

Lý thuyết cực trị và ứng dụng trong đo lường rủi ro tài chính : Luận văn ThS. Toán học: 60 46 15 / Lê Đức Thọ ; Nghd. : TS. Trần Trọng Nguyên

THÔNG TIN LUẬN VĂN CAO HỌC

Họ tên học viên: Lê Đức Thọ

Sinh ngày : 26/7/1985

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học

I. Luận văn có cấu trúc 2 chương:

Chương 1: Tập trung làm rõ các kết quả chính của lý thuyết cực trị. Các định lý, bổ đề các hệ quả cho phần ứng dụng chương 2. Trình bày các phân phối cực trị, xấp xỉ hàm phân phối vượt ngưỡng, mô hình cực trị cho khối cực đại, điều kiện cần và đủ để một hàm phân F nằm trong miền hấp dẫn của hàm phân phối G .

1. Chứng minh định lý nổi tiếng Fisher and Tippett (1928), Gnedenko (1943)) phân loại hàm cực trị.
- 2 Miền hấp dẫn của một phân phối G .
- 3 Hàm phân phối vượt ngưỡng
- 4 Phân phối Pareto tổng quát
- 5 Hàm phân vị
- 6 Biểu đồ QQ-PP
- 7 Ước lượng các mô hình cực trị
- 8 Một số mô hình cực trị mở rộng và mối liên hệ các mô hình

Chương 2: Ứng dụng lý thuyết cực trị trong đo lường rủi ro tài chính.

1. Rủi ro tài chính
2. Mô hình đo lường rủi ro
3. Tham số hoá biến lợi nhuận và biến thua lỗ
4. Một số phương pháp tính các độ rủi ro
5. Phương pháp tính giá trị rủi ro trong đầu tư vốn
6. Ứng dụng lý thuyết cực trị trong mô hình hoá đuôi chuỗi lợi suất chứng khoán

7. Áp dụng EVT để đo lường rủi ro trong đầu tư cổ phiếu ACB.

II. Các kết quả chính của luận văn đạt được:

2.2 Khái quát về đo lường rủi ro và độ đo rủi ro chặt chẽ

2.2.1 Khái quát về đo lường rủi ro

Trong quản trị rủi ro tài chính hiện đại nếu chỉ đơn thuần dựa vào các chính sách định tính thì chưa đủ, mà quan trọng hơn là phải hình thành và phát triển các phương pháp để lượng hoá mức rủi ro và tổn thất tài chính. Rủi ro thực chất là phản ánh tính không chắc chắn của kết quả nên người ta thường sử dụng phân phối xác suất để đo lường rủi ro. Cho đến nay đã có nhiều chỉ tiêu và phương pháp đo lường rủi ro tài chính đang được áp dụng. Mô hình *Giá trị rủi ro* (Value at Risk-VaR) được sử dụng khá phổ biến trong quản trị rủi ro thị trường của danh mục. Mặc dù vậy, VaR vẫn có những hạn chế trên cả phương diện lý thuyết lẫn thực tiễn. Do đó, mới đây một số tác giả đã sử dụng độ đo *Tổn thất kỳ vọng* (Expected Shortfall-ES) trong đo lường rủi ro thị trường.

2.2.2 Độ đo rủi ro chặt chẽ

2.2.2.1 Mô hình

Ta xét một nhà đầu tư (cá nhân hoặc tổ chức) nắm giữ một danh mục. Gọi t là thời điểm hiện tại, $(t+1)$ là thời điểm cuối của kỳ đầu tư (thời điểm trong tương lai), V_t, V_{t+1} là các giá trị của danh mục tại các thời điểm $t, t+1$ tương ứng. Giá trị V_t đã biết, V_{t+1} chưa biết và là biến ngẫu nhiên do đó khi nắm giữ danh mục nhà đầu tư sẽ đối mặt với rủi ro: nhà đầu tư sẽ bị thua lỗ, tổn thất nếu $V_{t+1} < V_t$ và mức thua lỗ: $X = V_t - V_{t+1}$ cũng là biến ngẫu nhiên. Vấn đề đặt ra là:

- Có thể tìm ra một thước đo chung, khái quát (độ đo rủi ro), một chỉ tiêu định lượng vừa thể hiện mức độ rủi ro của danh mục (mức thua lỗ) – bất kể nguồn gốc phát sinh (biến động của thị trường, tỷ giá, lãi suất, vỡ nợ...) – vừa thuận tiện cho yêu cầu giám sát, quản trị?
- Độ đo rủi ro cần phải đáp ứng những yêu cầu cơ bản nào (những tiên đề) để phù hợp logic và thực tiễn?

Vào giữa những năm 90 của thế kỷ trước, P. Artzner, F. Delbaen, D. Heath và một số tác giả khác (xem [10]) đã nghiên cứu vấn đề trên và đề xuất một *mô hình lý thuyết về độ đo rủi ro* và được gọi là “Độ đo rủi ro chặt chẽ” để đo lường rủi ro của danh mục.

2.2.2.2 Lý thuyết Độ đo rủi ro chặt chẽ

Hoạt động của thị trường tài chính diễn ra trong môi trường bất định, môi trường này được mô hình hóa bởi không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Gọi X^0 là tập các biến ngẫu nhiên hữu hạn (hầu như chắc chắn) trong không gian trên. Cho $\mathcal{X} \subseteq X^0$ là một nón lồi. Các nhà đầu tư tham gia thị trường thông qua việc nắm giữ danh mục. Rủi ro tài chính của việc nắm giữ danh mục biểu hiện bởi mức thua lỗ tiềm ẩn sau kỳ đầu tư và được mô hình hóa bởi biến ngẫu nhiên $X \in \mathcal{X}$.

Định nghĩa 2.1: Ánh xạ $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gọi là *Độ đo rủi ro* của danh mục. Danh mục với mức thua lỗ X có mức rủi ro $\rho(X)$. Trong quản trị, giám sát rủi ro có thể xem $\rho(X)$ như khoản dự phòng, khoản thế chấp,...

Độ đo rủi ro $\rho(X)$ gọi là *Độ đo rủi ro chặt chẽ* nếu thỏa mãn các điều kiện (tiên đề) sau:

➤ T1: Bất biến theo phép tịnh tiến:

Với mọi $X \in \mathcal{X}$, $a \in \mathbb{R} : \rho(X+a) = \rho(X) - a$

➤ T2: Cộng tính dưới:

Với mọi $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ ta có : $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$

➤ T3: Thuần nhất dương:

Với mọi $X \in \mathcal{X}, \lambda > 0$: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

➤ T4: Đơn điệu tăng:

Với $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ mà $X_1 \leq X_2$ (hầu như chắc chắn), ta có: $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$

Ta có thể giải thích tính logic của các tiên đề như sau:

- T1: Với danh mục có độ rủi ro $\rho(X)$, khi bổ sung tài sản phi rủi ro có giá trị a thì mức độ rủi ro của danh mục giảm còn $\rho(X) - a$.
- T2: Rủi ro của danh mục tổng hợp (ứng với $X_1 + X_2$) không lớn hơn tổng rủi ro của các danh mục thành phần. Yêu cầu này phù hợp với nguyên lý *Đa dạng hóa đầu tư*.
- T3: Danh mục có quy mô lớn thì rủi ro cũng lớn.
- T4: Danh mục có mức thua lỗ tiềm ẩn cao thì rủi ro cũng cao.

Như vậy tất cả các yêu cầu (các tiên đề) đối với độ đo rủi ro đều hợp lý và phù hợp với thực tiễn.

Độ đo rủi ro của danh mục theo cách tiếp cận trên rất tổng quát. Người làm công tác quản trị rủi ro có thể căn cứ vào *nguồn gốc của rủi ro* mà xây dựng các độ đo cụ thể. Kết quả sau sẽ cung cấp tiêu chuẩn để đánh giá một độ đo rủi ro cụ thể có phải là độ đo rủi ro chặt chẽ hay không.

2.2.2.3 Định lý biểu diễn độ đo rủi ro chặt chẽ

Ký hiệu A là tập các hàm $\phi(p)$ xác định trên $[0,1]$, không âm, đơn điệu giảm và:

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 1.$$

Ta có thể xem $\phi(p)$ như một dạng hàm mật độ xác suất.

Gọi $F(x)$ là hàm phân phối của mức tổn thất X . Ta xây dựng độ đo rủi ro như sau:

$$\rho(X) = - \int_0^1 F^{-1}(p) \phi(p) dp \quad (2.1)$$

với $\phi(p)$: xác định trên $[0,1]$, $\phi(p) \geq 0$ và $\int_0^1 \phi(x) dx = 1$. Có thể coi $\phi(p)$ là hàm tỷ trọng. Ta có định lý sau (xem [10]):

Định lý 2.1: Độ đo rủi ro (2.1) là chặt chẽ khi và chỉ khi $\phi(p) \in A$.

Với công thức biểu diễn (2.1) của độ đo rủi ro chặt chẽ ta có thể xây dựng các độ đo cụ thể phù hợp với nguồn gốc phát sinh rủi ro thông qua việc chọn hàm $\phi(p)$. Đây là gợi ý rất quan trọng trong đo lường rủi ro.

2.3 Giá trị rủi ro (Value At Risk)

2.3.1 Nguồn gốc ra đời và quá trình phát triển

Thuật ngữ giá trị rủi ro (Value at Risk – viết tắt là: VaR) đã được sử dụng rộng rãi và thực sự trở thành một khái niệm quan trọng trong khoa học kinh tế từ sau sự kiện thị trường chứng khoán sụp đổ năm 1987.

Người đã tiếp cận giá trị VaR đầu tiên là Harry Markowitz vào năm 1952. Trong bài báo tài chính “Sự lựa chọn danh mục đầu tư (Portfolio Selection)”, ông đã dựa vào

ma trận hiệp phương sai lợi suất để phát triển phương pháp tối ưu danh mục đầu tư.

Trong những năm đầu thập niên 80, Ủy ban Chứng khoán và Ngoại hối liên bang Hoa Kỳ (SEC - Securities and Exchange Commission) đã thông qua độ đo VaR để ràng buộc yêu cầu về vốn các công ty tài chính cho các khoản lỗ có thể phát sinh, với độ tin cậy 95% trong khoảng thời gian 30 ngày, và ở các mức độ khác nhau, chuỗi lợi suất quá khứ được sử dụng để tính toán các khoản lỗ tiềm năng. Trong khoảng thời gian này, Ngân hàng Trust đã triển khai sử dụng một độ đo VaR cho một hệ thống phân bổ vốn đầu tư của mình (RAROC).

Trong thời gian cuối thập niên 80 và đầu thập niên 90, một số tổ chức đã thực hiện tính toán VaR để hỗ trợ cho việc phân bổ vốn đầu tư và hạn chế rủi ro của thị trường.

Những sự kiện tài chính đầu những năm 1990 cho thấy rất nhiều công ty đã gặp rắc rối vì tổn thất công ty ở dưới mức dự kiến hoặc không được xác định một cách rõ ràng từ trước. Từ khi tất cả các bàn giao dịch luôn quan tâm đến việc tính giá trị tổn thất, VaR đã trở thành một điều kiện tất yếu trong các báo cáo về rủi ro của hầu hết các công ty. Tại Ngân hàng JP Morgan, Giám đốc điều hành nổi tiếng - Dennis Weatherstone đã tuyên bố “Báo cáo lúc 4:15”, với ý nghĩa phải tổng kết tổn thất của tất cả các công ty trong ngày trên một báo cáo trong vòng 15 phút khi thị trường đóng cửa giao dịch. Độ đo tổn thất VaR đã được phát triển cho mục đích này. VaR đã được ứng dụng rộng rãi nhất tại Ngân hàng JP Morgan, đây cũng là nơi đã công bố rất nhiều phương pháp VaR và cho phép truy cập miễn phí dữ liệu các tham số ước lượng cần thiết trong năm 1994. Đây là lần đầu tiên VaR được quan tâm rộng rãi mà không chỉ giới hạn trong một nhóm nhỏ các nhà khoa học và toán học tài chính. Hai năm sau, phương pháp này đã được tách ra một cách độc lập mà trước đây là một phần của nhóm RiskMetrics.

Năm 1997, SEC đã phán quyết rằng tất cả các công ty niêm yết phải công bố thông tin định lượng về hoạt động phái sinh của họ. Những ngân hàng lớn và các đại lý đã tuân thủ bằng cách bao gồm cả thông tin về VaR trong các ghi chú báo cáo tài chính của họ.

Tổ chức Ngân hàng Quốc tế đã công bố “Hiệp định Basel II”, bắt đầu từ năm 1999 và gần như hoàn thiện cho đến ngày nay, đã thúc đẩy hơn nữa việc sử dụng VaR trong quản trị rủi ro. VaR đã trở nên một biện pháp hàng đầu để đo lường tổn thất thị trường, và những tiếp cận tương tự như VaR cũng được sử dụng trong nhiều điều khoản khác của Hiệp định.

Mô hình VaR là một trong những mô hình đo lường rủi ro thị trường của tài sản, danh mục. Sử dụng mô hình VaR như một cách đo lường và cảnh báo sớm những tổn thất về mặt giá trị của danh mục khi giá của mỗi tài sản trong danh mục biến động giúp nhà đầu tư ước lượng mức độ tổn thất và thực hiện phòng hộ rủi ro.

2.3.2 Khái niệm VaR

VaR của danh mục tài sản thể hiện mức độ tổn thất có thể xảy ra đối với danh mục, tài sản trong một chu kỳ k (đơn vị thời gian) với mức độ tin cậy nhất định.

Ví dụ 2.1: Một nhà đầu tư quyết định đầu tư một khoản tiền lớn vào một danh mục cổ phiếu châu Âu và tháng vừa rồi giá trị danh mục đầu tư này đã giảm xuống 50000USD. Sau khi khảo sát đến những nguyên nhân dẫn đến sụt giảm lợi nhuận, anh ta muốn biết mức độ tổn thất tối đa vào cuối tháng này. Câu trả lời ngay lập tức là anh ta có thể mất hết khoản tiền đầu tư, nhưng câu trả lời này không phù hợp với thực tế vì ai cũng biết trường hợp thiệt hại lớn này hiếm khi xảy ra. Câu trả lời thích hợp là: “Nếu không tồn tại sự kiện đặc biệt, thì tổn thất tối đa trong 95% các trường hợp sẽ không vượt quá 4000USD vào cuối tháng này”. Đó là khái niệm của VaR.

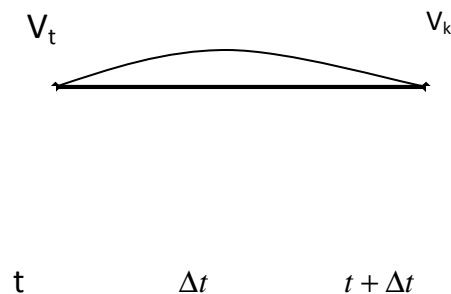
Trong quản trị rủi ro tài chính, VaR là một giá trị sử dụng rộng rãi đo độ rủi ro mức độ tổn thất trên một danh mục tài sản tài chính nhất định. Cho một danh mục, xác suất và khoảng thời gian không đổi, VaR được định nghĩa như một giá trị ngưỡng sao cho xác suất để tổn thất danh mục trong khoảng thời gian nhất định không vượt quá giá trị này là một số α cho trước.

2.3.3 Mô hình VaR

2.3.3.1 Tiếp cận mô hình

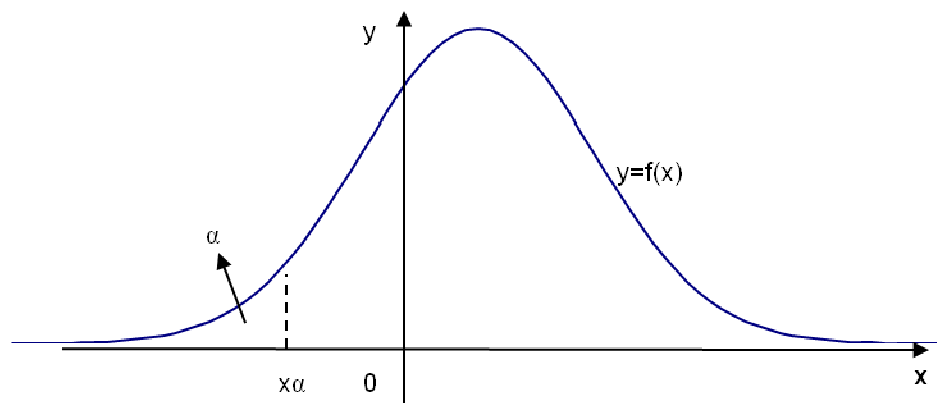
Giả sử rằng một nhà đầu tư quyết định đầu tư một danh mục tài sản P. Tại thời điểm t , giá trị của danh mục đầu tư là V_t . Sau một khoảng thời gian Δt , tức là tại thời điểm $k = t + \Delta t$ thì giá trị của danh mục đầu tư là V_k . Khi đó, giá trị $\Delta V(k) = V_k - V_t$ cho biết sự thay đổi giá trị của danh mục P trong khoảng thời gian Δt . $\Delta V(k)$ gọi là hàm lỗ - lãi (Profit&Loss – P&L(k)) k chu kỳ của danh mục. Ta nhận thấy:

- Nhà đầu tư ở vị thế “trường” đối với P sau chu kỳ k nếu $\Delta V(k) < 0$ (tức là $P\&L(k) < 0$) sẽ bị tổn thất.
- Nhà đầu tư ở vị thế “đoản” đối với P sau chu kỳ k nếu $\Delta V(k) > 0$ (tức là $P\&L(k) > 0$) sẽ bị tổn thất.



Hình 2.1: Biểu diễn thay đổi giá trị tài sản sau khoảng thời gian Δt

Ta thấy V_k là biến ngẫu nhiên nên $P\&L(k)$ cũng là biến ngẫu nhiên. Gọi $F_k(x)$ là hàm phân bố xác suất của $P\&L(k)$ và cho $0 < \alpha < 1$. Khi đó ta có $P(P\&L(k) \leq x_\alpha) = \alpha$ và giá trị x_α gọi là “*Phân vị mức α* ” của hàm phân bố F_k . Với α khá nhỏ thì $x_\alpha < 0$ do đó $P\&L(k) < 0$ tức là nhà đầu tư trường vị sẽ bị tổn thất. Xét $Pr(P\&L(k) \geq x_\alpha)$, ta có $Pr(P\&L(k) \geq x_\alpha) = 1 - Pr(P\&L(k) \leq x_\alpha) = 1 - \alpha$ do đó với α khá nhỏ thì $P\&L(k) > 0$ tức là nhà đầu tư đoản vị sẽ bị tổn thất.



Hình 2.2: Biểu diễn mức phân vị α

Xem xét nhà đầu tư ở vị thế trường vị, khi $\Delta V(k) < 0$ tức là nhà đầu tư sẽ chịu tổn thất. $P(\Delta V(k) \leq x_\alpha) = \alpha$ ta nói rằng xác suất để nhà đầu tư chịu tổn thất dưới mức x_α ($x_\alpha < 0$) là α .

Ngược lại, nhà đầu tư ở vị thế đoản vị, $\Delta V(k) > 0$ tức là nhà đầu tư sẽ chịu tổn thất. $P(\Delta V(k) \geq x_\alpha) = 1 - P(\Delta V(k) \leq x_\alpha) = 1 - \alpha$ ta nói rằng xác suất để nhà đầu tư chịu mức tổn thất trên mức x_α ($x_\alpha > 0$) là $1 - \alpha$.

Đứng trên cả hai vị thế cho nhà đầu tư, khi nhà đầu tư chịu tổn thất tức là giá trị danh mục sụt giảm (giá trị âm). Trong cả hai trường hợp trên, α được cho như xác suất để mức tổn thất không vượt quá giá trị âm này. Ngưỡng giá trị âm này chính là VaR.

Như vậy VaR của một danh mục với chu kỳ k và độ tin cậy $(1-\alpha)$ là mức phân vị α của hàm phân bố $F_k(x)$. Đại lượng này được ký hiệu là $\text{VaR}(k, \alpha)$ và mang giá trị âm.

Như vậy ta có $P(\Delta V(k) \leq \text{VaR}(k, \alpha)) = \alpha$. Điều này cho thấy rằng, một nhà đầu tư nắm giữ danh mục P thì sau một chu kỳ k , với độ tin cậy $(1-\alpha)100\%$, nhà đầu tư có khả năng tổn thất một khoản sẽ bằng $|\text{VaR}(k, \alpha)|$ trong điều kiện hoạt động bình thường.

Ví dụ 2.2: Ngân hàng JP Morgan trong báo cáo tài chính năm 1994 có công bố: $\text{VaR}(1 \text{ ngày}, 5\%)$ là 15 triệu USD. Như vậy với xác suất 5%, trong một ngày toàn hệ thống của JP Morgan có khả năng thua lỗ là 15 triệu USD.

Chú ý 2.1: Trong thực tế, theo tiêu chuẩn quốc tế:

- ✓ Nếu chu kỳ tính $k = 1$ ngày thì $\alpha = 1\%$ hoặc 5% .
- ✓ Nếu chu kỳ tính $k = 10$ ngày thì $\alpha = 1\%$

2.3.3.2 Các giả thiết của mô hình

Thông thường giá trị rủi ro (VaR) phụ thuộc vào các giả định sau đây (trừ một số phương pháp tiếp cận VaR phi tham số có những điểm khác):

- **Tính dừng:** Trong mô hình hồi quy cổ điển chúng ta đã giả thiết rằng các yếu tố ngẫu nhiên có kỳ vọng bằng không, phương sai không đổi và chúng không có tương quan với nhau. Nếu chúng ta tiến hành ước lượng một mô hình với chuỗi thời gian, khi đó giả thiết của OLS bị vi phạm. Một chuỗi được gọi là dừng nếu kỳ vọng, phương sai và hiệp phương sai không thay đổi theo thời gian. Điều này cũng có nghĩa là phân bố xác suất của chuỗi là không thay đổi theo thời gian.
- **Bước ngẫu nhiên:** Một biến Y_t được định nghĩa là một bước ngẫu nhiên nếu $Y_t = Y_{t-1} + u_t$, mà trong đó u_t là nhiễu trắng (có trung bình bằng không, phương

sai không đổi và hiệp phương sai bằng không). Khi đó:

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) + E(u_t) = E(Y_{t-1}).$$

Điều này có nghĩa là kỳ vọng của Y_t không đổi. Với giả thiết này, người ta tin rằng giá trị tương lai không phụ thuộc vào giá trị trong quá khứ.

- **Giá trị không âm:** Các tài sản nhất thiết phải là các giá trị không âm.
- **Thời gian cố định:** Giả thiết này cho rằng, điều gì đúng cho một khoảng thời gian thì cũng đúng cho nhiều khoảng thời gian. Chẳng hạn, nếu cho khoảng thời gian một tuần thì cũng có thể mở rộng cho một năm.
- **Phân phối chuẩn:** Trong một số phương pháp tính VaR, thì giả thiết lợi suất tài sản tuân theo quy luật phân phối chuẩn, chỉ trừ một số phương pháp tiếp cận VaR phi tham số như Monte Carlo.

2.3.4 Các mô hình VaR trong thực hành

Ta đã biết lợi suất của một tài sản, một danh mục trong chu kỳ k là:

$$r_t = \frac{P \& L(k)}{V_t} \Rightarrow P \& L(k) = r_t V_t.$$

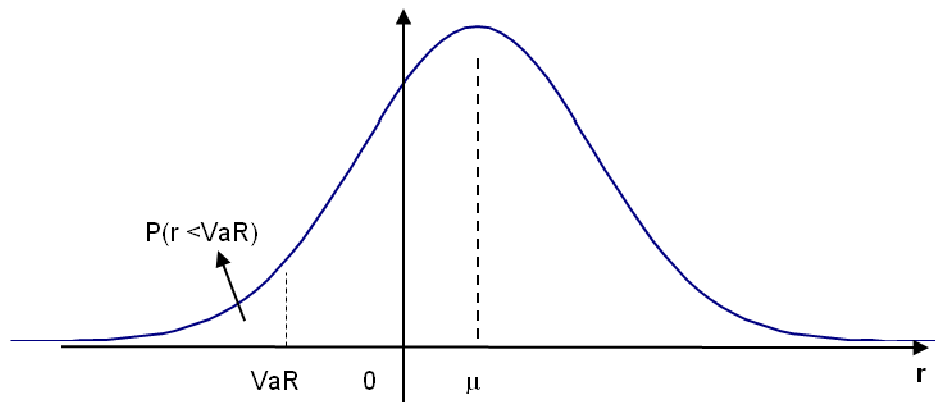
Do V_t đã biết nên để tính VaR của một tài sản, một danh mục ta chỉ cần tính VaR của lợi suất r_t .

2.3.4.1 Mô hình VaR cho lợi suất và tài sản

Giả thiết chuỗi lợi suất của tài sản r_t là chuỗi dừng và có phân bố chuẩn. Với giả thiết này, chúng ta chỉ cần sử dụng hai tham số kỳ vọng (μ) và độ lệch chuẩn (σ) (hoặc sử dụng các ước lượng của chúng) có thể tính được giá trị VaR.

Từ giả thiết $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ suy ra $\frac{r_t - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Công thức tính VaR được xác định như sau:

$$VaR(1\text{ ngày}, (1 - \alpha)100\%) = \mu + N^{-1}(\alpha)\sigma \quad (2.2)$$



Hình 2.3: Ngưỡng VaR xác định trên hàm mật độ phân phối chuẩn.

Ví dụ 2.3: Nhà đầu tư nắm giữ một khối lượng cổ phiếu A có giá trị tại thời điểm hiện tại là $V_t = 100$ triệu đồng, lợi suất (1 ngày) có phân bố chuẩn $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ với $\sigma = 3\%$. Thông thường, lợi suất trong 1 ngày thường khá nhỏ nên ta sẽ giả định $\mu = 0$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ VaR của lợi suất là:

$$VaR(1\text{ ngày}, 5\%) = -1,64 \cdot 0,03 = -0,0492.$$

Suy ra VaR của danh mục:

$$VaR(1\text{ ngày}, V_t, 5\%) = VaR_{\text{Lợi suất}}(1\text{ ngày}, 5\%) \cdot V_t = (-0,0492) \cdot 100 = -4,92.$$

Vậy sau một ngày với xác suất 5%, khả năng nhà đầu tư có thể lỗ là 4,9 triệu.

2.3.4.2 Mô hình VaR cho danh mục

Cho danh mục P: $(w_1, w_2, \dots, w_N)$ với lợi suất các tài sản trong danh mục phân phối chuẩn: $r_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$ với $i = 1 \div N$. Ta đã biết: $r_p = \sum_{i=1}^N w_i \cdot r_i$; $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^N w_i \cdot \bar{r}_i$; $\sigma_p^2 = W' \cdot V \cdot W$ vì vậy lợi suất của danh mục $r_p \sim N(\bar{r}_p, \sigma_p^2)$. Từ đây tương tự như cách tính đối với tài sản ta tính được VaR của danh mục:

$$VaR_{r_p}(1\text{ ngày}, (1-\alpha)100\%) = \mu_p + N^{-1}(\alpha)\sigma_p. \quad (2.3)$$

Chú ý 2.2: Nếu xét danh mục P dưới dạng giá trị: $P: x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ với x_i là khoản tiền đầu tư vào tài sản i khi đó $P \& L(k)$ sẽ là:

$$P \& L(k) = \sum_{i=1}^N r_i x_i.$$

Với giả thiết lợi suất các tài sản trong danh mục $r_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$; $i = 1 \div N$ suy ra:

$$P \& L(k) \sim N(\mu_{P\&L}, \sigma_{P\&L}^2)$$

trong đó $\mu_{P\&L} = \sum_{i=1}^N x_i \bar{r}_i$; $\sigma_{P\&L}^2 = x' V x$. Ta có công thức tính VaR:

$$VaR(1\text{ ngày}, (1-\alpha)100\%) = \mu_{P\&L} + N^{-1}(\alpha)\sigma_{P\&L} = \mu_{P\&L} + N^{-1}(\alpha) * (x' V x)^{1/2} \quad (2.4)$$

Với chu kỳ 1 ngày, đại lượng $\mu_{P\&L}$ khá nhỏ nên trong thực tế có thể bỏ qua. Khi này công thức tính VaR sẽ là:

$$VaR(1\text{ ngày}, (1-\alpha)100\%) = N^{-1}(\alpha) * (x' V x)^{1/2} \quad (2.5)$$

Chú ý 2.3: Trong các công thức trên, ta luôn giả định lợi suất của danh mục (hoặc tài sản) có phân phối chuẩn do đó chỉ cần ước lượng hai tham số: kỳ vọng (μ) và độ lệch chuẩn (σ) (và ma trận hiệp phương sai V với danh mục) là đã có thể tính được VaR, do

vậy cách tính này còn được gọi là phương pháp tham số. Trong thực tế các giả thiết ở trên để tính VaR thường xuyên bị vi phạm nên các ước lượng VaR không chính xác. Do đó chúng ta cần tìm những phương pháp mới cho ước lượng VaR gần với giá trị tổn thất trong thực tế nhất.

2.3.3.5 Ưu điểm và hạn chế của độ đo rủi ro VaR

VaR của danh mục tài sản thể hiện mức độ tổn thất có thể xảy ra đối với danh mục, tài sản trong một khoảng thời gian nhất định với mức độ tin cậy nhất định. Tuy nhiên, có thể chỉ ra rằng độ đo VaR không phải là một độ đo rủi ro chặt chẽ, VaR mới chỉ cho chúng ta biết: “Ta có thể mất tối đa bao nhiêu trong phần lớn các tình huống”. Độ đo VaR không trả lời được câu hỏi: “Trong một phần nhỏ các tình huống còn lại (1% hay 5% tình huống xấu-ứng với những diễn biến bất thường của thị trường), khi xảy ra tổn thất, mức tổn thất có thể dự tính được là bao nhiêu? Độ đo rủi ro ES dưới đây sẽ cho chúng ta câu trả lời.

2.4 Mô hình tổn thất kỳ vọng ES (Expected Shortfall)

Như ta đã biết, mô hình VaR được sử dụng khá phổ biến trong quản trị rủi ro thị trường, rủi ro tín dụng của danh mục. Tuy nhiên VaR có những hạn chế nhất định cả trên phương diện lý thuyết lẫn thực tiễn. Một cách tiếp cận mới trong đo lường rủi ro thị trường của danh mục thông qua việc sử dụng thước đo *Tổn thất kỳ vọng* (Expected Shortfall – ES). Trong mục này chúng ta sẽ tìm hiểu về thước đo rủi ro này và các phương pháp ước lượng nó.

2.4.1 Khái niệm

Sau khi đã tính VaR của danh mục chúng ta quan tâm tới những trường hợp tổn thất thực tế của danh mục vượt ngưỡng VaR và tính trung bình (kỳ vọng) của các mức tổn thất này. Ta có định nghĩa sau:

Tổn thất kỳ vọng của danh mục với độ tin cậy $(1 - \alpha)100\%$, ký hiệu là $ES(\alpha)$, là đại lượng kỳ vọng có điều kiện:

$$ES(\alpha) = ES_{\alpha} = E(X / X > VaR(\alpha)) . \quad (2.6)$$

Nhờ một số tính chất ưu việt hơn VaR, việc sử dụng độ đo rủi ro ES thể hiện việc đo lường rủi ro đầy đủ hơn khi dùng VaR.

2.4.2 Một số tính chất của ES

Ta có thể chứng minh được ES có một số tính chất sau (xem [10]):

- ES là độ đo rủi ro chặt chẽ của danh mục.
- Mọi độ đo rủi ro chặt chẽ $\rho(X)$ khác của danh mục có thể biểu diễn như một tổ hợp lồi của ES với các tham số α phù hợp và $ES \leq \rho(X)$.

Như vậy việc xác định, tính toán ES của danh mục vừa thay thế VaR trong vai trò đo lường rủi ro đầy đủ hơn vừa chỉ ra đây là thước đo rủi ro ưu việt.

2.4.3 Phương pháp thực nghiệm ước lượng ES

Để thuận tiện trong phân tích thống kê và tính toán ước lượng, thay vì xét mức lỗ/lãi X của danh mục ta xét lợi suất (loga lợi suất) của danh mục xác định bởi:

$r = \ln\left(\frac{V_t}{V_{(t+1)}}\right)$. Cũng tương tự như khi ước lượng VaR từ số liệu quá khứ, có hai phương pháp chính ước lượng ES: phương pháp tham số và phi tham số.

- Phương pháp tham số dựa trên giả định về phân phối của lợi suất r : chẳng hạn phân phối chuẩn, T- Student, Pareto tổng quát,...Sau đó từ số liệu quá khứ của r , sử dụng các phương pháp ước lượng trong thống kê, kinh tế lượng (hợp lý tối đa, moment tổng quát, ARCH, GARCH...) để ước lượng các tham số đặc trưng của phân phối và suy ra các ước lượng của VaR (xem [9]) và ES tương ứng (xem [10]).
- Phương pháp phi tham số không đưa ra giả định về phân phối của lợi suất r mà chỉ dùng các phương pháp ước lượng thực nghiệm, mô phỏng và bootstraps cùng các kỹ thuật tính toán xấp xỉ (phương pháp ngoại suy, mạng nơron...) để ước lượng (xem [11], [18], [21], [22]).

Công thức ước lượng ES như sau: Cho mức ý nghĩa $\alpha \in (0,1)$, theo thông lệ thường chọn $\alpha = 1\%$ hoặc 5% . Lập mẫu kích thước n : $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ký hiệu $X_{i:n}$ là thống kê thứ tự thứ i của mẫu, tức là: $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{i:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$. Gọi k là phần nguyên của $n\alpha$, đặt $p = n\alpha - k$. Nếu $n\alpha$ là số nguyên thì $p = 0$. Ta tính thống kê trung bình mẫu của các thống kê thứ tự từ 1 đến k :

$$\bar{X}_{k:n} = \frac{X_{1:n} + X_{2:n} + \dots + X_{k:n}}{k} \quad (2.7)$$

Ta có các công thức ước lượng thực nghiệm cho VaR và ES (chi tiết tham khảo trong [10]):

$$VaR(\alpha) = -X_{k:n} \quad (2.8)$$

$$ES(\alpha) = \begin{cases} -\bar{X}_{k:n} & (n\alpha : \text{nguyên}) \\ -(1-p)\bar{X}_{k:n} - p\bar{X}_{k+1:n} & (n\alpha : \text{không nguyên}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Ví dụ 2.4: Trong ví dụ này, ta ước lượng thực nghiệm ES cho thị trường chứng khoán Việt Nam thông qua chuỗi VnIndex trên sàn HOSE. Xét chuỗi VnIndex (giá trị đóng cửa theo ngày) được thu thập trong khoảng thời gian từ tháng 1/2006 đến 6/2010 từ nguồn VnDirect. Bảng thực nghiệm, người ta thấy trong giai đoạn này chuỗi lợi suất có phân phối chuẩn và tính được (xem [10]): $n=1116$, $\alpha=1\%$ và 5% ta có $n\alpha=11,6$ và $55,8$ suy ra $k_1=11$, $k_2=55$ và $p_1=0,6$; $p_2=0,8$. Sử dụng công thức ước lượng (2.8), (2.9) ta được các ước lượng thực nghiệm của $V\hat{R}$ và ES cho lợi suất thị trường sàn HOSE:

$$V\hat{R}_{VnIndex}(1\%) = 4,604 (\%); V\hat{R}_{VnIndex}(5\%) = 3,686 (\%)$$

$$ES_{VnIndex}(1\%) = 4,731 (\%); ES_{VnIndex}(5\%) = 4,249 (\%)$$

Từ đó, ta có thể rút ra một số nhận xét sau mỗi phiên giao dịch tại sàn HOSE:

- Nếu lợi suất thị trường giảm thì với khả năng 95% mức giảm này không quá 3,686%; còn với 99% khả năng mức này không quá 4,604%.
- Trong tình huống xấu, nếu lợi suất thị trường giảm sâu vượt các ngưỡng trên thì 95% khả năng mức giảm dự tính sẽ là 4,249 % và 99% khả năng mức giảm dự tính sẽ là 4,731 %.

Do trong giai đoạn trên lợi suất thị trường có phân phối chuẩn vì vậy sau khi ước lượng $V\hat{R}$, ES cho ngày, ta có thể sử dụng “Quy tắc căn bậc 2 theo thời gian” để tính $V\hat{R}$, ES cho các chu kỳ dài hơn. Nếu chu kỳ tính là: tuần (5 ngày giao dịch) hoặc 10 ngày, ta có:

$$V\hat{R}_{VnIndex_tuần}(1\%) = 10,294 (\%); V\hat{R}_{VnIndex_tuần}(5\%) = 8,242 (\%)$$

$$ES_{VnIndex_10ngày}(1\%) = 14,96 (\%); ES_{VnIndex_10ngày}(5\%) = 13,43 (\%)$$

2.4.4 Ý nghĩa

Tổn thất kỳ vọng của danh mục với độ tin cậy $(1 - \alpha) \cdot 100\%$, là tổn thất trung bình vượt ngưỡng VaR_α :

$$ES_\alpha = E(X / X > VaR_\alpha).$$

Mức tổn thất kỳ vọng (ES) của danh mục gần đây mới được đề xuất là độ đo rủi ro bổ sung cho VaR nhưng ý nghĩa và tầm quan trọng của nó trong quản trị rủi ro tài chính là rất rõ. Do cấu trúc phức tạp hơn VaR nên để tính toán, ước lượng ES cần phát triển các phương pháp phù hợp, đặc biệt khi đề cập tới danh mục có cấu trúc phức tạp như các danh mục của tổ chức tài chính, tín dụng.