{k+1} - x^0\|^2 \geq \|x^k - x^0\|^2 + \|x^{k+1} - x^k\|^2, \quad (2.6)$$

và

$$\|x^{k+1} - x^k\| \geq (1 - \sigma) \max\{\|y^k - x^k\|, \|v^k\|/\mu_k\}. \quad (2.7)$$

Hệ quả 2.2.1. *Giả sử dãy tham số hiệu chỉnh $\{\mu_k\}$ bị chặn và Thuật toán 2.2.1 sinh ra dãy vô hạn $\{x^k\}$. Khi đó một trong hai khẳng định sau đúng*

- (i) Dãy $\{x^k\}$ bị chặn và các điểm tụ yếu của nó nằm trong $S \neq \emptyset$;
- (ii) $S = \emptyset$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \infty$.

Tiếp theo chúng ta sẽ chứng minh sự hội tụ mạnh của $\{x^k\}$ đến nghiệm của phương trình trong trường hợp $S \neq \emptyset$. Sau đó chúng ta sẽ chỉ ra tính chất của dãy $\{x^k\}$ trong trường hợp phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 1. $S \neq \emptyset$. Cho x^0 là giá trị ban đầu bất kỳ. Đặt

$$U(x^0) = \{x \in \mathcal{H} \mid \forall z \in S, \langle z - x, x^0 - x \rangle \leq 0\}.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra tập $H_k \cap W_k$ luôn chứa tập nghiệm S và vì thế nó khác rỗng. Hơn nữa, chúng ta cũng sẽ chứng tỏ dãy $\{x^k\}$ nằm trong $U(x^0)$.

Mệnh đề 2.2.2. *Giả sử Thuật toán 2.2.1 thực hiện được đến bước k và $x^k \in U(x^0)$. Khi đó những khẳng định sau đây đúng:*

- (i) $S \subseteq H_k \cap W_k$;
- (ii) x^{k+1} hoàn toàn xác định và $x^{k+1} \in U(x^0)$.

Hệ quả 2.2.2. *Thuật toán 2.2.1 hoàn toàn xác định và sinh ra các dãy lặp $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ và $\{v^k\}$ sao cho $x^k \in U(x^0)$, $S \subseteq H_k \cap W_k$ với mọi k . Hơn nữa, nếu dãy μ_k bị chặn trên thì $\{x^k\}$ bị chặn và các điểm tụ yếu của nó nằm trong S .*

Định lý 2.2.1. *Giả sử dãy $\{x^k\}$ được sinh ra từ Thuật toán 2.2.1 và dãy tham số hiệu chỉnh $\{\mu_k\}$ bị chặn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới $x^* = P_S(x^0)$.*

Trường hợp $S = \emptyset$. Trong trường hợp này dãy $\{x^k\}$ vẫn xác định với mọi k và phân kỳ.

Định lý 2.2.2. *Nếu $S = \emptyset$ thì Thuật toán 2.2.1 sinh ra một dãy vô hạn $\{x^k\}$. Nếu thêm điều kiện dãy tham số hiệu chỉnh $\{\mu_k\}$ bị chặn thì $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \infty$.*

2.3 Phương pháp chiếu-điểm gần kề song song

Xét hệ phương trình toán tử

$$A_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

trong đó $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert và $A_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là các toán tử đơn điệu cực đại.

Thuật toán 2.3.1. ([3]) *Chọn giá trị ban đầu bất kỳ $x_0 \in \mathcal{H}$, $\bar{\mu} > 0$ và $\sigma \in [0, 1)$. Giả sử tại lần lặp thứ k , đã có x_k :*

Bước 1: Tìm nghiệm (đồng thời) $y_k^i \in \mathcal{H}$ của phương trình

$$A_i(y_k^i) + \mu_k^i(y_k^i - x_k) + \varepsilon_k^i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.9)$$

trong đó $\mu_k^i \in (0, \bar{\mu})$, $\|\varepsilon_k^i\| \leq \sigma \max\{\|A_i(y_k^i)\|, \mu_k^i \|x_k - y_k^i\|\}$.

Bước 2: Xác định (đồng thời) các hình chiếu của x_k lên các nửa không gian

$$H_k^i = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - y_k^i, A_i(y_k^i) \rangle \leq 0\}$$

và tìm chỉ số tối ưu j_k ($1 \leq j_k \leq N$) sao cho

$$\|x_k - P_{H_k^{j_k}}(x_k)\| = \max_{i=1, \dots, N} \{\|x_k - P_{H_k^i}(x_k)\|\}.$$

Bước 3: Đặt

$$x_{k+1} = P_{H_k^{j_k} \cap W_k}(x_0), \quad (2.10)$$

trong đó $W_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - x_k, x_0 - x_k \rangle \leq 0\}$.

Nếu $x_{k+1} = x_k$ thì dừng quá trình lặp.

Bổ đề 2.3.1. Nếu Thuật toán 2.3.1 kết thúc tại bước lặp hữu hạn $k + 1$ thì x_k là một nghiệm của hệ (2.8).

Trong phần tiếp theo ta giả sử rằng Thuật toán 2.3.1 sinh ra dãy lặp vô hạn $\{x_k\}$. Tương tự trong phần 2.2, đặt

$$U(x_0) := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall z \in S, \langle z - x, x_0 - x \rangle \leq 0\}. \quad (2.11)$$

Rõ ràng $x_0 \in U(x_0)$.

Bổ đề 2.3.2. Giả sử tại bước lặp thứ k ta có $x_k \in U(x_0)$. Khi đó,

- (i) $S \subset (\bigcap_{i=1}^N H_k^i) \cap W_k \subset H_k^{j_k} \cap W_k$;
- (ii) x_{k+1} được xác định và $x_{k+1} \in U(x_0)$;
- (iii) $\|x_{k+1} - x_0\| \leq \|P_S(x_0) - x_0\|$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và do đó $\{x_k\}$ bị chặn.

Bổ đề 2.3.3. Giả sử Thuật toán 2.3.1 đúng đến $k + 1$. Khi đó ta có

$$\|x_{k+1} - x_0\|^2 \geq \|x_k - x_0\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2, \quad (2.12)$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \geq (1 - \sigma) \max_{i=1, \dots, N} \{\|y_k^i - x_k\|, \|A_i(y_k^i)\|/\mu_k^i\}. \quad (2.13)$$

Định lý 2.3.1. Giả sử $\{x_k\}$ là dãy vô hạn sinh bởi Thuật toán 2.3.1. Khi đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = P_S(x_0). \quad (2.14)$$

Chương 3

Phương pháp CQ

Như chúng ta đã biết nếu T là ánh xạ không giãn thì $I - T$ là toán tử đơn điệu (ngược đơn điệu mạnh). Vì vậy bài toán tìm điểm bất động của toán tử không giãn tương đương với bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu. Sử dụng phương pháp lai ghép chúng ta sẽ thu được các định lý hội tụ mạnh của ánh xạ không giãn (tương đối). Trong chương này chúng ta sẽ trình bày thuật toán hội tụ mạnh cho ánh xạ không gian tương đối và họ các ánh xạ không giãn (tương đối) trong không gian Banach và một cải biên cho không gian Hilbert.

3.1 Các bổ đề quan trọng

Cho E là không gian Banach thực với chuẩn $\|\cdot\|$ và E^* là không gian đối ngẫu của E . Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích đối ngẫu. Với mọi $f \in E^*$ và $x \in E$ ta có $\langle x, f \rangle = f(x)$. Gọi J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc từ E đến E^* được định nghĩa bởi

$$J(x) = \{f \in E^* \mid \langle x, f \rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

với mọi $x \in E$.

Hàm số $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2$$

với mọi $x, y \in E$. Từ định nghĩa dễ dàng suy ra

$$(\|y\| - \|x\|)^2 \leq \phi(y, x) \leq (\|y\| + \|x\|)^2. \quad (3.1)$$

Sau đây là các kết quả bổ trợ phục vụ cho việc chứng minh sự hội tụ của các thuật toán CQ .

Bổ đề 3.1.1. Cho E là không gian Banach trơn và lồi đều, $\{y_n\}, \{z_n\}$ là hai dãy của E . Nếu $\phi(y_n, z_n) \rightarrow 0$ và nếu $\{y_n\}$ hoặc $\{z_n\}$ bị chặn thì $y_n - z_n \rightarrow 0$.

Gọi C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Giả sử E là không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn. Khi đó, với mọi $x \in E$ tồn tại điểm $x^* \in C$ sao cho

$$\phi(x^*, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x).$$

Ánh xạ $P_C : E \rightarrow C$ định nghĩa bởi $P_C(x) = x^*$ được gọi là phép chiếu tổng quát.

Bổ đề 3.1.2. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach trơn E và $x \in E$. Khi đó $x^* = P_C(x)$ nếu và chỉ nếu

$$\langle x^* - y, Jx - Jx^* \rangle \geq 0$$

với mọi $y \in C$.

Bổ đề 3.1.3. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach phản xạ, lồi chặt và trơn E và cho $x \in E$. Khi đó

$$\phi(y, P_C(x)) + \phi(P_C(x), x) \leq \phi(y, x)$$

với mọi $y \in C$.

Bổ đề 3.1.4. Cho E là không gian Banach lồi chặt và trơn, C là tập con lồi đóng của E và T là ánh xạ không giãn tương đối từ C vào chính nó. Khi đó $F(T)$ lồi và đóng.

3.2 Một số thuật toán CQ trong không gian Banach

Cho E là không gian Banach trơn đều và lồi đều, C là tập con lồi đóng khác rỗng của E , T là ánh xạ không giãn tương đối từ C vào chính nó. Giả sử tập các điểm bất động $F(T)$ của T là khác rỗng.

Sử dụng phương pháp lai ghép ta thu được định lý hội tụ mạnh của ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Banach sau đây:

Định lý 3.2.1. ([7]) Cho $\{\alpha_k\}$ là dãy số thực sao cho $0 \leq \alpha_k < 1$ với mọi $k \geq 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k < 1$. Giả sử $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi thuật toán (CQ)

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_k = J^{-1}(\alpha_k Jx_k + (1 - \alpha_k)JT x_k), \\ C_k = \{z \in C \mid \phi(z, y_k) \leq \phi(z, x_k)\}, \\ Q_k = \{z \in C \mid \langle x_k - z, Jx_0 - Jx_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

trong đó J là ánh xạ đối ngẫu trên E . Khi đó $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới $P_{F(T)}(x_0)$, trong đó $P_{F(T)}$ là phép chiếu tổng quát từ C lên $F(T)$.

Cũng dựa trên ý tưởng của phương pháp lai ghép, năm 2007, Qin and Su [9] đã đề cập đến một thuật toán cho ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Banach như sau:

Định lý 3.2.2. Cho dãy $\{\alpha_k\} \in (0, 1)$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Giả sử $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi thuật toán sau

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_k = J^{-1}(\alpha_k Jx_0 + (1 - \alpha_k)JT x_k), \\ C_k = \{z \in C \mid \phi(z, y_k) \leq \alpha_k \phi(z, x_0) + (1 - \alpha_k) \phi(z, x_k)\}, \\ Q_k = \{z \in C \mid \langle Jx_0 - Jx_k, x_k - z \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Khi đó dãy $\{x_k\}$ hội tụ đến $P_{F(T)}(x_0)$.

Định lý 3.2.2 là trường hợp riêng của Định lý 3.2.3 về sự hội tụ của thuật toán CQ xoay vòng tìm điểm bất động của họ các ánh xạ không giãn tương đối sẽ được chứng minh dưới đây.

Cho $T_1, T_2, \dots, T_N$ là họ các ánh xạ không giãn tương đối từ C vào chính nó và $F(T_i)$ là tập các điểm bất động của T_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Đặt $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$. Giả sử $F \neq \emptyset$, ta có định lý sau đây

Định lý 3.2.3. ([6]) *Giả sử T_i liên tục đều với mọi $i = 1, 2, \dots, N$. Cho $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_k = J^{-1}(\alpha_k Jx_0 + (1 - \alpha_k)JT_{[k]}x_k), \quad T_{[k]} := T_{k(\text{mod } N)}, \\ C_k = \{z \in C \mid \phi(z, y_k) \leq \alpha_k \phi(z, x_0) + (1 - \alpha_k)\phi(z, x_k)\}, \\ Q_k = \{z \in C \mid \langle x_k - z, Jx_0 - Jx_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0). \end{cases}$$

Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy trong $(0, 1)$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Khi đó dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh đến $P_F(x_0)$.

Chú ý. Trường hợp $N = 1$, thuật toán lặp xoay vòng của Liu trùng với thuật toán của Qin-Su.

Rõ ràng, thuật toán CQ xoay vòng được thực hiện một cách tuần tự, do đó nếu N lớn thì chi phí tính toán sẽ rất lớn. Và thuật toán không hiệu quả trên bộ máy tính. Trong trường hợp N lớn, sử dụng bộ máy tính chúng ta có phương pháp CQ song song sau đây:

Định lý 3.2.4. ([2]) *Giả sử $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi thuật*

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_k^i = J^{-1}(\alpha_k Jx_0 + (1 - \alpha_k)JT_i x_k) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \\ i_k := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{\|y_k^i - x_k\|\}, \\ C_k = \{z \in C \mid \phi(z, y_k^{i_k}) \leq \alpha_k \phi(z, x_0) + (1 - \alpha_k)\phi(z, x_k)\}, \\ Q_k = \{z \in C \mid \langle x_k - z, Jx_0 - Jx_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0). \end{cases}$$

Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy trong khoảng $(0, 1)$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Khi đó dãy $\{x_k\}$ hoàn toàn xác định và x_k hội tụ mạnh đến $P_F(x_0) \in F$ khi $k \rightarrow \infty$.

Nhận xét. Trong thuật toán của Liu, tập C_k phải xây dựng cho mọi y_k . Trong thuật toán song song ta chỉ cần tìm tập C_k cho $y_k^{i_k}$ cách xa x_k nhất. Hơn nữa, việc tính y_k^i có thể thực hiện đồng thời trên N bộ xử lý.

3.3 Một số thuật toán CQ trong không gian Hilbert

Trong phần này chúng ta sẽ trình bày một số kết quả của phương pháp CQ khi áp dụng trong không gian Hilbert.

Cho C là một tập con lồi đóng và khác rỗng của không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Trong trường hợp này ta có

$$\phi(x, y) = \|x - y\|^2,$$

ánh xạ $J = I$ (ánh xạ đồng nhất) và phép chiếu tổng quát chính là phép chiếu trực giao. Hơn thế nữa, ta còn có

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(P_C(x) - x) - (P_C(y) - y)\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

Áp dụng Định lý 3.2.1 cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert chúng ta thu được kết quả hội tụ mạnh của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Định lý 3.3.1. *Cho T là một ánh xạ không giãn từ C vào chính nó và $F(T)$ khác rỗng. Giả sử rằng $\{x_n\}$ là dãy sinh bởi*

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ y_k = \alpha_k x_k + (1 - \alpha_k)Tx_k, \\ C_k = \{z \in C \mid \|z - y_k\| \leq \|z - x_k\|\}, \\ Q_k = \{z \in C \mid \langle x_k - z, x_0 - x_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0), k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

trong đó dãy $\{\alpha_k\} \subset [0, a)$ với $a \in [0, 1)$. Khi đó $\{x_k\}$ hội tụ mạnh đến $P_{F(T)}(x_0)$.

Cho $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$ là họ các ánh xạ không giãn từ C và chính nó và giả sử $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$ khác rỗng. Chúng ta xét một cải tiến của thuật toán CQ song song trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ mà trong đó các tập con C_n và Q_n là các nửa không gian của $\mathcal{H}$. Khi đó $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0)$ có thể tính được tường minh.

Thuật toán 3.3.1. ([2]) Cho $x_0 \in C$ là giá trị ban đầu bất kỳ và dãy $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$. Với $n = 0, 1, 2, \dots$

- *Đặt*

$$z_k = P_C x_k.$$

- *Tính*

$$y_k^i = \alpha_k x_0 + (1 - \alpha_k) T_i z_k, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

- *Tìm*

$$i_k := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{\|y_k^i - x_k\|\}.$$

- *Xác định*

$$C_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \|z - y_k^{i_k}\|^2 \leq \alpha_k \|z - x_0\|^2 + (1 - \alpha_k) \|z - x_k\|^2\},$$

$$Q_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle x_0 - x_k, x_k - z \rangle \geq 0\}.$$

- *Tính*

$$x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0).$$

Trong Thuật toán này chúng ta đã cải tiến để C_k và Q_k là các nửa không gian hoặc trùng với $\mathcal{H}$ vì vậy nên $x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0)$ có thể không thuộc C . Do đó để bước tính y_k^i có nghĩa thì bước đặt $z_k = P_C(x_k)$ là cần thiết. Trong trường hợp $C = \mathcal{H}$ thì $z_k = x_k$.

Vì C_k và Q_k là các nửa không gian nên nếu $C_k \cap Q_k$ khác rỗng thì chúng ta có một công thức hiển tính $P_{C_k \cap Q_k}(x_0)$ tương tự trong Thuật toán 2.2.1. Định lý sau đây cho chúng ta kết quả hội tụ của dãy $\{x_k\}$ trong Thuật toán 3.3.1

Định lý 3.3.2. *Giả sử $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi Thuật toán 3.3.1, T_i ($i = 1, 2, \dots, N$) liên tục và $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$. Khi đó x_k hội tụ mạnh đến $P_F(x_0)$ khi $k \rightarrow \infty$.*

Trong tài liệu [2], các tác giả đã thử nghiệm Thuật toán CQ xoay vòng của Liu và Thuật toán CQ song song để tìm điểm bất động của hai toán tử tích phân phi tuyến trong không gian Hilbert $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$.

Tính toán cho thấy, ngay ở chế độ tuần tự, tức là chỉ sử dụng một bộ xử lý thuật toán CQ song song cũng hiệu quả hơn thuật toán CQ xoay vòng. Còn ở chế độ chạy song song với hai bộ xử lý, để đạt cùng một độ chính xác thuật toán CQ song song tốn ít thời gian hơn hẳn thuật toán CQ xoay vòng.

Chương 4

Áp dụng

4.1 Bài toán khôi phục ảnh

Bài toán. *Tìm vector $x \in \mathcal{H}$, biết các hướng quan sát $v_i \in \mathcal{H}$ và hình chiếu*

$$\langle x, v_i \rangle = \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Gọi $P_i(x)$ là phép chiếu trực giao của x lên siêu phẳng

$$H_i = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \langle \xi, v_i \rangle = \mu_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ta có

$$P_i(x) = x - \frac{\langle x, v_i \rangle - \mu_i}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Do đó P_i là ánh xạ không giãn.

Đặt $A_i = I - P_i$, trong đó I là toán tử đồng nhất. Khi đó ta có A_i là toán tử ngược đơn điệu mạnh.

4.1.1 Phương pháp chiếu-điểm gần kề song song

Bài toán khôi phục ảnh phát biểu lại thành bài toán giải hệ phương trình với toán tử đơn điệu

$$A_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Áp dụng Thuật toán chiếu - điểm gần kề song song để giải hệ phương trình (4.1). Cho trước $x_0 \in \mathcal{H}$ và $\mu_k^i > 0$.

Bước 1. Giả sử tại bước lặp thứ $k \geq 0$ ta đã có x_k . Tìm $y_k^i \in \mathcal{H}$ thỏa mãn phương trình

$$A_i(y_k^i) + \mu_k^i(y_k^i - x_k) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

hay

$$\frac{\langle y_k^i, v_i \rangle - \mu_i}{\|v_i\|^2} v_i + \mu_k^i(y_k^i - x_k) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ta có

$$y_k^i = x_k - \frac{\langle x_k, v_i \rangle - \mu_i}{(1 + \mu_k^i)\|v_i\|^2} v_i.$$

Bước 2. Tìm chỉ số tối ưu i_k :

$$\begin{aligned} H_k^i &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z - y_k^i, A_i(y_k^i) \rangle \leq 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z - y_k^i, x_k - y_k^i \rangle \leq 0\}. \end{aligned}$$

Suy ra $P_{H_k^i}(x_k) = y_k^i$ và $\|x_k - P_{H_k^i}(x_k)\| = \frac{\langle x_k, v_i \rangle - \mu_i}{(1 + \mu_k^i)\|v_i\|}$ và vì vậy ta có

$$i_k = \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\langle x_k, v_i \rangle - \mu_i}{(1 + \mu_k^i)\|v_i\|} \right\}.$$

Bước 3. Tính x_{k+1} . Đặt

$$W_k = \{z \in \mathcal{H} \mid \langle z - x_k, x_0 - x_k \rangle \leq 0\}.$$

Ta có

$$P_{H_k^{i_k}}(x_0) = x_0 - \frac{(1 + \mu_k^{i_k})\langle v_{i_k}, x_0 \rangle - \mu_k^{i_k}\langle v_{i_k}, x_k \rangle - \mu_{i_k} v_{i_k}}{(1 + \mu_k^{i_k})\|v_{i_k}\|^2} v_{i_k}.$$

Nếu $P_{H_k^{i_k}}(x_0) \in W_k$, tức là

$$\|x_0 - x_k\|^2 \leq \frac{(1 + \mu_k^{i_k})\langle v_{i_k}, x_0 \rangle - \mu_k^{i_k}\langle v_{i_k}, x_k \rangle - \mu_{i_k}\langle v_{i_k}, x_0 - x_k \rangle}{(1 + \mu_k^{i_k})\|v_{i_k}\|^2}$$

thì

$$x_{k+1} = P_{H_k^{i_k}}(x_0).$$

Nếu không thì x_{k+1} được xác định như sau

$$x_{k+1} = P_{H_k^{i_k} \cap W_k}(x_0) = x_0 + \lambda_1 A_{i_k}(y_k^{i_k}) + \lambda_2(x_0 - x_k),$$

trong đó λ_1, λ_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda_1 \|A_{i_k}(y_k^{i_k})\|^2 + \lambda_2 \langle A_{i_k}(y_k^{i_k}), x_0 - x_k \rangle = -\langle x_0 - y_k^{i_k}, A_{i_k}(y_k^{i_k}) \rangle, \\ \lambda_1 \langle A_{i_k}(y_k^{i_k}), x_0 - x_k \rangle + \lambda_2 \|x_0 - x_k\|^2 = -\|x_0 - x_k\|^2. \end{cases}$$

4.1.2 Thử nghiệm số

Xét hệ phương trình $\langle x, v_i \rangle = \mu_i$, trong đó

$$\mathcal{H} = L^2[0, 1], \quad v_i = t^i, \quad \mu_i = \frac{1}{i+2} \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

và nghiệm chính xác của bài toán này là $x^*(t) = t$.

Tính toán thực hiện ở chế độ tuần tự với $x_0 = 10^4 \times t$ và $\mu_k^i = 1$ với mọi i, k , sai số ε_k được tính theo công thức

$$\varepsilon_k^2 = \|x_k - x^*\|^2 = \int_0^1 (x_k - t)^2 dt.$$

Bảng 4.1: Thuật toán chiếu-điểm gần kề song song

Số lần lặp (k)	1	10	30	40
Sai số (ε_k)	2.89×10^3	5.6376	5.36×10^{-6}	5.25×10^{-9}

4.2 Giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Xét hệ phương trình

$$Ax = b,$$

trong đó A là ma trận thực kích thước $m \times n$ và b là vectơ trong không gian $\mathbb{R}^m$.

Đặt $a_i^T = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ là vector hàng thứ i của ma trận A . Viết lại hệ phương trình trên dưới dạng

$$\begin{cases} a_i^T x = b_i & i = 1, \dots, m, \\ a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Gọi $P_i(x)$ là phép chiếu trực giao của x lên siêu phẳng

$$H_i = \{z \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T z = b_i\} \quad i = 1, \dots, m.$$

Ta có

$$P_i(x) = x - \frac{a_i^T x - b_i}{\|a_i\|^2} a_i.$$

Đặt $A_i = I - P_i$. Tương tự Bài toán khôi phục ảnh, ta có P_i là ánh xạ không giãn và A_i là toán tử ngược đơn điệu mạnh. Bài toán giải hệ phương trình (4.2) tương đương với bài toán giải hệ phương trình với toán tử đơn điệu

$$A_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

4.2.1 Phương pháp chiếu-điểm gần kề song song

Đây là Bài toán khôi phục ảnh với $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, $v_i = a_i$ và $\mu_i = b_i$. Áp dụng Thuật toán chiếu - điểm gần kề song song ta thu được thuật toán giải hệ phương trình (4.2) sau đây

Cho trước $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và $\mu_k^i > 0$ và tại lần lặp thứ $k \geq 0$ ta đã có x_k .

- Tính (đồng thời)

$$y_k^i = x_k - \frac{\langle x_k, a_i \rangle - b_i}{(1 + \mu_k^i) \|a_i\|^2} a_i \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

- Đặt

$$\sigma_k^i := \frac{\langle x_k, a_i \rangle - b_i}{(1 + \mu_k^i) \|a_i\|}.$$

Tìm

$$i_k = \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,n} \{\sigma_k^i\}.$$

- Tính

$$P_{H_k^{i_k}}(x_0) = x_0 - \frac{(1 + \mu_k^{i_k}) \langle a_{i_k}, x_0 \rangle - \mu_k^{i_k} \langle a_{i_k}, x_k \rangle - b_{i_k}}{(1 + \mu_k^{i_k}) \|a_{i_k}\|^2} a_{i_k}.$$

Nếu

$$\|x_0 - x_k\|^2 \leq \frac{(1 + \mu_k^{i_k}) \langle a_{i_k}, x_0 \rangle - \mu_k^{i_k} \langle a_{i_k}, x_k \rangle - b_{i_k}}{(1 + \mu_k^{i_k}) \|a_{i_k}\|^2} \langle a_{i_k}, x_0 - x_k \rangle$$

thì

$$x_{k+1} = P_{H_k^{i_k}}(x_0).$$

Nếu không thì tìm λ_1 và λ_2 thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda_1 \|A_{i_k}(y_k^{i_k})\|^2 + \lambda_2 \langle A_{i_k}(y_k^{i_k}), x_0 - x_k \rangle = -\langle x_0 - y_k^{i_k}, A_{i_k}(y_k^{i_k}) \rangle, \\ \lambda_1 \langle A_{i_k}(y_k^{i_k}), x_0 - x_k \rangle + \lambda_2 \|x_0 - x_k\|^2 = -\|x_0 - x_k\|^2. \end{cases}$$

và tính

$$x_{k+1} = x_0 + \lambda_1 A_{i_k}(y_k^{i_k}) + \lambda_2(x_0 - x_k).$$

Ý nghĩa hình học

- Ta có

$$\begin{aligned} A_i(y_k^i) + \mu_k^i(y_k^i - x_k) &= 0 \\ \Leftrightarrow y_k^i - P_i(y_k^i) + \mu_k^i(y_k^i - x_k) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + \mu_k^i)y_k^i &= P_i(y_k^i) + \mu_k^i x_k \\ \Leftrightarrow y_k^i &= \frac{1}{1 + \mu_k^i} P_i(y_k^i) + \frac{\mu_k^i}{1 + \mu_k^i} x_k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Do $\mu_k^i > 0$ nên phương trình (4.4) cho thấy rằng y_k^i nằm trong đoạn thẳng $[x_k, P_i(y_k^i)]$. Hơn nữa, từ (4.4) và (4.3) ta thu được

$$P_i(y_k^i) = P_i(x_k).$$

Như vậy, các điểm y_k^i nằm trong đoạn thẳng $[x_k, P_i(x_k)]$.

- Xét các siêu phẳng

$$\begin{aligned} H_k'^i &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z - y_k^i, x_k - y_k^i \rangle = 0\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, a_i \rangle = \frac{(1 + \mu_k^i) \|a_i\|^2}{\langle x_k, a_i \rangle - \mu_k^i} \langle y_k^i, x_k - y_k^i \rangle \right\}. \end{aligned}$$

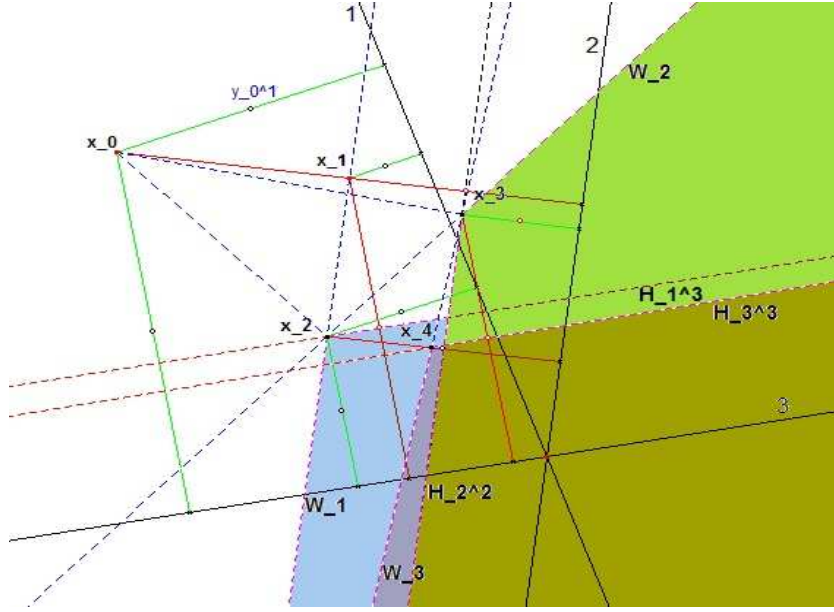
Điều này cho thấy $H_k'^i$ song song với H_i .

- Xét các siêu phẳng

$$\begin{aligned} W_k' &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z - x_k, x_0 - x_k \rangle = 0\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x_0 - x_k \rangle = \langle x_k, x_0 - x_k \rangle\}. \end{aligned}$$

Vậy W_k' là siêu phẳng đi qua điểm x_k và vuông góc với vector $x_0 - x_k$.

- Minh họa hình học trong trường hợp $n = 2, m = 3$ và $\mu_k^i = 1$ với mọi k, i và giả sử hệ phương trình có nghiệm. Trong trường hợp này, H_i là các đường thẳng và với $\mu_k^i = 1$ thì y_k^i là trung điểm của đoạn thẳng $[x_k, P_i(x_k)]$ (với mọi k, i).



Hình 4.1: Minh họa hình học thuật toán chiếu-điểm gần kề song song

4.2.2 Phương pháp CQ song song

Áp dụng Thuật toán CQ song song giải hệ phương trình (4.2) như sau

Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và dãy $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$. Giả sử tại lần lặp thứ $k \geq 0$ ta đã có x_k .

- Tính (đồng thời)

$$y_k^i = \alpha_k x_0 + (1 - \alpha_k) \left(x_k - \frac{a_i^T x_k - b_i}{\|a_i\|^2} a_i \right).$$

- Tìm

$$i_k = \operatorname{argmax}\{\|y_k^i - x_k\|\}.$$

- Tìm x_{k+1} :

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k & \text{nếu } x_k \in C_k, \\ P_{C_k}(x_0) & \text{nếu } P_{C_k}(x_0) \in Q_k, \\ x_0 + \lambda_1(x_k - P_{i_k}(x_k)) + \lambda_2(x_0 - x_k) & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

trong đó λ_1, λ_2 là nghiệm của hệ phương trình (4.3) và

$$P_{C_k}(x_0) = x_0 - \frac{\langle x_0, x_k - P_{i_k}(x_k) \rangle - \mu_k}{\|x_k - P_{i_k}(x_k)\|^2} (x_k - P_{i_k}(x_k)).$$

Kết luận

Luận văn đã trình bày lại một cách hệ thống các thuật toán hội tụ mạnh giải phương trình, hệ phương trình toán tử đơn điệu và tìm điểm bất động của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Hilbert dựa trên phương pháp lai ghép giữa thuật toán điểm gần kề với phép chiếu lên giao của các tập lồi hoặc các nửa không gian.

Luận văn đã đề cập đến các vấn đề sau:

1. Hệ thống lại một số phương pháp điểm gần kề và các cải biên của nó trong không gian Hilbert. Khái niệm nghiệm gần đúng với sai số cho phép và một số tính chất quan trọng;
2. Trình bày thuật toán chiếu-điểm gần kề để tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại và định lý hội tụ mạnh đến một điểm trong tập các không điểm;
3. Trình bày các thuật toán song song chiếu-điểm gần kề và CQ tương ứng để giải hệ phương trình với toán tử đơn điệu và tìm điểm bất động của họ các ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Hilbert và Banach;
4. Trình bày các định lý hội tụ mạnh cho các toán tử không gian tương đối trong không gian Banach và định lý hội tụ mạnh của phương pháp CQ xoay vòng và CQ song song cho họ hữu hạn các ánh xạ không giãn tương đối trong không gian Banach;
5. Áp dụng thuật toán chiếu-điểm gần kề song song cho bài toán khôi phục ảnh trong không gian Hilbert và một ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của thuật toán này;
6. Áp dụng thuật toán chiếu-điểm gần kề song song và phương pháp CQ song song để giải hệ phương trình với số ẩn và số phương trình không nhất thiết bằng nhau. Minh họa hình học cho thuật toán chiếu-điểm gần kề song song trong $\mathbb{R}^2$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền (2009), *Nhập môn giải tích lồi ứng dụng*, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.
- [2] P. K. Anh and C. V. Chung (2011), A parallel CQ method for a finite family of relatively nonexpansive mappings (Submitted for publication).
- [3] P. K. Anh and C. V. Chung (2011), On strongly convergent parallel proximal point algorithms, *Journal of Science, VNU*, 27(2).
- [4] O. Guler (1991), On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization, *SIAM J. Optim.*, 2, 649-664.
- [5] S. Kamimura and W. Takahashi (2002), Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space, *SIAM J. Optim.*, 13, 938-945.
- [6] X. F. Liu (2011), Strong convergence theorems for a finite family of relatively nonexpansive mappings, *Vietnam. J. Math.*, 39, 63-69.
- [7] S. Matsushita and W. Takahashi (2005), A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space, *J. Approx. Theory*, 134, 257-266.
- [8] R. T. Rockafellar (1976), Monotone operators and proximal point algorithm, *SIAM J. Contr. Optim.*, 14, 877-897.
- [9] X. L. Qin and Y. F. Su (2007), Strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space, *Nonlinear Anal.*, 67, 1958-1965.
- [10] M. V. Solodov and B. F. Svaiter (1999), A hybrid projection-proximal point algorithm, *J. Conv. Anal.*, 6, 59-70.

- [11] M. V. Solodov and B. F. Svaiter (2000), Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space, *Math. Program., Ser. A*, 87, 189-202.