

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

VŨ THỊ BÍCH HẢO

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐỘNG LỰC
TUYẾN TÍNH
TRÊN THANG THỜI GIAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2011

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

VŨ THỊ BÍCH HẢO

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ ĐỘNG LỰC
TUYẾN TÍNH
TRÊN THANG THỜI GIAN

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TS. NGUYỄN HỮU DƯ

HÀ NỘI - 2011

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU	5
1 Kiến thức chuẩn bị	7
1.1 Một số khái niệm cơ bản	7
1.2 Tính khả vi	8
1.3 Tích phân	8
1.4 Mặt phẳng phức Hilger	11
1.5 Hàm mũ thang thời gian	12
1.6 Bất đẳng thức Gronwall	14
2 Sự ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian	15
2.1 Khái niệm về ổn định	15
2.1.1 Các định nghĩa về ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian	15
2.1.2 Các định lý về ổn định	16
2.2 Phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian	17
2.2.1 Khái niệm hàm Lyapunov toàn phương trên thang thời gian	17
2.2.2 Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định đều	18
2.2.3 Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định mũ đều	18
2.2.4 Việc tìm ma trận $Q(t)$	18

2.2.5	Tiêu chuẩn không ổn định	19
3	Áp dụng phương pháp hàm Lyapunov cho một số hệ tuyến tính đặc biệt	20
3.1	Hệ biến thiên chậm	20
3.1.1	Tích Kronecker	20
3.1.2	Tính ổn định mũ của hệ biến thiên chậm	21
3.2	Hệ phương trình có nhiều	21
	KẾT LUẬN	21
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	23

Lời nói đầu

Lý thuyết về thang thời gian (time scale), lần đầu tiên được trình bày bởi Stefan Hilger trong luận án tiến sĩ của ông vào năm 1988 [9] (với sự hướng dẫn của Bernd Aulbach) nhằm thống nhất việc trình bày giải tích liên tục và rời rạc.

Việc phát triển lý thuyết về phương trình động lực trên thang thời gian, dẫn đến các kết quả tổng quát và khi đó có thể áp dụng cho các thang thời gian hỗn hợp của các trường hợp liên tục và rời rạc.

Trong luận văn này sẽ sử dụng phương pháp thứ hai của Lyapunov - phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian, đây chính là nội dung của một bài báo của Jeffrey J. DaCunha [11].

Nội dung của luận văn được chia làm 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này, chúng tôi chỉ liệt kê mà không chứng minh các tính chất cơ bản nhất về Δ -đạo hàm, tích phân,... trên thang thời gian. Việc chứng minh chi tiết có thể tìm thấy trong [1, 2, 5].

Chương 2: Sự ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian.

Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra các định nghĩa và tính chất về tính ổn định đều, ổn định mũ đều, ổn định tiệm cận đều của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian. Đặc biệt, trong chương này có nêu ra phương pháp hàm Lyapunov trên thang thời gian và dùng nó để xét tính ổn định và không ổn định của phương trình động lực tuyến tính.

Chương 3: Áp dụng phương pháp hàm Lyapunov cho một số hệ phương trình tuyến tính đặc biệt.

Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra hai hệ phương trình tuyến tính đặc biệt là hệ biến thiên chậm và hệ có nhiễu và dùng phương pháp hàm Lyapunov để xét tính ổn định của chúng.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Thang thời gian (time scale) là một tập con đóng tùy ý khác rỗng của tập các số thực $\mathbb{R}$, ký hiệu là $\mathbb{T}$. Ta giả sử xuyên suốt rằng thang thời gian $\mathbb{T}$ có một tôpô mà nó được cảm sinh từ tôpô trên tập các số thực $\mathbb{R}$ với tôpô tiêu chuẩn.

Thí dụ:

(a) $\mathbb{R}; \mathbb{Z}; [0; 1] \cup [2; 3]$ là những thang thời gian.

(b) $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ không là thang thời gian vì không đóng.

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathbb{T}$ là một thang thời gian, với mỗi $t \in \mathbb{T}$, ta có các định nghĩa sau:

(i) *Toán tử nhảy tiến (forward jump):* $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\}.$$

(ii) *Toán tử nhảy lùi (backward jump):* $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}, s < t\}.$$

Ngoài ra,

- Một điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *điểm cô lập phải* (right-scattered) nếu $\sigma(t) > t$; *điểm cô lập trái* (left-scattered) nếu $\rho(t) < t$; *điểm cô lập* (isolated) nếu t vừa là điểm cô lập trái, vừa là điểm cô lập phải; *điểm trù mật phải* (right-dense) nếu $t < \sup \mathbb{T}$ và $\sigma(t) = t$; *điểm trù mật*

trái (left-dense) nếu $t > \inf \mathbb{T}$ và $\rho(t) = t$; *điểm trừ mật* (dense) nếu t vừa là điểm trừ mật phải vừa là điểm trừ mật trái.

- *Hàm hạt* (graininess): $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0; +\infty)$, $\mu(t) := \sigma(t) - t$.
- Tập $\mathbb{T}^k$ được xác định như sau: Nếu $\mathbb{T}$ có phần tử lớn nhất M là điểm cô lập trái thì ta đặt $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} \setminus \{M\}$, và $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$ trong các trường hợp còn lại.

Để cho đơn giản, ngoại trừ những trường hợp cần nhấn mạnh, từ đây trở đi ta viết $(a; b]$; $[a; b)$; $[a; b]$ thay cho $(a; b]_{\mathbb{T}}$; $[a; b)_{\mathbb{T}}$; $[a; b]_{\mathbb{T}}$.

Quy ước:

$$\begin{aligned} \inf \emptyset &= \sup \mathbb{T} \text{ (nghĩa là, nếu } t = \max \mathbb{T} \text{ thì } \sigma(t) = t), \\ \sup \emptyset &= \inf \mathbb{T} \text{ (nghĩa là, nếu } t = \min \mathbb{T} \text{ thì } \rho(t) = t). \end{aligned}$$

1.2 Tính khả vi

Định nghĩa 1.2. Xét hàm số $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Δ - đạo hàm (còn gọi là đạo hàm Hilger) của f tại $t \in \mathbb{T}^k$ là một số (nếu nó tồn tại), ký hiệu $f^\Delta(t)$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại lân cận U của t sao cho

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

với mọi $s \in U$.

Hàm f được gọi là Δ - khả vi (nói ngắn gọn là khả vi) trên $\mathbb{T}^k$ nếu $f^\Delta(t)$ tồn tại với mọi $t \in \mathbb{T}^k$.

Sau đây ta ký hiệu:

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta} &= (f^\Delta)^\Delta; f^{\Delta^3} = (f^{\Delta\Delta})^\Delta; \dots; f^{\Delta^n} = (f^{\Delta^{n-1}})^\Delta. \\ f^\sigma(t) &= f(\sigma(t)); f^{\sigma^2} = (f^\sigma)^\sigma; \dots; f^{\sigma^n} = (f^{\sigma^{n-1}})^\sigma. \end{aligned}$$

1.3 Tích phân

Định nghĩa 1.3. Với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$,

- Hàm $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ được gọi là hồi quy (regressive) nếu $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}^k$. Ta ký hiệu,

$$\mathcal{R} = \{p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K} : 1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{T}^k\},$$

$$\mathcal{R}^+ = \{p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0 \forall t \in \mathbb{T}^k\}.$$

- Hàm $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}$ là hồi quy đều trên $\mathbb{T}$ nếu tồn tại hằng số dương δ sao cho:

$$0 < \delta^{-1} \leq |1 + \mu(t)p(t)|, \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

- Hàm ma trận $A(\cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ gọi là hồi quy nếu ma trận $I + \mu(t)A(t)$ là khả nghịch với mọi $t \in \mathbb{T}$, với I là ma trận đơn vị trong $\mathbb{K}^{n \times n}$.

Định nghĩa 1.4. 1. Một hàm $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là chính quy (regulated) nếu tồn tại giới hạn bên phải (hữu hạn) tại tất cả các điểm trù mật phải trong $\mathbb{T}$ và tồn tại giới hạn bên trái (hữu hạn) tại tất cả các điểm trù mật trái trong $\mathbb{T}$.

2. Một hàm $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là rd-liên tục (right-dense continuous) nếu nó liên tục tại các điểm trù mật phải và giới hạn bên trái là tồn tại (hữu hạn) tại các điểm trù mật trái trong $\mathbb{T}$.

3. Cho X là một không gian Banach, ánh xạ

$$f : \mathbb{T}^k \times X \rightarrow X$$

$$(t, x) \mapsto f(t, x)$$

gọi là rd-liên tục nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) f liên tục tại mỗi điểm (t, x) với t là trù mật phải hay $t = \max \mathbb{T}$,
- (ii) Các giới hạn $f(t^-, x) := \lim_{(s,y) \rightarrow (t,x), s < t} f(s, y)$ và $\lim_{y \rightarrow \infty} f(t, y)$ tồn tại tại mỗi điểm (t, x) với t là trù mật trái.

Ta ký hiệu:

$$C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ là rd-liên tục}\},$$

$$C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{K}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ là khả vi và } f^\Delta \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K})\}.$$

Định lý 1.1. Tập hợp $C_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ tất cả các hàm rd-liên tục và hồi quy trên $\mathbb{T}$ cùng với phép toán $\oplus$ xác định bởi $p \oplus q := p + q + \mu pq$ lập thành một nhóm Abel.

Phần tử khả nghịch của phần tử q của nhóm này là $\ominus q = \frac{-q}{1+\mu q}$.

Định nghĩa 1.5. Hàm liên tục $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là tiền khả vi với miền khả vi D nếu các điều kiện sau đồng thời thoả mãn:

- $D \subset \mathbb{T}^k$,
- $\mathbb{T}^k \setminus D$ là không quá đếm được và không chứa điểm cô lập phải nào của $\mathbb{T}$,
- f khả vi tại mỗi $t \in D$.

Định lý 1.2. (Sự tồn tại tiền nguyên hàm) Cho f là một hàm chính quy. Khi đó tồn tại một hàm tiền khả vi F với miền khả vi D sao cho $F^\Delta(t) = f(t)$ với mọi $t \in D$.

Định nghĩa 1.6. Ta gọi hàm F trong Định lý 1.2 là một tiền nguyên hàm của f .

Tích phân bất định của một hàm chính quy f là

$$\int f(t)\Delta(t) := F(t) + C,$$

ở đây C là một hằng số tùy ý và F là một tiền nguyên hàm của f .

Tích phân xác định của một hàm chính quy f là

$$\int_r^s f(t)\Delta t := F(s) - F(r), \quad (r, s \in \mathbb{T}).$$

Một hàm $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là một nguyên hàm của $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ nếu

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

với mọi $t \in \mathbb{T}^k$.

Định lý 1.3. (Sự tồn tại của nguyên hàm)

(i) Mọi hàm rd-liên tục đều có nguyên hàm.

Nếu $t_0 \in \mathbb{T}$ thì $F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau, t \in \mathbb{T}$ là một nguyên hàm của f .

(ii) Nếu $f \in C_{rd}$ và $t \in \mathbb{T}^k$ thì $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = f(t)\mu(t)$.

(iii) Giả sử $a, b \in \mathbb{T}$ và $f \in C_{rd}$ ta có

(a) Nếu $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ thì $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$ (tích phân Riemann thông thường).

(b) Nếu $[a; b]$ chỉ gồm những điểm rời rạc thì

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a; b)} f(t) \mu(t) & \text{nếu } a > b, \\ 0 & \text{nếu } a = b, \\ - \sum_{t \in [a; b)} f(t) \mu(t) & \text{nếu } a < b. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.7. Cho $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ và f là rd-liên tục trên $[a; \infty)$. Tích phân suy rộng của hàm f liên tục trên $[a; \infty)$ được định nghĩa như sau

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t.$$

Với mỗi thang thời gian $\mathbb{T}$ tùy ý thì tập $\{t \in \mathbb{T}, t \text{ là điểm cô lập phải}\}$ là không quá đếm được (kết quả này được chứng minh trong [2]). Với $a, b \in \mathbb{T}$, $a < b$, ta ký hiệu:

$$I_{a,b} := \{i, t_i \in [a; b) \text{ và là điểm cô lập phải}\}.$$

1.4 Mặt phẳng phức Hilger

Định nghĩa 1.8. Cho $h > 0$, khi đó ta định nghĩa:

1. Tập các số phức Hilger (Hilger complex numbers):

$$\mathbb{C}_h := \{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{-1}{h}\}.$$

2. Trục thực Hilger (Hilger real axis):

$$\mathbb{R}_h := \{z \in \mathbb{R} : z > \frac{-1}{h}\}.$$

3. Trục luân phiên Hilger (Hilger alternating axis):

$$\mathbb{A}_h := \{z \in \mathbb{R} : z < \frac{-1}{h}\}.$$

4. Đường tròn ảo Hilger (Hilger imaginary circle):

$$\mathbb{I}_h := \{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{1}{h}| = \frac{1}{h}\}.$$

5. Phần thực Hilger của z : $\text{Re}_h(z) := \frac{|zh + 1| - 1}{h}, (z \in \mathbb{C}_h).$

6. Quy ước: $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}, \mathbb{R}_0 := \mathbb{R}, \mathbb{A}_0 := \emptyset, \mathbb{I}_0 := i\mathbb{R}, \text{Re}_0(z) := \text{Re}(z).$

7. Phần ảo Hilger của z : $\text{Im}_h(z) := \frac{\text{Arg}(zh + 1)}{h}, z \in \mathbb{C}_h.$

ở đó $\text{Arg}(z)$ là góc giá trị chính của z (tức là, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$).

8. Ta định nghĩa dải (strip) $\mathbb{Z}_h := \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{h} < \text{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\}$ khi $h > 0$ và $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{C}$ khi $h = 0$.

Định nghĩa 1.9. Phép biến đổi trụ (cylinder transformation):

$\xi : \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ xác định bởi:

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} \text{Ln}(1 + zh), \quad h > 0. \quad (1.4.1)$$

Khi $h = 0$, ta định nghĩa $\xi_0(z) = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Khi đó, phép biến đổi trụ ngược (inverse cylinder transformation) cho bởi: $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \rightarrow \mathbb{C}_h$ được xác định như sau:

$$\xi_h^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{e^{zh} - 1}{h} & \text{nếu } h > 0, \\ z & \text{nếu } h = 0. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

1.5 Hàm mũ thang thời gian

Định lý 1.4. Nếu p là rd-liên tục và hồi quy thì phương trình

$$x^\Delta = p(t)x \quad (1.5.1)$$

với điều kiện ban đầu $x(t_0) = 1$ có nghiệm duy nhất.

Khi đó, ta gọi nghiệm của (1.5.1) là hàm mũ $e_p(\cdot, t_0)$. Sử dụng phép biến đổi trụ ở trên, ta có

$$e_p(t, s) = \exp \left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau \right), \quad \forall t, s \in \mathbb{T}.$$

Định nghĩa 1.10. Nếu $p \in \mathcal{R}$ và $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ là rd-liên tục, thì phương trình động lực

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t) + f(t), \quad (1.5.2)$$

được gọi là hồi quy.

Định lý 1.5. (Công thức biến thiên hằng số) Cho $t_0 \in \mathbb{T}$ và $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó hệ hồi quy (1.5.2) có nghiệm duy nhất $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$y(t) = y_0 e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau.$$

Chú ý:

1. Cho $A(\cdot)$ là một $n \times n$ -ma trận, phương trình

$$y^\Delta(t) = A(t)y(t) + f(t) \quad (1.5.3)$$

gọi là hồi quy nếu $A(\cdot)$ là hồi quy và hàm $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm rd-liên tục.

2. Cho $t_0 \in \mathbb{T}$ và giả sử $A(\cdot)$ là hồi quy. Khi đó phương trình ma trận

$$Y^\Delta(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I \quad (1.5.4)$$

có nghiệm duy nhất xác định trên $\mathbb{T}$, gọi là *ma trận chuyển* (transition matrix) và được ký hiệu là $\Phi_A(t, t_0)$.

3. Khi $A(t) \equiv A$ là ma trận hằng thì thay vì viết $\Phi_A(t, t_0)$ ta viết $e_A(t, t_0)$ (hàm mũ ma trận).

Định lý 1.6. (Công thức biến thiên hằng số) Cho $t_0 \in \mathbb{T}$, khi đó hệ hồi quy (1.5.3) với điều kiện ban đầu $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ có nghiệm duy nhất $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ được cho bởi

$$y(t) = \Phi_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau. \quad (1.5.5)$$

1.6 Bất đẳng thức Gronwall

Định lý 1.7. (Bất đẳng thức Gronwall) Cho $u, a, b \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), b(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}$. Khi đó, nếu

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\Delta s \quad \text{với mọi } t \geq t_0 (t, t_0 \in \mathbb{T}),$$

thì

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)e_b(t, \sigma(s))\Delta s \quad \text{với mọi } t \geq t_0.$$

Hệ quả 1.0.1. 1. Khi $b(t) \equiv L \geq 0$ và nếu $u(t) \leq a(t) + L \int_{t_0}^t u(s)\Delta s$ với mọi $t \geq t_0$ thì $u(t) \leq a(t) + L \int_{t_0}^t e_L(t, \sigma(s))a(s)\Delta s$ với mọi $t \geq t_0$.

2. Với $u, b \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), b(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}$. Khi đó, nếu

$$u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\Delta s \quad \text{với mọi } t \geq t_0,$$

thì

$$u(t) \leq u_0 e_b(t, t_0) \quad \text{với mọi } t \geq t_0.$$

3. Với $u, b \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}), b(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}$ và $a \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Khi đó, nếu

$$u(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\Delta s \quad \text{với mọi } t \geq t_0,$$

thì

$$u(t) \leq a(t_0)e_b(t, t_0) + \int_{t_0}^t a^\Delta(s)e_b(t, \sigma(s))\Delta s \quad \text{với mọi } t \geq t_0.$$

Chương 2

Sự ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian

2.1 Khái niệm về ổn định

2.1.1 Các định nghĩa về ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian

Đầu tiên, ta nhắc lại các khái niệm sau

- Chuẩn Euclid của $n \times 1$ -véc tơ $x(t)$ được xác định bởi:

$$\|x(t)\| = \sqrt{x^T(t)x(t)}.$$

- Chuẩn cảm sinh của một $m \times n$ -ma trận A được xác định bởi:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left[\max_{\|x\|=1} x^T A^T A x \right]^{\frac{1}{2}},$$

gọi là chuẩn phổ của $m \times n$ -ma trận A . Chuẩn này sẽ được sử dụng trong phần tiếp theo và được ký hiệu là $\|\cdot\|$.

- Một ma trận đối xứng M được gọi là nửa xác định dương nếu với mọi véc tơ x ta có $x^T M x \geq 0$; và nó được gọi là xác định dương nếu $x^T M x > 0$ với mọi x , và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$. M được gọi là nửa xác định âm (xác định âm) nếu $-M$ là nửa xác định dương (xác định dương).

Bây giờ ta định nghĩa các khái niệm ổn định đều và ổn định mũ đều. Hai khái niệm này liên quan đến tính bị chặn của nghiệm của hệ phương

tuyến tính hồi quy với ma trận hệ số biến thiên theo thời gian

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{T}. \quad (2.1.1)$$

Giả sử với mỗi $t_0 \in \mathbb{T}$, bài toán giá trị ban đầu (2.1.1) có nghiệm duy nhất $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ với $t \geq t_0$. Khi đó, ta có các định nghĩa:

Định nghĩa 2.1. *Hệ phương trình động lực tuyến tính (2.1.1) được gọi là ổn định nếu với mỗi $t_0 \in \mathbb{T}$, tồn tại hằng số $\gamma = \gamma(t_0)$, nghiệm của nó thoả mãn*

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0. \quad (2.1.2)$$

Nếu γ không phụ thuộc vào t_0 thì (2.1.1) được gọi là ổn định đều.

Định nghĩa 2.2. *Phương trình động lực tuyến tính (2.1.1) được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại hằng số $\gamma = \gamma(t_0)$, $\lambda > 0$ với $-\lambda \in \mathcal{R}^+$ sao cho với t_0 và $x(t_0)$ bất kỳ, nghiệm tương ứng $x(t)$ thoả mãn*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \gamma e_{-\lambda}(t, t_0), \quad t \geq t_0. \quad (2.1.3)$$

Nếu γ không phụ thuộc vào t_0 thì (2.1.1) được gọi là ổn định mũ đều.

Định nghĩa 2.3. *Phương trình động lực tuyến tính (2.1.1) được gọi là ổn định tiệm cận đều nếu nó ổn định đều và với $\delta > 0$ bất kỳ, tồn tại số $T > 0$ sao cho với t_0 với $x(t_0)$ bất kỳ, nghiệm tương ứng thoả mãn*

$$\|x(t)\| \leq \delta \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0 + T. \quad (2.1.4)$$

2.1.2 Các định lý về ổn định

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu các đặc trưng của tính ổn định đều và ổn định mũ đều của hệ (2.1.1) thông qua ma trận chuyển. Đặc biệt, Định lý 2.3 cho ta mối quan hệ giữa sự ổn định tiệm cận đều và ổn định mũ đều.

Định lý 2.1. *Phương trình (2.1.1) ổn định đều nếu và chỉ nếu tồn tại số $\gamma > 0$ sao cho*

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma,$$

với mọi $t, t_0 \in \mathbb{T}$ và $t \geq t_0$.

Định lý 2.2. *Giả sử tồn tại hằng số α sao cho với mọi $t \in \mathbb{T}$, $\|A(t)\| \leq \alpha$. Khi đó, phương trình tuyến tính (2.1.1) ổn định mũ đều khi và chỉ khi tồn tại hằng số β sao cho*

$$\int_{\tau}^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \Delta s \leq \beta, \quad (2.1.5)$$

với mọi $t, \tau \in \mathbb{T}$, $t \geq \sigma(\tau)$.

Định lý 2.3. *Phương trình tuyến tính (2.1.1) ổn định mũ đều khi và chỉ khi nó ổn định tiệm cận đều.*

2.2 Phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu tính ổn định của hệ động lực tuyến tính hồi quy có hệ số biến thiên theo thời gian

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{T}, \quad (2.2.1)$$

thông qua các hàm Lyapunov toàn phương trên thang thời gian (sẽ được định nghĩa ở dưới đây).

2.2.1 Khái niệm hàm Lyapunov toàn phương trên thang thời gian

Định nghĩa 2.4. *Cho $Q(t)$ là ma trận đối xứng sao cho $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Một hàm Lyapunov toàn phương trên thang thời gian được cho bởi:*

$$V(t, x) = x^T(t)Q(t)x(t), \quad t \geq t_0. \quad (2.2.2)$$

Ta tính Δ - đạo hàm của hàm $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V^\Delta(t, x) &= x^T(t)[A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^\Delta(t)Q(t)A(t) \\ &\quad + (I + \mu(t)A^T(t))Q^\Delta(t)(I + \mu(t)A(t))]x(t). \end{aligned}$$

Giả sử M là ma trận đối xứng, xác định dương. Xét phương trình ma trận

$$\begin{aligned} A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) \\ + (I + \mu(t)A^T(t))Q^\Delta(t)(I + \mu(t)A(t)) = -M. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Đây là phương trình hợp nhất hai trường hợp: phương trình vi phân ma trận khi thời gian liên tục ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) và phương trình sai phân (hồi quy) khi thời gian rời rạc ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}$).

2.2.2 Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định đều

Định lý 2.4. *Hệ động lực tuyến tính trên thang thời gian (2.2.1) ổn định đều nếu với mọi $t \in \mathbb{T}$, tồn tại ma trận đối xứng $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ sao cho*

$$(i) \quad \eta I \leq Q(t) \leq \rho I,$$

$$(ii) \quad A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq 0, \\ \text{ở đó } \eta, \rho \in \mathbb{R}^+.$$

2.2.3 Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov xét tính ổn định mũ đều

Định lý 2.5. *Hệ động lực tuyến tính trên thang thời gian (2.2.1) ổn định mũ đều nếu với mọi $t \in \mathbb{T}$, tồn tại ma trận đối xứng $Q(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ sao cho*

$$(i) \quad \eta I \leq Q(t) \leq \rho I.$$

$$(ii) \quad A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq \\ -\nu I, \text{ ở đó } \eta, \rho, \nu \in \mathbb{R}^+ \text{ và } \frac{-\nu}{\rho} \in \mathcal{R}^+.$$

2.2.4 Việc tìm ma trận $Q(t)$

Ma trận Q được tìm từ phương trình

$$A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)A^T(t)Q(t)A(t) = -M. \quad (2.2.4)$$

Việc chứng minh phương trình này có nghiệm và giải nó (nếu tồn tại) là công việc khó khăn. Tuy nhiên ta có

Chú ý rằng đường tròn Hilger được xác định như sau:

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{\mu(t)} + \lambda(t) \right| < \frac{1}{\mu(t)} \right\},$$

ta có định lý:

Định lý 2.6. Nếu $A(t)$ là $n \times n$ -ma trận có tất cả các giá trị riêng nằm trong đường tròn Hilger tương ứng với mỗi $t \geq t_0$ thì với mỗi $t \in \mathbb{T}$, tồn tại thang thời gian $\mathbb{S}$ sao cho khi lấy tích phân trên $I = [0; \infty]_{\mathbb{S}}$ ta có nghiệm duy nhất của (2.2.4) là

$$Q(t) = \int_I e_{A^T(t)}(s, 0) M e_{A(t)}(s, 0) \Delta s. \quad (2.2.5)$$

Hơn nữa, nếu M là xác định dương thì $Q(t)$ là xác định dương với mọi $t \geq t_0$.

2.2.5 Tiêu chuẩn không ổn định

Định lý 2.7. Giả sử tồn tại $n \times n$ -ma trận đối xứng $Q(t) \in C_{rd}^1$ với mọi $t \in \mathbb{T}$ và thoả mãn hai tính chất sau:

- (i) $\|Q(t)\| \leq \rho$,
- (ii) $A^T(t)Q(t) + (I + \mu(t)A^T(t))(Q^\Delta(t) + Q(t)A(t) + \mu(t)Q^\Delta(t)A(t)) \leq -\nu I$, ở đó $\rho, \nu > 0$ và giả sử tồn tại $t_a \in \mathbb{T}$ sao cho $Q(t_a)$ không là nửa xác định dương.

Khi đó, hệ (2.2.1) không là ổn định đều.

Chương 3

Áp dụng phương pháp hàm Lyapunov cho một số hệ tuyến tính đặc biệt

3.1 Hệ biến thiên chậm

3.1.1 Tích Kronecker

Định nghĩa 3.1. *Miền ổn định mũ của hệ động lực (2.1.1) khi $A(t) \equiv A$ là ma trận hằng hồi quy được định nghĩa như sau*

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \lim_{s \searrow \mu(t)} \frac{\ln |1 + s\lambda|}{s} \Delta\tau < 0 \right\}.$$

Trong định lý dưới đây, ta đòi hỏi các giá trị riêng $\lambda_i(t)$ của ma trận $A(t)$ phải nằm trong đường tròn Hilger tương ứng với mọi $t \geq t_0$ và $i = 1, \dots, n$.

Sau đây, ta đưa ra định nghĩa tích Kronecker để sử dụng trong Định lý 3.1. Tích Kronecker cho phép ta thực hiện phép nhân hai ma trận bất kỳ với các cấp tùy ý.

Định nghĩa 3.2. *Tích Kronecker của $n_A \times m_A$ -ma trận A và $n_B \times m_B$ -ma trận B là $n_A n_B \times m_A m_B$ -ma trận được xác định như sau*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m_A}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_A 1}B & \dots & a_{n_A m_A}B \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Bổ đề 3.1. *(Zang) Giả sử $m \times m$ -ma trận A và $n \times n$ -ma trận B là các ma trận nhận giá trị phức. Ta có,*

$$(i) (A \otimes I_n)(I_m \otimes B) = (A \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_n).$$

(ii) Nếu λ_i và γ_j lần lượt là các giá trị riêng của A và B , với $i = 1, \dots, m$ và $j = 1, \dots, n$ thì các giá trị riêng của $A \otimes B$ là

$$\lambda_i \gamma_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

và các giá trị riêng của $(A \otimes I_n) + (I_m \otimes B)$ là

$$\lambda_i + \gamma_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

3.1.2 Tính ổn định mũ của hệ biến thiên chậm

Bây giờ ta nêu ra Định lý cho tính ổn định mũ đều của hệ biến thiên chậm theo thời gian. Ở đây ta xét ma trận biến thiên thời gian $A(t)$ có chuẩn bị chặn; biến thiên đủ chậm (tức là $\|A^\Delta(t)\| \leq \beta$, với hằng số dương β nào đó, với mọi $t \in \mathbb{T}$) và các giá trị riêng của nó phải thoả mãn một điều kiện nhất định.

Định lý 3.1. Xét hệ động lực tuyến tính hồi quy (2.2.1) với $A(t) \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\mu_{\max}, \mu_{\max}^\Delta < \infty$. Giả sử tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho $\|A(t)\| \leq \alpha$, và hằng số $0 < \varepsilon < \frac{1}{\mu_{\max}} \leq \frac{1}{\mu(t)}$ sao cho với mọi giá trị riêng $\lambda_i(t)$ của $A(t)$, $\operatorname{Re}_\mu[\lambda_i(t)] \leq -\varepsilon < 0$. Khi đó, nếu tồn tại số $\beta > 0$ sao cho $\|A^\Delta(t)\| \leq \beta$ thì (2.2.1) là ổn định mũ đều.

3.2 Hệ phương trình có nhiễu

Xét phương trình

$$z^\Delta(t) = [A(t) + F(t)]z(t). \quad (3.2.1)$$

Định lý 3.2. Giả sử hệ tuyến tính (2.2.1) là ổn định đều. Khi đó, hệ động lực tuyến tính có nhiễu (3.2.1) là ổn định đều nếu tồn tại số $\beta \geq 0$ sao cho với mọi τ ta có

$$\int_\tau^\infty \|F(s)\| \Delta s \leq \beta. \quad (3.2.2)$$

Kết luận

Trong luận văn, chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau đây:

- Trình bày các định nghĩa và tính chất về tính ổn định đều, ổn định mũ đều, ổn định tiệm cận đều của hệ phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian.
- Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov để xét tính ổn định đều và không ổn định đều của phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian. Hàm Lyapunov mà ta sử dụng ở đây là các hàm Lyapunov dạng toàn phương.
- Áp dụng phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phương trình tuyến tính biến thiên chậm.

Tài liệu tham khảo

- [1] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [2] M. Bohner and G. Sh. Guseinov, *Riemann and Lebesgue Integrations*, preprint.
- [3] W.L. Brogan, *Modern Control Theory*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1991.
- [4] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, New York, 1999.
- [5] A. Cabada and D. R. Vivero, *Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives*, Math. Comput. Modelling 43, 2006, 194- 207.
- [6] C.A. Desoer, *Slowly varying $x' = A(t)x$* , IEEE Trans. Automat. Control CT-14(1969) 780–781.
- [7] C.A. Desoer, *Slowly varying $x_{i+1} = A_i x_i$* , Electron. Lett. 6 (1970) 339–340.
- [8] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer, New York, 1967.
- [9] S. Hilger, *Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, 1988.
- [10] A. Ilchmann, D.H. Owens, D. Prätzel-Wolters, *High-gain robust adaptive controllers for multivariable systems*, Systems Control Lett. 8 (1987) 397–404.

- [11] Jeffrey J. DaCunha, *Stability for time varying linear dynamic systems on time scales*, Journal of Computational and Applied Mathematics 176 (2005) 381–410.
- [12] R.E. Kalman, J.E. Bertram, *Control system analysis and design via the second method of Lyapunov I: Continuous-time systems*, Trans. ASME Ser. D. J. Basic Eng. 82 (1960) 371–393.
- [13] R.E. Kalman, J.E. Bertram, *Control system analysis and design via the second method of Lyapunov II: Discrete-time systems*, Trans. ASME Ser. D. J. Basic Eng. 82 (1960) 394–400.
- [14] C. Pötzsche, S. Siegmund, F. Wirth, *A spectral characterization of exponential stability for linear time-invariant systems on time scales*, Discrete Continuous Dynamic Systems 9 (2003) 1223–1241.
- [15] H.H. Rosenbrock, *The stability of linear time-dependent control systems*, J. Electron. Control 15 (1963) 73–80.
- [16] W.J. Rugh, *Linear System Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [17] V. Solo, *On the stability of slowly-time varying linear systems*, Math. Control Signals Systems 7 (1994) 331–350.
- [18] F. Zhang. *Matrix Theory: Basic results and Techniques*, Springer, New York, 1999.