

Bảng ký hiệu

$\mathbb{F}$	Tập số (thực hay phức).
I	Ánh xạ đồng nhất.
$C_c(X)$	Không gian các hàm liên tục trên X triệt tiêu bên ngoài một tập compact.
$L^p(X)$	Không gian các hàm khả tích cấp p trên X .
H	Không gian Hilbert.
$B(H)$	Không gian các toán tử tuyến tính bị chặn trong H .

Mục lục

Bảng ký hiệu	i
Mở đầu	iii
1 Kiến thức chuẩn bị	1
1.1 Một số khái niệm mở đầu	1
1.2 Biểu diễn các phiếm hàm tuyến tính	2
1.3 Sự thác triển của toán tử	7
1.4 Không gian Hilbert	8
1.4.1 Định nghĩa tích trong	8
1.4.2 Hàm thuần nhất	9
1.4.3 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	9
1.4.4 Định nghĩa không gian Hilbert	10
1.5 Toán tử trong không gian Hilbert	10
1.5.1 Toán tử liên hợp	10
1.5.2 Toán tử chuẩn tắc	13
1.5.3 Toán tử dương	13
1.5.4 Phép chiếu	14
1.5.5 Toán tử chéo hóa được	15
1.5.6 Toán tử unitar	16
1.5.7 Phép đẳng cự một phần	16
1.5.8 Phép phân tích cực	17
1.6 Các khái niệm hội tụ	18
2 Xây dựng không gian L^p cho lớp các toán tử compact	21
2.1 Đại số Banach	21
2.2 Toán tử compact	23
2.2.1 Khái niệm lớp toán tử compact	23

2.2.2	Tính chất của toán tử compact	25
2.2.3	Toán tử hạng một	27
2.2.4	Đại số Calkin	28
2.2.5	Toán tử Fredholm	29
2.3	Vết	30
2.3.1	Định nghĩa vết	31
2.3.2	Lớp toán tử vết và lớp toán tử Hilbert-Schmidt .	32
2.3.3	Một dạng cụ thể của lớp toán tử Hilbert-Schmidt	38
2.3.4	Tích phân của toán tử compact	42
3	Xây dựng không gian L^p cho đại số von Neumann với vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn	43
3.1	Đại số von Neumann	43
3.2	Hàm vết trên đại số von Neumann	46
3.3	Sự hội tụ theo độ đo	48
3.4	Tích phân theo vết	56
3.4.1	Xây dựng tích phân theo vết	57
	Kết luận	61
	Tài liệu tham khảo	62

Mở đầu

Trong luận văn này, chúng tôi trình bày về xây dựng các không gian L^p , $1 \leq p < \infty$, cho một số lớp các đại số toán tử trên không gian Hilbert phức H . Dựa trên quan điểm của lý thuyết độ đo trên không gian tô pô compact địa phương X , coi tích phân là các phiếm hàm tuyến tính dương trên không gian $C_c(X)$ các hàm liên tục trên X , triệt tiêu bên ngoài một tập compact. Tích phân này chính là phần tử thuộc không gian đối ngẫu của $C_c(X)$. Từ đó định nghĩa không gian L^1 các hàm khả tích là các hàm có tích phân hữu hạn và không gian các hàm lũy thừa p khả tích L^p . Cách xây dựng trên được áp dụng cho lớp các toán tử compact $B_0(H)$ như là sự mở rộng của $C_c(X)$, cho trường hợp đại số của các toán tử tuyến tính liên tục trên H . Tích phân của một toán tử thuộc $B_0(H)$ là vết của toán tử đó. Tổng quát hơn là xây dựng các không gian L^p của Edward Nelson cho đại số von Neumann với một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn τ .

Luận văn "*Xây dựng không gian L^p cho đại số toán tử*" gồm ba chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Xây dựng không gian L^p cho lớp các toán tử compact.

Chương 3: Xây dựng không gian L^p cho đại số von-Neumann với vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn.

Chương 1 trọng tâm là phần xây dựng không gian L^p , với cơ sở là Định lý biểu diễn Riesz. Trên các không gian tô pô compact địa phương ta khảo sát các phiếm hàm tuyến tính dương trên không gian các hàm giá trị thực, liên tục triệt tiêu ở ngoài một tập compact và chứng minh rằng chúng tương ứng là tích phân đối với một độ đo thích hợp nào đó. Ngoài ra, chúng tôi giới thiệu sơ lược về các loại toán tử trong không gian Hilbert và sự thác triển của toán tử.

Chương 2 chúng tôi trình bày khái niệm lớp toán tử compact và các tính chất. Với tích phân của một toán tử compact là vết của toán tử đó, từ đó hình thành các không gian khả tích cấp p , ($1 \leq p < \infty$). Cụ thể hơn, chúng tôi giới thiệu tính chất của lớp toán tử vết và lớp toán tử Hilbert-Schmidt.

Tổng quát hơn, chương 3 chúng tôi giới thiệu bài báo của Edward Nelson về xây dựng tích phân trên đại số von-Neumann $\mathcal{A}$ theo một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn. Đại số trên không giao hoán, do đó nội dung của chương này chính là lý thuyết về tích phân không giao hoán. Với cơ sở là sự hội tụ theo tô pô độ đo và định lý về các ánh xạ thác triển liên tục từ đại số von-Neumann $\mathcal{A}$ và không gian Hilbert H , không gian L^p chính là không gian Bannach mở rộng đầy đủ của không gian con tuyến tính định chuẩn J của $\mathcal{A}$ với chuẩn $\|\cdot\|_p$.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc của mình tới PGS.TS. Phan Viết Thư, người đã tận tình hướng dẫn và đóng góp nhiều ý kiến quý báu. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tập thể các thầy cô giáo, các nhà khoa học của trường Đại học Khoa học Tự Nhiên đã giúp đỡ tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành cuốn luận văn này.

Trong quá trình viết luận văn, mặc dù dưới sự chỉ đạo ân cần chu đáo của các thầy giáo và bản thân cũng hết sức cố gắng, song bản luận văn này không tránh khỏi những hạn chế thiếu sót. Vì vậy, rất mong được sự góp ý, giúp đỡ của các thầy cô, các bạn để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Hà Nội, năm 2010
Học viên

Vũ Mai Liên

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi giới thiệu định nghĩa không gian L^p dựa trên quan điểm của lý thuyết độ đo trên các không gian tôpô compact địa phương X , coi tích phân là các phiếm hàm tuyến tính dương trên không gian các hàm liên tục triệt tiêu bên ngoài một tập compact.

1.1 Một số khái niệm mở đầu

Định nghĩa 1.1.1. Không gian tôpô X được gọi là Hausdorff nếu với x, y là hai điểm phân biệt trong X , có các tập mở G, H với $x \in G$, $y \in H$, $G \cap H = \emptyset$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho X là một không gian tôpô Hausdorff compact địa phương. Họ các hàm $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, với $\mathbb{F}$ là tập $\mathbb{C}$ hay $\mathbb{R}$, liên tục trên X và triệt tiêu bên ngoài một tập con compact của X được ký hiệu là $C_c(X)$.

Giá của hàm $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ là bao đóng của tập $\{x : f(x) \neq 0\}$. Khi đó tập $C_c(X)$ là họ các hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ có giá compact. Khi X compact, $C_c(X)$ trùng với $C(X)$ là không gian các hàm liên tục trên X .

Định nghĩa 1.1.3. Cho X là một không gian tôpô, $\mathcal{B}$ là σ -đại số Borel sinh bởi các tập mở của X . Cặp $(X, \mathcal{B})$ được gọi là một không gian Borel. Giả sử μ là một độ đo trên không gian Borel $(X, \mathcal{B})$. Ta cũng giả thiết

thêm với mỗi tập đóng F đều tồn tại dãy tập mở $\{O_i\}$ sao cho $F = \cap O_i$. Nếu với mỗi $\epsilon > 0$, với mỗi tập $A \in \mathcal{B}$, tồn tại một tập mở O và tập đóng F sao cho $F \subset A \subset O$ và $\mu(O - F) < \epsilon$, thì μ được gọi là độ đo chính quy trên không gian tô pô X . Hai độ đo chính quy trùng nhau trên các tập mở thì trùng nhau.

1.2 Biểu diễn các phiếm hàm tuyến tính

Trước khi nghiên cứu Định lý Riesz chúng tôi giới thiệu một số kết quả sau. Các kết quả này được trình bày chi tiết trong luận văn [5].

Định nghĩa 1.2.1. Cho một không gian X bất kì. Ta xét một họ L các hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

- (i) L là không gian tuyến tính trên trường số thực.
- (ii) Với mỗi f thuộc L ta có hàm f_+ thuộc L với $f_+(x) = \max(0, f(x))$. Với mỗi f, g thuộc L , x trong X , ta định nghĩa 2 phép toán:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

Các mối quan hệ

$$f_+ = f \vee 0, f \vee g = (f - g) \vee 0 + g, f \wedge g = f + g - (f \vee g)$$

chỉ ra rằng:

- (iii) Nếu f, g thuộc L thì $f \vee g, f \wedge g$ thuộc L .

Một họ L bất kì thỏa mãn các điều kiện (i), (ii) và do đó thỏa mãn điều kiện (iii) được gọi là một dàn vectơ các hàm số.

Giả sử J là một phiếm hàm tuyến tính trên L (không gian tuyến tính thực) thì ta nói J là dương nếu với mọi f thuộc L , $f \geq 0$ thì $J(f) \geq 0$.

Định nghĩa 1.2.2. (Phiếm hàm Daniell)

Một phiếm hàm tuyến tính dương J trên L được gọi là phiếm hàm Daniell nếu với mọi dãy tăng $\{f_n\}$ các hàm thuộc L , ta có:

$$J(g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \tag{1.1}$$

với mỗi g thuộc L thỏa mãn: $g(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ với mọi x trong X .

Chú ý rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ nếu như $\{f_n(x)\}$ không bị chặn.

Nếu J là một phiếm hàm Daniell, $\{f_n\}$ là một dãy đơn điệu trong L sao cho $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in X$, xác định một hàm trong L thì $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$. Thực vậy, nếu $\{f_n\}$ tăng thì $f \geq f_n$ với mọi n . Do đó $J(f) \geq J(f_n)$ với mọi n . Vì J dương nên theo (1.1) ta có dấu đẳng thức xảy ra. Do đó mọi phiếm hàm Daniell là liên tục theo nghĩa với dãy $\{f_n\}$ trong L đơn điệu giảm về 0, ta phải có $J(f_n)$ hội tụ tới 0. Vì vậy mỗi phiếm hàm tuyến tính Daniell là một tích phân. Tuy nhiên, để tích phân trở lên có ích ta mở rộng miền L thành một miền càng lớn càng tốt. Tích phân Daniell là kết quả của việc mở rộng một phiếm hàm Daniell J từ L lên lớp hàm $L_1 \supset L$. Việc mở rộng được tiến hành trong hai bước.

Giả sử J là một phiếm hàm Daniell trên dàn vectơ L . Ký hiệu L^+ là tập các hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ với f là giới hạn của các hàm đơn điệu tăng của L . L^+ không phải là một không gian tuyến tính nhưng với $\alpha, \beta \geq 0$, $f, g \in L^+$ thì $\alpha f + \beta g \in L^+$. Khi đó nếu $\{f_n\}$ là một dãy tăng trong L thì $\{J(f_n)\}$ là một dãy tăng trong $\mathbb{R}$ có giới hạn duy nhất trong $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Chúng ta có thể xác định J trên L^+ bởi công thức:

$$J(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$$

Định nghĩa trên là đúng đắn vì nếu $\{f_n\}, \{g_n\}$ là hai dãy đơn điệu cùng hội tụ đến h trong L^+ thì từ điều kiện (1.1) ta có: với mọi k , $f_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ thì $J(f_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n)$. Do đó $\lim_{k \rightarrow \infty} J(f_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n)$. Tương tự ta cũng có: $\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n)$. Vậy ta có dấu đẳng thức.

Rõ ràng J là tuyến tính trên L^+ theo nghĩa với $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, f, g \in L^+$ thì

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g)$$

Cho một hàm số bất kỳ $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$. Ta định nghĩa tích phân trên $J^*(f)$ bởi hệ thức sau:

$$J^*(f) = \inf_{g \geq f, g \in L^+} J(g)$$

Tương tự ta có tích phân dưới $J_*(f)$ được định nghĩa bởi:

$$J_*(f) = -J^*(-f)$$

Và ta nói rằng hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ khả tích (theo J) nếu $J_*(f) = J^*(f)$ và bằng giá trị hữu hạn. Lớp các hàm khả tích được ký hiệu là $L_1 = L_1(J, L)$. Với f thuộc L_1 , giá trị chung của $J_*(f), J^*(f)$ được gọi là tích phân của hàm f và ký hiệu là $\mathcal{J}(f)$. Khi đó, phép đo $\mathcal{J}$ trên L_1 là một phép đo Daniell.

Định lý 1.2.3. *Cho một phép đo Daniell J trên dàn vectơ L các hàm số từ X vào $\mathbb{R}$. Quá trình định nghĩa một phép đo $\mathcal{J}$ trên tập L_1 xác định một phép đo tuyến tính trên dàn L_1 . Hơn nữa, nếu $\{f_n\}$ là dãy tăng các hàm trong L_1 và $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ thì f thuộc L_1 khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(f_n)$ hữu hạn; và trong trường hợp này $\mathcal{J}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(f_n)$.*

Bây giờ ta bắt đầu với một phép đo Daniell J trên một dàn các vectơ L đóng đối với các giới hạn đơn điệu. Ví dụ $\{f_n\}$ là dãy đơn điệu trong L và $\lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ hữu hạn thì $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ trong L . Quá trình mở rộng định nghĩa ở trên không mang lại điều gì mới hơn là một phần của L^+ trên đó J là hữu hạn. Do vậy $L = L_1$.

Định nghĩa 1.2.4. (Tích phân Daniell)

Cho $\mathcal{J}$ là một phép đo Daniell trên dàn vectơ L_1 các hàm từ X vào $\mathbb{R}^*$ thỏa mãn: nếu f là giới hạn của dãy đơn điệu $\{f_n\}$ các hàm trong L_1 thì f thuộc L_1 và $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(f_n)$ hữu hạn. Khi đó $\mathcal{J}$ được gọi là tích phân Daniell.

Cho một tích phân Daniell $\mathcal{J}$, một hàm không âm $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ được gọi là đo được theo $\mathcal{J}$ nếu với mọi hàm $g \in L_1$ thì $f \wedge g \in L_1$. Một tập $A \subset X$ là đo được nếu hàm chỉ tiêu I_A đo được. Tập A khả tích nếu $I_A \in L_1$. Sau đây ta sẽ giả thiết không gian X là đo được tức là hàm hằng $f(x) \equiv 1$ là đo được.

Bổ đề 1.2.5. (Stone)

Giả sử $\mathcal{J}$ là tích phân Daniell trên lớp L_1 các hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}^$ và X là tập đo được theo $\mathcal{J}$ thì*

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mathcal{J}(I_E) \text{ khi } E \text{ khả tích,} \\ \mu(E) &= \sup\{\mu(A) : A \subset E, A \text{ khả tích}\} \end{aligned}$$

xác định một độ đo μ trên σ -trường $\mathbb{E}$ các tập đo được.

Một hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}^$ thuộc L_1 khi và chỉ khi f khả tích theo độ đo μ và*

$$\mathcal{J}(f) = \int f d\mu$$

với mọi f thuộc L_1 .

Bổ đề 1.2.6. Xét L là một dàn vectơ cố định chứa hàm hằng 1 và $\mathcal{B}$ là σ -trường nhỏ nhất các tập con của X sao cho mỗi hàm $f \in L$ là đo được theo $\mathcal{B}$. Khi đó với mỗi tích phân Daniell $\mathcal{J}$ trên L_1 tồn tại một độ đo duy nhất μ trên $\mathcal{B}$ sao cho:

$$\mathcal{J}(f) = \int f d\mu \text{ với mọi } f \in L.$$

Phần này ta giới thiệu Định lý biểu diễn Riesz đối với không gian tô pô X là một không gian Hausdorff compact địa phương. Họ các hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên X và triệt tiêu bên ngoài một tập con compact của X được kí hiệu là $C_c(X)$. Ta xác định giá của một hàm $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là bao đóng của tập $\{x : f(x) \neq 0\}$. Khi đó tập $C_c(X)$ là họ các hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ có giá compact.

Định nghĩa 1.2.7. (Tập Baire và độ đo)

Lớp các tập Baire là σ -trường $\mathcal{C}$ nhỏ nhất của X sao cho mỗi hàm f trong $C_c(X)$ là $\mathcal{C}$ -đo được. Do đó $\mathcal{C}$ là σ -trường sinh bởi các tập có dạng:

$$\{x : f(x) > \alpha\}, f \in C_c(X), \alpha \in \mathbb{R}$$

Một độ đo μ được gọi là độ đo Baire trên X nếu μ xác định trên σ -trường $\mathcal{C}$ các tập con Baire và $\mu(K)$ hữu hạn với mỗi tập K compact trong $\mathcal{C}$.

Rõ ràng $C_c(X)$ là không gian tuyến tính định chuẩn nếu ta đặt

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

và ta sẽ sử dụng thực tế là $C_c(X)$ là một dàn vectơ. Điều này cho phép xác định phép nhân tuyến tính dương trên $C_c(X)$.

Định lý 1.2.8. Định lý biểu diễn Riesz trên không gian $C_c(X)$
Cho X là một không gian Hausdorff compact địa phương, $C_c(X)$ là không gian các hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ với giá compact, J là một phép nhân tuyến tính dương trên không gian $C_c(X)$. Khi đó tồn tại một độ đo Baire μ trên X sao cho:

$$J(f) = \int f d\mu$$

với mọi f thuộc $C_c(X)$.

Chứng minh. Bước thứ nhất ta sẽ chỉ ra rằng J là một phiếm hàm Daniell trên $C_c(X)$.

Giả sử $f \in C_c(X)$, $\{f_n\}$ là một dãy tăng trong $C_c(X)$ và $f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Để chứng minh $J(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(f_n)$ ta cần chứng tỏ $J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(g_n)$ với $g_n = f \wedge f_n$. Như vậy:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Nhưng nếu ta đặt $h_n = f - g_n$ ta nhận được một dãy giảm trong $C_c(X)$ có giới hạn là 0. Kí hiệu K là giá của h_1 , khi đó tồn tại một hàm ϕ trong $C_c(X)$ không âm thỏa mãn $\phi(x) = 1$ với $x \in K$. Với mỗi $x \in K, \epsilon > 0$ tồn tại một n_x sao cho $h_{n_x} < \frac{1}{2}\epsilon$. Và bởi h_{n_x} liên tục nên tồn tại một tập mở G_x sao cho $x \in G_x$ và

$$h_{n_x}(t) < \epsilon \text{ với } t \in G_x$$

Vì K là compact nên tồn tại một phủ con hữu hạn $G_{x_1}, G_{x_2}, \dots, G_{x_s}$ của K . Nếu $N = \max[n_{x_1}, \dots, n_{x_s}]$ ta có $h_n(x) < \epsilon$ với mọi x trong $K, n \geq N$. Do đó

$$0 \leq h_n < \epsilon \phi$$

Vậy

$$0 \leq J(h_n) < \epsilon J(\phi)$$

Do ϵ bất kì nên $\lim_{n \rightarrow \infty} J(h_n) = 0$ từ đó suy ra điều kiện (1.1) nên J là phiếm hàm Daniell trên $C_c(X)$.

Ta có thể áp dụng Bổ đề (1.2.5) thác triển J tới $\mathcal{J}$:

$$L_1 \supset C_c(X)$$

để nhận được một độ đo μ trên σ -trường $\mathcal{C}$ chứa các tập Baire sao cho với $f \in C_c(X)$ thì

$$J(f) = \mathcal{J}(f) = \int f d\mu$$

Ta đang xét hàm ϕ ở trên nằm trong $C_c(X)$ và nhận giá trị bằng 1 trên tập compact K , ta thấy rằng

$$\mu(K) = \mathcal{J}(I_K) \leq \mathcal{J}(\phi) = \int \phi d\mu < \infty$$

Vậy độ đo μ nhận được là độ đo hữu hạn trên các tập compact.

Khi X compact, $C_c(X)$ trùng với $C(X)$ là không gian các hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Vì vậy trong trường hợp này các phiếm hàm tuyến tính dương trên $C(X)$ tương ứng với các độ đo Baire hữu hạn.

Hơn nữa sử dụng Bổ đề (1.2.6) ta đi đến nhận xét là độ đo có tính duy nhất. Điều này dẫn đến hệ quả sau: $\square$

Hệ quả 1.2.9. *Nếu X là không gian tô pô compact và $C(X)$ là tập các hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ thì tồn tại tương ứng 1-1 giữa các phiếm hàm tuyến tính dương $\mathcal{J}$ trên $C(X)$ và các độ đo Baire hữu hạn μ trên X xác định bởi:*

$$\mathcal{J}(f) = \int f d\mu$$

Nếu ta muốn xét các phiếm hàm tuyến tính tổng quát hơn trên $C(X)$ ta có thể biểu diễn chúng như hiệu của hai phiếm hàm tuyến tính dương rồi sử dụng Định lý (1.2.8). Điều này có thể áp dụng cho các phiếm hàm tuyến tính bị chặn. Như vậy trên không gian tô pô Hausdorff compact địa phương X , các phiếm hàm tuyến tính dương trong $C_c(X)$ tương ứng là tích phân đối với một độ đo μ thích hợp nào đó. Ta định nghĩa:

Định nghĩa 1.2.10.

$$L^1(X) = \{f \in C_c(X) \mid \int |f| d\mu < \infty\}$$

$$L^p(X) = \{f \in C_c(X) \mid \int |f|^p d\mu < \infty\}, 1 \leq p < \infty$$

tương ứng là không gian các hàm khả tích và không gian các hàm khả tích cấp p ($1 \leq p < \infty$).

Cách xây dựng độ đo (hay tích phân) trên cũng áp dụng cho trường hợp các hàm giá trị phức với giá compact (hay các phiếm hàm tuyến tính liên tục giá trị phức). Tương tự, các khái niệm có thể suy rộng cho các không gian vectơ tổng quát hơn thay cho $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

1.3 Sự thác triển của toán tử

Cho một tập X vừa là một không gian tuyến tính với trường số $\mathbb{F}$ (thực hay phức) và cũng là một không gian tô pô Hausdorff. Nếu các cấu trúc

đại số và tô pô trên X là tương quan và các ánh xạ:

$$X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\mathbb{F} \times X \rightarrow X, (a, x) \rightarrow ax$$

là liên tục (khi $X \times X$ và $\mathbb{F} \times X$ có các tô pô tích), thì X được gọi là một không gian tô pô tuyến tính.

Cho X là một không gian tô pô tuyến tính, nếu x_0 thuộc X và T liên tục tại x_0 thì T là liên tục đều trên X .

Định lý 1.3.1. *Nếu X, Y là các không gian tô pô tuyến tính, Y là đầy đủ, X_0 là một không gian con trù mật hầu khắp nơi của X , $T_0 : X_0 \rightarrow Y$ là toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó T_0 thác triển (extend) duy nhất thành một toán tử tuyến tính liên tục $T : X \rightarrow Y$.*

Định lý 1.3.2. *Nếu X là một không gian định chuẩn, có một không gian Banach Y chứa X với X là không gian con trù mật hầu khắp nơi của Y (và như vậy chuẩn trên X sẽ sinh ra chuẩn trên Y). Nếu Y_1 là một không gian Banach khác với những tính chất trên, thì ánh xạ đồng nhất trên X thác triển thành một phép đẳng cấu đẳng cự từ Y lên Y_1 . Khi đó không gian Banach Y được gọi là mở rộng đầy đủ (completion) của không gian định chuẩn X .*

Định lý 1.3.3. *Nếu X là một không gian định chuẩn và Y là một không gian Banach có cùng trường số ($\mathbb{C}$ hay $\mathbb{R}$) thì mọi toán tử tuyến tính bị chặn $T : X \rightarrow Y$ thác triển duy nhất thành một toán tử tuyến tính bị chặn $\hat{T} : \hat{X} \rightarrow Y$, ở đó $\hat{X}$ là mở rộng đầy đủ của X . Ánh xạ $T \rightarrow \hat{T}$ là một phép đẳng cấu đẳng cự từ $B(X, Y)$ lên $B(\hat{X}, Y)$.*

1.4 Không gian Hilbert

1.4.1 Định nghĩa tích trong

Cho không gian vectơ X . Một dạng nửa song tuyến tính trên X là ánh xạ

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$$

ở đó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ hay $\mathbb{R}$, $\langle ., . \rangle$ tuyến tính với biến thứ nhất và tuyến tính liên hợp với biến thứ hai.

Với mỗi dạng nửa song tuyến tính $\langle ., . \rangle$, ta định nghĩa dạng liên hợp $\langle ., . \rangle^*$ là $\langle x, y \rangle^* = \overline{\langle y, x \rangle}$, $x, y \in X$. Ta nói dạng $\langle ., . \rangle$ là tự liên hợp nếu $\langle ., . \rangle^* = \langle ., . \rangle$. Với $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ta tính được

$$4 \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle$$

Dạng $\langle ., . \rangle$ tự liên hợp khi và chỉ khi $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in X$. Dạng $\langle ., . \rangle$ được gọi là dương nếu $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in X$. Do đó với $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, một dạng dương là tự liên hợp. Trên không gian thực điều này hiển nhiên đúng.

Một tích trong trên X là dạng nửa song tuyến tính tự liên hợp, dương thỏa mãn $\langle x, x \rangle = 0$ kéo theo $x = 0$ với mọi $x \in X$.

1.4.2 Hàm thuần nhất

Cho $\langle ., . \rangle$ là một dạng nửa song tuyến tính, tự liên hợp, dương trên X . Ta định nghĩa hàm thuần nhất: $\|.\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, x \in X$. Theo (1.4.1) ta có hai Đẳng thức phân cực:

$$4 \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 \quad (\mathbb{F} = \mathbb{C})$$

$$4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \quad (\mathbb{F} = \mathbb{R})$$

1.4.3 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho $\langle ., . \rangle$ là một dạng nửa song tuyến tính, tự liên hợp, dương trên X , α thuộc $\mathbb{F}$. Ta có:

$$|\alpha|^2 \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \alpha \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|\alpha x + y\|^2 \geq 0$$

với x và y thuộc X . Từ đó ta có Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

và Đẳng thức hình bình hành:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Nếu $x \perp y$ tức là $\langle x, y \rangle = 0$ thì $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Hai không gian con Y và Z gọi là trực giao với nhau, kí hiệu là $Y \perp Z$ nếu $y \perp z$ với mọi y thuộc Y và mọi z thuộc Z .

1.4.4 Định nghĩa không gian Hilbert

Một không gian Hilbert là một không gian vectơ với một tích trong, thỏa mãn là không gian Bannach với chuẩn liên hợp. Từ đó mọi không gian với một tích trong được gọi là không gian nửa Hilbert.

Ví dụ 1. Không gian $C_c(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{F}$ có giá compact. Không gian này có tích trong

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

và chuẩn liên hợp $||f||_2 = (\int |f(x)|^2 dx)^{1/2}$.

1.5 Toán tử trong không gian Hilbert

Nội dung chính của phần này chúng tôi giới thiệu sự tương ứng giữa các dạng nửa song tuyến tính và các toán tử; toán tử liên hợp trong $B(H)$; tính khả nghịch, chuẩn tắc và tính dương trong $B(H)$; toán tử $T^{1/2}$; các phép chiếu và toán tử chéo hóa được.

1.5.1 Toán tử liên hợp

Ta ký hiệu H là không gian Hilbert, I là ánh xạ đồng nhất trên H . Do vậy I là đơn vị của $B(H)$.

Bổ đề 1.5.1. *Tồn tại một phép đẳng cự song ánh giữa các toán tử trong $B(H)$ và các dạng nửa song tuyến tính bị chặn trên H cho bởi*

$$T \rightarrow U_T \quad \text{trong đó} \quad U_T(x, y) = \langle x, Ty \rangle$$

Chứng minh. Nếu $T \in B(H)$ rõ ràng U_T là dạng nửa song tuyến tính trên H , bị chặn bởi $\|T\|$ vì

$$\begin{aligned}\|U_T\| &= \sup\{U_T(x, y) : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle x, Ty \rangle : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq \|T\|\end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = U_T(Tx, x) \leq \|U_T\| \|Tx\| \|x\| \leq \|U_T\| \|T\| \|x\|^2$$

Vậy $\|T\| \leq \|U_T\|$. Từ đó $\|T\| = \|U_T\|$ hay ánh xạ trên là đẳng cự.

Ngược lại, nếu U là dạng nửa song tuyến tính bị chặn trên H thì $U(., y)$ liên tục trong H với mỗi y thuộc H . Khi đó, tồn tại duy nhất vectơ trong H , kí hiệu là Ty thỏa mãn:

$$\langle x, Ty \rangle = U(x, y), x \in H$$

Ánh xạ $y \rightarrow Ty$ là tuyến tính bị chặn bởi $\|U\|$. Từ đó $T \in B(H)$ và $U = U_T$. $\square$

Định lý 1.5.2. Với mỗi T thuộc $B(H)$, tồn tại duy nhất toán tử T^* thuộc $B(H)$ thỏa mãn:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (1.2)$$

với mọi x, y thuộc H .

Ánh xạ $T \rightarrow T^*$ là tuyến tính liên hợp, đẳng cấu từ $B(H)$ lên $B(H)$ và thỏa mãn đẳng thức

$$(ST)^* = T^*S^*, \|T^*T\| = \|T\|^2$$

với T, S thuộc $B(H)$.

Chứng minh. Theo Bổ đề (1.5.1) với mỗi T thuộc $B(H)$, toán tử T^* xác định bởi (1.2) tồn tại và duy nhất. Gọi T^{**} thuộc $B(H)$ là toán tử thỏa mãn $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, T^{**}y \rangle, x, y \in H$. Do tích trong là tự liên hợp nên:

$$\langle x, T^{**}y \rangle = \langle T^*x, y \rangle = \overline{\langle y, T^*x \rangle} = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \langle x, Ty \rangle$$

Từ đó T và T^{**} có cùng dạng nửa song tuyến tính và $T^{**} = T$. Tương tự ta có $T \rightarrow T^*$ là tuyến tính liên hợp vì $(T+S)^* = T^* + S^*, (\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$ với mọi T, S thuộc $B(H)$, α thuộc $\mathbb{C}$. Lại có

$$\langle x, (ST)^*y \rangle = \langle STx, y \rangle = \langle Tx, S^*y \rangle = \langle x, T^*S^*y \rangle$$

Do đó $(ST)^* = T^*S^*$.

Ta có $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$. Từ (1.2)

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*T\|\|x\|^2$$

Do vậy $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ hay $\|T\| \leq \|T^*\|$. Do đó $\|T\| \leq \|T^*\| \leq \|T^{**}\|$.
Mà $T = T^{**}$ nên $\|T\| = \|T^*\|$.

Lại do $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ nên $\|T^*T\| = \|T\|^2$. $\square$

Nhận xét 1.5.3. Ánh xạ trong định lý trên là tổng quát hóa quá trình tạo ma trận liên hợp. Nếu $A = (\alpha_{ij})$ thì ma trận liên hợp là $A^ = (\alpha_{ij}^*)$, ở đó $\alpha_{ij}^* = \overline{\alpha_{ij}}$. Ta nói T^* là toán tử liên hợp của T . T là tự liên hợp nếu $T^* = T$.*

Mệnh đề 1.5.4. Với mỗi T thuộc $B(H)$ ta có $\ker T^* = (T(H))^\perp$.

Chứng minh. Từ $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ ta có nếu $y \in \ker T^*$ hay $T^*y = 0$ thì $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0, \forall x \in H$ hay $y \in (T(H))^\perp$.

Ngược lại nếu $y \in (T(H))^\perp$ thì từ $\langle Tx, y \rangle = 0, \forall x \in H$ ta có $\langle x, T^*y \rangle = 0, \forall x \in H$ nên $T^*y \in H^\perp = \{0\}$. $\square$

Mệnh đề 1.5.5. Cho toán tử T thuộc $B(H)$. Các điều kiện sau là tương đương:

(i) T là khả nghịch ($T^{-1} \in B(H)$).

(ii) T^* khả nghịch.

(iii) Cả T và T^* bị chặn dưới bởi giá trị dương (be bounded away from zero).

(iv) Cả T và T^* là đơn ánh và $T(H)$ là tập đóng.

(v) T là đơn ánh và $T(H) = H$.

Chứng minh. (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

T khả nghịch

$$\Leftrightarrow T^{-1}T = TT^{-1} = I$$

$$\Leftrightarrow (T^{-1}T)^* = (TT^{-1})^* = I^*$$

$$\Leftrightarrow T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^*T^* = I$$

hay T^* khả nghịch với nghịch đảo là $(T^{-1})^*$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Mỗi $x \in H$ ta có

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$$

Do vậy $\|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|Tx\|$. Vậy T bị chặn dưới bởi giá trị dương $\|T^{-1}\|^{-1}$.

Do (i) $\Leftrightarrow$ (ii) nên T^* cũng là bị chặn dưới bởi giá trị dương.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Theo (iii) tồn tại $\epsilon > 0$ thỏa mãn

$$\|Tx\| \geq \epsilon\|x\| \quad \text{và} \quad \|T^*x\| \geq \epsilon\|x\|$$

với mọi x thuộc H . Vậy T và T^* là đơn ánh. Hơn nữa $\|Tx - Ty\| \geq \epsilon\|x - y\|$ nên $T(H)$ là đầy đủ và $T(H)$ là không gian con đóng của H .

(iv) $\Rightarrow$ (v). $\overline{T(H)} = (T(H)^\perp)^\perp = (\ker T^*)^\perp = \{0\}^\perp = H$. Do $T(H)$ là không gian con đóng của H nên $T(H) = H$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Do T là đơn ánh và $T(H) = H$ nên T là song ánh khả nghịch. $\square$

1.5.2 Toán tử chuẩn tắc

Toán tử T thuộc $B(H)$ gọi là chuẩn tắc nếu nó giao hoán với toán tử liên hợp, tức là $T^*T = TT^*$. Khi đó với mọi x thuộc H :

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \|T^*x\|^2$$

và ta gọi T và T^* là đồng nhất metric.

Ngược lại nếu T và T^* là đồng nhất metric thì ta có

$$\langle T^*Tx, y \rangle = \langle TT^*x, y \rangle$$

với mọi x, y thuộc H . Do vậy T là chuẩn tắc.

Từ Mệnh đề (1.5.5) ta có toán tử chuẩn tắc là khả nghịch khi và chỉ khi nó là bị chặn dưới bởi giá trị dương.

1.5.3 Toán tử dương

Toán tử T thuộc $B(H)$ gọi là dương, kí hiệu là $T \geq 0$ nếu $T = T^*$ và $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ với mọi x thuộc H .

Nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ chỉ cần $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ thì T tự liên hợp.

Ta có tổng hai toán tử dương là dương, tích hai toán tử dương và giao hoán là dương.

Gọi $(B(H))_{sa}$ là tập các toán tử tự liên hợp trong $B(H)$. Khi đó $(B(H))_{sa}$ là không gian con đóng của $B(H)$.

Ta định nghĩa $S \leq T$ nếu $T - S \geq 0$.

Mệnh đề 1.5.6. *Nếu $S \leq T$ trong $(B(H))_{sa}$ thì $A^*SA \leq A^*TA$ với mọi $A \in B(H)$. Nếu $0 \leq S$ và $S \leq T$ thì $\|S\| \leq \|T\|$.*

Mệnh đề 1.5.7. *Với mỗi toán tử dương T thuộc $B(H)$, có duy nhất một toán tử dương, kí hiệu là $T^{1/2}$, thỏa mãn $(T^{1/2})^2 = T$. Hơn nữa $T^{1/2}$ giao hoán với mọi toán tử giao hoán với T .*

Mệnh đề 1.5.8. *Toán tử dương T là khả nghịch trong $B(H)$ khi và chỉ khi $T \geq \epsilon I$ với $\epsilon > 0$ nào đó. Khi đó $T^{-1} \geq 0$, $T^{1/2}$ khả nghịch và $(T^{-1})^{1/2} = (T^{1/2})^{-1}$. Hơn nữa, nếu $T \leq S$ thì $S^{-1} \leq T^{-1}$.*

1.5.4 Phép chiếu

Cho X là không gian con đóng của không gian Hilbert H . Với mỗi y thuộc H , có duy nhất một phân tích $y = x + x^\perp$, ở đó x thuộc X , $x^\perp$ thuộc $X^\perp$. Cho y_1, y_2 thuộc H , α, β thuộc $\mathbb{F}$, ta có:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha x_1^\perp + \beta x_2^\perp)$$

trong đó x_1, x_2 thuộc X , $x_1^\perp, x_2^\perp$ thuộc $X^\perp$. Rõ ràng ánh xạ:

$$P : H \rightarrow H, Py = x$$

là toán tử tuyến tính trong $B(H)$, $\|P\| \leq 1$ và $P^2 = P$. Hơn nữa P là toán tử tự liên hợp và dương

$$\langle Py_1, y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 + x_2^\perp \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1 + x_1^\perp, x_2 \rangle = \langle y_1, Py_2 \rangle$$

$$\langle Py, y \rangle = \langle x, x + x^\perp \rangle = \|x\|^2 \geq 0$$

với mọi y thuộc H . Khi đó ta gọi P là một phép chiếu (trực giao).

Ngược lại, nếu P là toán tử tự liên hợp trong $B(H)$ và $P^2 = P$ thì $X = \{x \in H | Px = x\} = P(H)$ là không gian con đóng của H . Nếu

$x^\perp \in X^\perp$, từ $P = P^*$ ta có $\|Px^\perp\|^2 = \langle x^\perp, P^2x^\perp \rangle = 0$ hay $Px^\perp = 0$.
 Vậy P là phép chiếu trực giao từ H lên X .
 Gọi $P^\perp : H \rightarrow H, y \mapsto x^\perp$ là phép chiếu trực giao với P , $P^\perp$ đi từ H lên $X^\perp$. Ta có $P^\perp = I - P$. Khi đó ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.5.9. Cho họ $\{P_i\}_{i \in I}$ là các phép chiếu trong H , ta định nghĩa

(i) $\bigwedge_{i \in I} P_i$ là phép chiếu lên $\bigcap_{i \in I} P_i H$.

(ii) $\bigvee_{i \in I} P_i$ là phép chiếu lên $\bigcup_{i \in I} P_i H$.

trong đó $(\bigwedge_{i \in I} P_i)^\perp = \bigvee_{i \in I} P_i, (\bigvee_{i \in I} P_i)^\perp = \bigwedge_{i \in I} P_i$

$P^\perp = I - P$ là phép chiếu trực giao của phép chiếu P .

1.5.5 Toán tử chéo hóa được

Toán tử T thuộc $B(H)$ được gọi là chéo hóa được (diagonalizable), nếu tồn tại một cơ sở trực chuẩn $\{e_j \mid j \in J\}$ của H và một tập bị chặn $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ trong $\mathbb{F}$ thỏa mãn:

$$Tx = \sum \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \quad (1.3)$$

trong đó các số $\langle x, e_j \rangle$ là các tọa độ của x đối với cơ sở $\{e_j\}$ và mỗi λ_j là giá trị riêng của T tương ứng với vectơ riêng e_j .

Bây giờ ta ký hiệu P_j là phép chiếu từ H lên không gian con $\mathbb{F}e_j$. Ta có $P_j x = \langle x, e_j \rangle e_j$. Do vậy

$$T = \sum \lambda_j P_j$$

Gọi T^* là toán tử liên hợp của T . Từ (1.3) ta có:

$$T^*x = \sum \overline{\lambda_j} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Do vậy T^* là toán tử chéo hóa được với cơ sở $\{e_j\}$ và các giá trị riêng $\{\overline{\lambda_j}\}$. Hơn nữa $T^*T = TT^*$ nên toán tử T là chuẩn tắc.

Nhận xét 1.5.10. (i) Toán tử T là tự liên hợp khi và chỉ khi mọi λ_j là số thực.

(ii) T dương khi và chỉ khi $\lambda_j \geq 0$ với mọi j .

(iii) Nếu H là không gian hữu hạn chiều, mỗi toán tử chuẩn tắc đều chéo hóa được. Khẳng định này không còn đúng nếu H có vô hạn chiều.

1.5.6 Toán tử unitar

Định nghĩa 1.5.11. Một toán tử unitar là một phép đẳng cấu đẳng cự từ H lên H .

Nhận xét 1.5.12. Toán tử unitar bảo toàn tích trong. Thực vậy gọi U là toán tử unitar từ H lên H . Từ đẳng thức phân cực ta có:

$$4 \langle Ux, Uy \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \|U(x + i^k y)\|^2 = \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$$

Từ đó $UU^* = U^*U = I$. Vậy U là chuẩn tắc và khả nghịch với $U^{-1} = U^*$.

Ngược lại nếu U thuộc $B(H)$ thỏa mãn $U^{-1} = U^*$ thì U là unitar vì

$$\|Ux\|^2 = \langle U^*Ux, x \rangle = \|x\|^2$$

Do đó U là phép đẳng cự. Hơn nữa U là toàn ánh vì U khả nghịch. Do vậy U là một đẳng cấu đẳng cự.

Định nghĩa 1.5.13. Hai toán tử S và T thuộc $B(H)$ gọi là tương đương unitar nếu tồn tại toán tử unitar U thuộc $B(H)$ thỏa mãn $S = UTU^*$.

Các tương đương unitar bảo toàn chuẩn, tính tự liên hợp, chuẩn tắc, tính chéo hóa được, và tính unitar.

1.5.7 Phép đẳng cự một phần

Định nghĩa 1.5.14. Toán tử U thuộc $B(H)$ được gọi là đẳng cự một phần (partial isometry) nếu có một không gian con đóng X của H thỏa mãn $U|_X$ là đẳng cự và $U|_{X^\perp} = 0$.

Nhận xét 1.5.15. (i) $\ker U = X^\perp$.

(ii) Đặt $P = U^*U$ ta có $\langle Px, x \rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2$ với mọi x thuộc X . Từ đó $Px = x$ bởi BĐT Cauchy-Schwarz.

Hơn nữa $Px^\perp = 0$ với mọi $x^\perp$ thuộc $X^\perp$. Do đó P là một phép chiếu từ H lên X .

Ngược lại, cho U thuộc $B(H)$ thỏa mãn $U^*U = P$, với P là phép chiếu nào đó. Đặt $X = P(H)$ ta có $\|Ux\|^2 = \langle Px, x \rangle$. Từ đó nếu x thuộc X thì $\|Ux\|^2 = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ hay U là phép đẳng cự trên X . Nếu x thuộc $X^\perp$ thì $Px = 0$. Do đó $Ux = 0$ trên $X^\perp$. Vậy U là phép đẳng cự một phần.

(iii) U^* cũng là phép đẳng cự một phần.

(iv) Nếu H là không gian vô hạn chiều, thì tồn tại các đẳng cự không unitar, vì chúng không phải là ánh xạ lên.

Ví dụ 2. Giả sử H là không gian tách được với cơ sở trực chuẩn $\{e_n | n \in \mathbb{N}\}$. Ta định nghĩa toán tử $S : H \rightarrow H$ với:

$$S(\sum \alpha_n e_n) = \sum \alpha_n e_{n+1}, \sum \alpha_n e_n \in H$$

Khi đó S là phép đẳng cự từ H lên $\{e_1\}^\perp$. $S^\perp$ là phép đẳng cự một phần từ $\{e_1\}^\perp$ lên H . Đặc biệt $S^*S = I$, trong khi SS^* là phép chiếu lên $\{e_1\}^\perp$.

1.5.8 Phép phân tích cực

Định lý 1.5.16. Với mỗi toán tử T thuộc $B(H)$, có một toán tử dương duy nhất $|T|$ thuộc $B(H)$ thỏa mãn:

$$\|Tx\| = \||T|x\|, x \in H \quad (1.4)$$

và ta có $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Hơn nữa có một phép đẳng cự một phần duy nhất U với $\ker U = \ker T$ và $U|T| = T$. Đặc biệt, $U^*U|T| = |T|$, $U^*T = |T|$, và $UU^*T = T$.

Chú ý 1.5.17. Phép xây dựng trên gọi là phép phân tích cực (polar decomposition) của toán tử T . Đẳng cự một phần U như là dấu của T . $|T|$ như là giá trị tuyệt đối của T . Từ $T^* = |T|U^* = U^*(U|T|U^*)$ và từ tính duy nhất của phân tích cực, ta có U^* là dấu của T^* và $U|T|U^*$ là giá trị tuyệt đối của T^* .

Để T có dạng $U|T|$ với một toán tử U unitar nào đó, cần và đủ là các không gian con đóng $\ker T$ và $\ker T^*$ có cùng số chiều (vô hạn hay hữu hạn).

Các trường hợp đơn giản của định lý tổng quát này là các kết quả sau.

Mệnh đề 1.5.18. Nếu T là khả nghịch trong $B(H)$ thì phép đẳng cự một phần trong phân tích cực của nó là toán tử unitar.

Mệnh đề 1.5.19. Nếu T là chuẩn tắc trong $B(H)$, tồn tại một toán tử unitar W giao hoán với $T, T^*, |T|$ và thỏa mãn $T = W|T|$.

1.6 Các khái niệm hội tụ

Trước tiên chúng tôi giới thiệu định lý về tô pô sinh bởi họ các nửa chuẩn.

Định lý 1.6.1. Cho X là một không gian vectơ với trường số $\mathbb{F}$ (thực hay phức). J là một họ các nửa chuẩn trên X thỏa mãn: nếu $x \neq 0$ trong X thì có một phần tử p của J , $p(x) \neq 0$. Khi đó có một tô pô lồi địa phương trên X , ở đó mỗi x_0 thuộc X , họ các tập:

$$V(x_0 : p_1, \dots, p_m; \epsilon) = \{x \in X : p_j(x - x_0) < \epsilon (j = 1, 2, \dots, m)\}$$

($\epsilon > 0$ và $p_1, \dots, p_m \in J$) là một cơ sở của các lân cận của x_0 .

Định nghĩa 1.6.2. (Tô pô yếu).

Cho X là một không gian tuyến tính với trường số $\mathbb{F}$. J là một họ các phiếm hàm tuyến tính trên X thỏa mãn: nếu $x \neq 0$ trong X thì với p nào đó trong J , $p(x) \neq 0$. Khi p thuộc J , $q_p(x) = |p(x)|$ xác định một nửa chuẩn q_p trên X . Với họ các nửa chuẩn $\{q_p : p \in J\}$, có một tô pô lồi địa phương trên X , và được gọi là tô pô yếu (weak topology) trên X được sinh bởi J , ký hiệu là $\sigma(X, J)$. Mỗi điểm x_0 thuộc X có cơ sở của các lân cận bao gồm tất cả các tập có dạng:

$$V(x_0 : p_1, \dots, p_m; \epsilon) = \{x \in X : |p_j(x) - p_j(x_0)| < \epsilon (j = 1, 2, \dots, m)\}$$

ở đó $\epsilon > 0$ và $p_1, \dots, p_m \in J$.

Khi $x \in V(x_0 : p; \epsilon)$ thì $|p(x) - p(x_0)| < \epsilon$, mỗi phiếm hàm tuyến tính p trong J là liên tục trong tô pô $\sigma(X, J)$. Hơn nữa, $\sigma(X, J)$ là tô pô yếu nhất trên X .

Cho H là một không gian Hilbert, $B(H)$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ H vào H với chuẩn $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A^*\|$.

Định nghĩa 1.6.3. Trên $B(H)$, ta định nghĩa sự hội tụ của các toán tử như sau:

Ta nói các toán tử $\{A_n\}$ thuộc $B(H)$ hội tụ đều đến toán tử A thuộc $B(H)$ khi và chỉ khi $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \rightarrow 0$.

$\{A_n\}$ hội tụ mạnh đến A khi và chỉ khi $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ với mọi x thuộc

H.

$\{A_n\}$ hội tụ yếu đến A khi và chỉ khi $\langle A_n x, y \rangle \rightarrow \langle Ax, y \rangle$ với mọi x, y thuộc H.

Như vậy hội tụ đều kéo theo hội tụ mạnh và hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu.

Tương tự ta có thể định nghĩa sự hội tụ của dãy các phần tử trong không gian Hilbert như sau:

$\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x khi và chỉ khi $\|x_n - x\| \rightarrow 0$,

$\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x khi và chỉ khi $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ với mọi y thuộc H.

Toán tử $T : H \rightarrow H$ là liên tục yếu-yếu nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong H hội tụ yếu đến x thì $\{Tx_n\}$ hội tụ yếu đến Tx.

Tương tự, T gọi là liên tục yếu-chuẩn nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong H hội tụ mạnh đến x thì $\{Tx_n\}$ hội tụ yếu đến Tx. Khi đó T là bị chặn.

T gọi là liên tục chuẩn-yếu nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong H hội tụ yếu đến x thì $\{Tx_n\}$ hội tụ mạnh đến Tx. Một toán tử liên tục chuẩn-yếu có hạng hữu hạn.

Định nghĩa 1.6.4. Tô pô toán tử mạnh (strong-operator topology)

Tô pô toán tử mạnh trên $B(H)$ có một cơ sở là các lân cận của toán tử T_0 , các lân cận này là các tập có dạng:

$$V(T_0 : x_1, \dots, x_m; \epsilon) = \{T \in B(H) : \|(T - T_0)x_j\| < \epsilon (j = 1, \dots, m)\}$$

ở đó $x_1, \dots, x_m$ thuộc H và ϵ dương.

Dãy $\{T_j\}$ hội tụ toán tử mạnh đến T_0 khi và chỉ khi $\|(T_j - T_0)x\| \rightarrow 0$ với mỗi x thuộc H.

Định nghĩa 1.6.5. Tô pô toán tử yếu (weak-operator topology)

Tô pô toán tử yếu trên $B(H)$ là tô pô yếu trên $B(H)$ sinh bởi họ J các phiếm hàm tuyến tính $w_{x,y}(T) = \langle Tx, y \rangle$, ($x, y \in H, T \in B(H)$).

Theo Định lý (1.6.1), tô pô toán tử yếu trên $B(H)$ là một tô pô lồi địa phương sinh bởi các nửa chuẩn $|w_{x,y}(T)|$. Ta xét họ các tập:

$$\begin{aligned} V(T_0 : w_{x_1.y_1}, \dots, w_{x_m.y_m}; \epsilon) \\ = \{T \in B(H) : |\langle (T - T_0)x_j, y_j \rangle| < \epsilon (j = 1, 2, \dots, m)\} \end{aligned}$$

ở đó ϵ dương, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ đều thuộc H. Họ này là cơ sở của các lân cận lồi (mở) của T trong tô pô toán tử yếu.

Từ $|\langle (T - T_0)x, y \rangle| < \epsilon$ khi $\|(T - T_0)x\| < \epsilon(1 + \|y\|)^{-1}$, mỗi tập mở trong tô pô toán tử yếu là mở trong tô pô toán tử mạnh. Do đó tô pô toán tử yếu là yếu hơn tô pô toán tử mạnh.

Chương 2

Xây dựng không gian L^p cho lớp các toán tử compact

Trong chương này, chúng tôi xây dựng không gian L^p cho lớp các toán tử compact $B_0(H)$, tương ứng các toán tử liên tục triệt tiêu tại vô cùng. Đây là sự mở rộng của $C_c(X)$ cho trường hợp đại số toán tử tuyến tính liên tục trên không gian Hilbert phức H . Tích phân của một toán tử thuộc $B_0(H)$ là vết của toán tử đó.

Để nghiên cứu về toán tử compact, chúng tôi giới thiệu khái niệm Đại số Banach như sau.

2.1 Đại số Banach

Định nghĩa 2.1.1. (Đại số Banach)

Cho $\mathcal{U}$ là một không gian tuyến tính với phép nhân:

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$

$$(A, B) \mapsto AB$$

thỏa mãn các tính chất:

- (1) $A(BC) = (AB)C$
- (2) $(A + B)C = AC + BC$; $A(B + C) = AB + AC$
- (3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

với mọi A, B, C thuộc $\mathcal{U}$, α thuộc $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$). Khi đó $\mathcal{U}$ được gọi là một đại số (trên $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$).

Một đại số $\mathcal{U}$ (trên $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$) với phần tử đơn vị I được gọi là một đại số định chuẩn khi $\mathcal{U}$ là một không gian định chuẩn thỏa mãn:

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ với mọi A, B thuộc $\mathcal{U}$ và $\|I\| = 1$. Nếu $\mathcal{U}$ là một không gian Banach với chuẩn này thì $\mathcal{U}$ được gọi là một đại số Banach (thực hay phức).

Cho H là một không gian Hilbert. Gọi $B(H)$ là tập gồm các toán tử tuyến tính bị chặn trên H với phép cộng, nhân các toán tử tuyến tính theo nghĩa thông thường thì $B(H)$ là một không gian Banach với chuẩn:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Khi đó $B(H)$ là một đại số Banach-không giao hoán.

Sau đây chúng tôi giới thiệu một lớp đặc biệt của đại số Banach, là lớp C^* -đại số. Lớp này có một phép đối hợp với các tính chất song song với các tính chất của phép liên hợp của các toán tử trong không gian Hilbert. Với X là một không gian Hausdorff compact và H là một không gian Hilbert, $C(X)$ và $B(H)$ là các ví dụ về C^* -đại số.

Định nghĩa 2.1.2. Một phép đối hợp (involution) trên một đại số Banach phức $\mathcal{U}$ là một ánh xạ $A \rightarrow A^*$, từ $\mathcal{U}$ vào $\mathcal{U}$ thỏa mãn các điều kiện:

- (1) $(aS + bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$,
- (2) $(ST)^* = T^*S^*$,
- (3) $(S^*)^* = S$,

ở đó $S, T \in \mathcal{U}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\bar{a}, \bar{b}$ là các số phức liên hợp của a và b .

Một C^* -đại số là một đại số Banach (có phần tử đơn vị I) với một phép đối hợp thỏa mãn:

- (4) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ ($T \in \mathcal{U}$) Như vậy nếu $\mathcal{U}$ là một C^* -đại số thì $\|T\| = \|T^*\|$ với mọi T thuộc $\mathcal{U}$.

2.2 Toán tử compact

2.2.1 Khái niệm lớp toán tử compact

Định nghĩa 2.2.1. Cho toán tử T trên không gian Hilbert vô hạn chiều H với trường số $\mathbb{F}$ (thực hay phức). Hạng của T , được ký hiệu là r_T , và được định nghĩa: $r_T = \dim(T(H))$. Tập:

$$B_f(H) = \{T \in B(H) \mid r_T = \dim(T(H)) < \infty\}$$

là không gian con hữu hạn chiều của $B(H)$. Hơn nữa $B_f(H)$ là một đại số con và là ideal của $B(H)$.

Nếu $T \in B_f(H)$, do $\ker T^* = (T(H))^\perp$ nên $H = T(H) \oplus \ker T^*$. Suy ra $T^*(H) = T^*(T(H))$ hay T^* có hạng hữu hạn. Vậy $B_f(H)$ là ideal tự liên hợp trong $B(H)$ và $(B_f(H))^* = B_f(H)$.

Bổ đề 2.2.2. *Tồn tại một họ các phép chiếu $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ trong $B_f(H)$ thỏa mãn:*

$$\|P_\lambda(x) - x\| \longrightarrow 0$$

với mỗi x thuộc H .

Chứng minh. Gọi $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H . Gọi Λ là họ gồm các tập con hữu hạn của J .

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, ta đặt P_λ là phép chiếu từ H lên không gian con $\text{span}\{e_j \mid j \in \lambda\} = \{\sum_{j \in \lambda} c_j e_j \mid c_j \in \mathbb{F}\}$. Khi đó $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ là một họ trong $B_f(H)$.

Nếu x thuộc H , ta có $x = \sum \alpha_j e_j$. Theo đẳng thức Parseval ta có:

$$\|P_\lambda(x) - x\|^2 = \sum_{j \notin \lambda} |\alpha_j|^2 \longrightarrow 0$$

.

□

Kí hiệu $\overline{U}$ là bao đóng theo chuẩn của tập U (tức là với mỗi phần tử t thuộc $\overline{U}$, có một dãy phần tử $\{s_i\}$ thuộc U sao cho $\|t - s_i\| \rightarrow 0$). Ta có định lý cơ bản sau:

Định lý 2.2.3. Cho U là hình cầu đơn vị đóng trong không gian Hilbert H . Các điều kiện sau đối với toán tử T thuộc $B_f(H)$ là tương đương:

(i) $T \in \overline{B_f(H)}$.

(ii) $T|_U$ là hàm liên tục chuẩn yếu từ U vào H .

(iii) $T(U)$ là compact trong H .

(iv) $\overline{T(U)}$ là compact trong H .

(v) Mỗi họ trong U có một họ con sao cho ảnh của họ con này bởi T hội tụ trong H .

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii). Cho $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ là một họ hội tụ yếu trong U với giới hạn x . Cho $\epsilon > 0$, theo giả thiết tồn tại $S \in B_f(H)$ thỏa mãn

$$\|S - T\| < \epsilon/3$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \|Tx_\lambda - Tx\| &= \|(Tx_\lambda - Sx_\lambda) - (Tx - Sx) + (Sx_\lambda - Sx)\| \\ &\leq \|(T - S)x_\lambda\| + \|(T - S)x\| + \|Sx_\lambda - Sx\| \\ &\leq 2\|T - S\| + \|Sx_\lambda - Sx\| \leq \frac{2}{3}\epsilon + \|Sx_\lambda - Sx\| \end{aligned}$$

Mỗi toán tử S thuộc $B(H)$ là liên tục yếu-yếu nên Sx_λ hội tụ yếu tới Sx .

Trong không gian con hữu hạn chiều $S(H)$ các tập trùng nhau. Do vậy Sx_λ hội tụ đến Sx theo chuẩn.

Từ đó $\|Tx_\lambda - Tx\| < \epsilon$. Vì ϵ nhỏ tùy ý nên $\|Tx_\lambda - Tx\| \rightarrow 0$ hay T là hàm liên tục chuẩn-yếu.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Cho T_U là hàm liên tục chuẩn-yếu từ U vào H . Do U là compact yếu nên $T(U)$ là compact theo chuẩn.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). $T(U)$ là compact trong H nên $T(U)$ đóng và bị chặn trong H . Do đó $\overline{T(U)}$ đóng và bị chặn trong H , tức là compact.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Giả sử $\overline{T(U)}$ là compact trong H . Ta có nếu $T(U)$ là compact tương đối thì mỗi họ phần tử trong $T(U)$ sẽ có một họ con hội tụ. Vậy (iv) được chứng minh.

(v) $\Rightarrow$ (i). Đặt $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (như trong bổ đề trên) là họ các phép chiếu trong $B_f(H)$ thỏa mãn $\|P_\lambda x - x\| \rightarrow 0$ với mọi x thuộc H . Từ đó $P_\lambda T \in B_f(H)$ với mỗi λ và $P_\lambda T \rightarrow T$. Bởi vì nếu $P_\lambda T$ không hội tụ tới T thì tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\lambda \in \Lambda$, tồn tại vectơ đơn vị x_λ thỏa mãn

$$\|(P_\lambda T - T)x_\lambda\| \geq \epsilon$$

Theo giả thiết, ta giả sử họ $\{Tx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ là hội tụ theo chuẩn trong H tới một giới hạn y . Khi đó theo bổ đề trên

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq \|(I - P_\lambda)Tx_\lambda\| \leq \|(I - P_\lambda)(Tx_\lambda - y)\| + \|(I - P_\lambda)(y)\| \\ &\leq \|Tx_\lambda - y\| + \|(I - P_\lambda)y\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Đây là một mâu thuẫn. Vậy $\|P_\lambda T - T\| \rightarrow 0$. $\square$

Nhận xét 2.2.4. Lớp toán tử thỏa mãn định lý trên gọi là lớp toán tử compact, kí hiệu là $B_o(H)$, để ngụ ý rằng đây là các toán tử triệt tiêu ở vô hạn. $B_o(H)$ là một ideal tự liên hợp, đóng theo chuẩn trong $B(H)$. Mặc dù $I \notin B_o(H)$ khi H có vô hạn chiều, nhưng $B_o(H)$ có phần tử đơn vị xấp xỉ bao gồm các phép chiếu có hạng hữu hạn [Xem chứng minh (v) $\Rightarrow$ (i)].

2.2.2 Tính chất của toán tử compact

Bổ đề 2.2.5. Một toán tử chéo hóa được T thuộc $B(H)$ là compact khi và chỉ khi các giá trị riêng $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ của T tương ứng với cơ sở trực chuẩn $\{e_j \mid j \in J\}$ phụ thuộc vào $C_o(J)$, trong đó $C_o(J)$ là tập các hàm trên J triệt tiêu tại vô cùng.

Chứng minh. Giả sử toán tử chéo hóa được T thuộc $B(H)$ là compact. Ta có

$$Tx = \sum \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \text{ với mọi } x \text{ thuộc } H.$$

Nếu $T \in B_o(H)$ và $\epsilon > 0$, đặt $J_\epsilon = \{j \in J \mid |\lambda_j| \geq \epsilon\}$.

Nếu J_ϵ có vô hạn phần tử thì họ $\{e_j\}_{j \in J_\epsilon}$ hội tụ yếu tới 0, với mọi tập sắp thứ tự tốt của J_ϵ . Điều trên có được là do BĐT Parseval và $\langle e_j, x \rangle \rightarrow 0$. Do đó $\|Te_j\| = |\lambda_j| \geq \epsilon$, $j \in J_\epsilon$. Điều này mâu thuẫn với (ii) trong định lý (2.2.3). Vậy J_ϵ là hữu hạn với mỗi $\epsilon > 0$, có nghĩa là λ_j triệt tiêu tại vô cùng.

Ngược lại nếu J_ϵ hữu hạn với mỗi $\epsilon > 0$. Đặt:

$$T_\epsilon = \sum_{j \in J_\epsilon} \lambda_j \langle \cdot, e_j \rangle e_j$$

Khi đó T_ϵ có hạng hữu hạn và

$$\|(T - T_\epsilon)x\|^2 = \left\| \sum_{j \notin J_\epsilon} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j \notin J_\epsilon} |\lambda_j|^2 |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \epsilon^2 \|x\|^2$$

Từ đó $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$. Suy ra $T \in B_o(H)$ (theo định lý (2.2.3)(i)). $\square$

Bổ đề 2.2.6. Nếu x là một vectơ riêng của toán tử chuẩn tắc T thuộc $B(H)$, λ là giá trị riêng tương ứng, thì x là một vectơ riêng của T^* với giá trị riêng $\bar{\lambda}$. Các vectơ riêng của T tương ứng các giá trị riêng khác nhau là trực giao.

Chứng minh. Cho x là một vectơ riêng của toán tử chuẩn tắc T thuộc $B(H)$, λ là giá trị riêng tương ứng. Toán tử $T - \lambda I$ là chuẩn tắc và toán tử liên hợp của nó là $T^* - \bar{\lambda}I$. Ta có:

$$\|(T^* - \bar{\lambda}I)x\| = \|(T - \lambda I)x\| = 0$$

Do vậy x cũng là một vectơ riêng của T^* ứng với giá trị riêng $\bar{\lambda}$. Xét hai giá trị riêng $\lambda \neq \mu$ của T , giả sử $\lambda \neq 0$. Gọi x là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ , tức $Tx = \lambda x$. Gọi y là vectơ riêng ứng với giá trị riêng μ , tức $Ty = \mu y$. Ta có:

$$\langle x, y \rangle = \lambda^{-1} \langle Tx, y \rangle = \lambda^{-1} \langle x, T^*y \rangle = \lambda^{-1} \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \lambda^{-1} \mu \langle x, y \rangle$$

Do đó $\langle x, y \rangle = 0$ hay $x \perp y$. $\square$

Bổ đề 2.2.7. Mỗi toán tử compact, chuẩn tắc T trên không gian Hilbert phức H có một giá trị riêng λ với $|\lambda| = \|T\|$.

Chứng minh. Cho U là hình cầu đơn vị của H . Ta đã biết $T : U \rightarrow H$ là liên tục chuẩn-yếu. Do đó nếu x_i hội tụ yếu tới x trong U thì:

$$\begin{aligned} |\langle Tx_i, x_i \rangle - \langle Tx, x \rangle| &= |\langle T(x_i - x), x_i \rangle + \langle Tx, x_i - x \rangle| \\ &\leq \|T(x_i - x)\| + |\langle Tx, x_i - x \rangle| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Do vậy hàm $x \rightarrow |\langle Tx, x \rangle|$ liên tục yếu trên U . Vì U là compact yếu nên hàm $\langle Tx, x \rangle$ đạt cực đại và cực đại đó là $\|T\|$. Tức là $|\langle Tx_0, x_0 \rangle| = \|T\|$ với x_0 nào đó trong U . Suy ra:

$$\|T\| = |\langle Tx_0, x_0 \rangle| \leq \|Tx_0\| \|x_0\| \leq \|T\|$$

Do vậy $|\langle Tx_0, x_0 \rangle| = \|Tx_0\| \|x_0\|$. Điều này xảy ra khi $Tx_0 = \lambda x_0$, với λ nào đó. Vậy $|\lambda| = \|T\|$. $\square$

Định lý 2.2.8. *Mỗi toán tử compact, chuẩn tắc T trên không gian Hilbert phức H là chéo hóa được và các giá trị riêng của nó triệt tiêu tại vô cùng.*

Ngược lại, mỗi toán tử như vậy đều chuẩn tắc và compact.

Chứng minh. Ta chỉ cần chỉ ra rằng mỗi toán tử compact, chuẩn tắc T là chéo hóa được. Khi đó, theo bổ đề (2.2.5) ta có các giá trị riêng của T triệt tiêu tại vô cùng.

Ngược lại, cho toán tử chéo hóa được T có các giá trị riêng triệt tiêu tại vô cùng. Khi đó T có họ gồm các vectơ riêng trực giao. Ta gọi họ có cực đại phần tử là $\{e_j \mid j \in J\}$ và các giá trị riêng tương ứng là $\{\lambda_j \mid j \in J\}$. Đặt P là phép chiếu lên không gian con $\text{span}\{e_j \mid j \in J\}$. Với mỗi x thuộc H , ta có:

$$\begin{aligned} TPx &= T \sum \langle x, e_j \rangle e_j = \sum \langle x, e_j \rangle \lambda_j e_j = \sum \langle x, \bar{\lambda}_j e_j \rangle e_j \\ &= \sum \langle x, T^* e_j \rangle e_j = \sum \langle Tx, e_j \rangle e_j = PTx \end{aligned}$$

Do vậy T và P là giao hoán và toán tử $(I - P)T$ chuẩn tắc, compact. Nếu $P \neq I$ thì có hai trường hợp xảy ra

- Nếu $(I - P)T = 0$ thì tồn tại vectơ đơn vị $e_0 \in (I - T)H$ là vectơ riêng của T .
- Nếu $(I - P)T \neq 0$ thì theo Bổ đề (2.2.7) tồn tại vectơ đơn vị $e_0 \in (I - P)H$ với $Te_0 = \lambda e_0$ và $|\lambda| = \|(I - P)T\|$.

Cả hai trường hợp trên đều mâu thuẫn với việc chọn họ $\{e_j \mid j \in J\}$ là cực đại. Vậy $P = I$ và toán tử T là compact và chuẩn tắc. $\square$

2.2.3 Toán tử hạng một

Định nghĩa 2.2.9. Cho x, y thuộc H . Kí hiệu $x \odot y$ là toán tử hạng một trong $B(H)$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} x \odot y &: H \rightarrow H \\ z &\mapsto (x \odot y)z = \langle z, y \rangle x \end{aligned}$$

Nhận xét 2.2.10. Ánh xạ $(x, y) \rightarrow x \odot y$ là một nửa song tuyến tính từ $H \times H$ vào $B_f(H)$. Nếu $\|e\| = 1$ thì $e \odot e$ là phép chiếu một chiều từ H lên $\mathbb{C}e$. Mỗi toán tử chuẩn tắc, compact T trên H đều có

$$T = \sum \lambda_j e_j \odot e_j$$

với cơ sở trực chuẩn $\{e_j \mid j \in J\}$ của H .

Tổng trên hội tụ theo chuẩn, bởi vì tập $J_0 = \{j \in J \mid \lambda_j \neq 0\}$ là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được, trong trường hợp vô hạn đếm được dãy $\{\lambda_j \mid j \in J_0\}$ hội tụ tới 0.

2.2.4 Đại số Calkin

Định nghĩa 2.2.11. Do $B_0(H)$ là ideal con đóng trong $B(H)$ nên $B(H)/B_0(H)$ là đại số Banach với chuẩn thương và được gọi là Đại số Calkin. Nếu S và T thuộc $B(H)$ và $S - T \in B_0(H)$, ta nói S là nhiều compact của T . Nghĩa là S và T có cùng hình ảnh trong Đại số Calkin.

Toán tử T thuộc $B(H)$ được gọi là có đối hạng (co-rank) hữu hạn nếu $\dim((T(H))^\perp) < \infty$.

Định lý 2.2.12. (*Định lý Atkinson*)

Cho toán tử T thuộc $B(H)$, các điều kiện sau là tương đương:

- (i) *Tồn tại duy nhất một toán tử S thuộc $B(H)$ thỏa mãn ST và TS tương ứng là các phép chiếu lên $(\ker T)^\perp$ và lên $(\ker T^*)^\perp$, cả hai phép chiếu có co-rank hữu hạn.*
- (ii) *Với S nào đó trong $B(H)$, cả hai toán tử $ST - I$ và $TS - I$ là compact.*
- (iii) *Hình ảnh của T là khả nghịch trong Đại số Calkin $B(H)/B_0(H)$.*
- (iv) *Cả $\ker T$ và $\ker T^*$ là các không gian con hữu hạn chiều và $T(H)$ đóng.*

Chứng minh. Rõ ràng (i) $\Rightarrow$ (ii) và (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Giả sử dãy $\{x_n\}$ là trực giao trong $\ker T$. Đặt $U = ST - I$ thuộc $B_0(H)$, ta có $Ux_n = -x_n$ với mọi n . Hơn nữa x_n hội tụ yếu tới 0 nên $\|Ux_n\| \rightarrow 0$. Điều này mâu thuẫn. Vậy $\ker T$ có hữu hạn chiều.

Thay T bởi T^* ta được $\ker T^*$ hữu hạn chiều.

Ta chứng minh $T(H)$ là đóng. Sử dụng Định lý (2.2.3)(i), chọn toán

tử V thuộc $B_f(H)$ thỏa mãn $\|U - V\| \leq \frac{1}{2}$. Khi đó với mỗi x thuộc V , ta có

$$\|S\| \|Tx\| \geq \|STx\| = \|(I + U)x\| \geq \|x\| - \|Ux\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$$

Từ đó $T|_{\ker V}$ bị chặn dưới bởi giá trị dương hay $X = T(\ker V)$ là đóng. Mặt khác ta có $\ker V^* = (V(H))^\perp$. Do V có hạng hữu hạn nên $\ker V = (V^*(H))^\perp$.

Do đó $\eta = T((\ker V)^\perp) = T(V^*(H))$ có hữu hạn chiều.

Với Q là một phép chiếu từ H lên X , ta có $Q(\eta)$ có hữu hạn chiều nên $Q(\eta)$ đóng. Từ đó

$$X + \eta = Q^{-1}(Q(\eta))$$

là không gian con đóng của H . Mà $T(H) = X + \eta$ nên $T(H)$ là đóng.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ta có toán tử $T|_{(\ker T)^\perp}$ là đơn ánh, bị chặn từ một không gian Hilbert lên không gian Hilbert $T(H)$. Do đó tồn tại toán tử nghịch đảo bị chặn S .

Ta thác triển S thành một toán tử trên $B(H)$ bằng cách đặt $S = 0$ trên $(T(H))^\perp$. Do vậy TS là phép chiếu từ H lên $T(H) = (\ker T^*)^\perp$ và ST là phép chiếu lên $(\ker T)^\perp$. Cả hai phép chiếu này đều có co-rank hữu hạn bởi giả thiết. Rõ ràng S là duy nhất. $\square$

2.2.5 Toán tử Fredholm

Định nghĩa 2.2.13. Các toán tử thỏa mãn các điều kiện của Định lý Atkinson được gọi là các toán tử Fredholm. Lớp toán tử này được kí hiệu là $F(H)$.

Với mỗi T thuộc $F(H)$, ta định nghĩa *index* của T là

$$\text{index} T = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*)$$

Ta chọn S và T như trong Định lý Atkinson(i), và đặt $ST = I - P$, $TS = I - Q$. Khi đó P và Q là các phép chiếu lên $\ker T$ và $\ker T^*$, hiển nhiên các phép chiếu này có hạng hữu hạn. Đặt:

$$\text{index} T = r_P - r_Q$$

Từ Định lý Atkinson(iii), ta có tích của các toán tử Fredholm lại là toán tử Fredholm. Hơn nữa tích RT thuộc $F(H)$ nếu T thuộc $F(H)$ và R song

ánh trong $B(H)$. Lại do R là song ánh nên:

$$\text{index} RT = \text{index} TR = \text{index} T$$

Rõ ràng $T^* \in F(H)$ nếu $T \in F(H)$ và $\text{index} T^* = -\text{index} T$.

Cuối cùng phép khả nghịch một phần từ S tới T trong Định lý Atkinson(i) là toán tử Fredholm với $\text{index} S = -\text{index} T$.

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa tập:

$$F_n(H) = \{T \in F(H) \mid \text{index} T = n\}$$

Các tập này đều không rỗng. Và ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.14. *Nếu A thuộc $B_f(H)$ thì $I + A$ thuộc $F_0(H)$.*

Bổ đề 2.2.15. *Nếu $A \in B_0(H)$ và $T \in F_0(H)$ thì $T + A \in F_0(H)$.*

Bổ đề 2.2.16. *Nếu $A \in B_0(H)$ và $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ thì hoặc $\lambda I - A$ khả nghịch trong $B(H)$ hoặc λ là giá trị riêng của A với số bội hữu hạn. Hơn nữa $\bar{\lambda}$ cũng là giá trị riêng của A^* với cùng bội trên.*

Chú ý 2.2.17. Các kết quả trên được biết như là "khả năng Fredholm". Nó chỉ ra rằng phổ của một toán tử compact chứa 0 và các giá trị riêng. Do đó $\lambda I - T$ là không khả nghịch với mọi λ thuộc phổ. Đặc biệt, phổ này là một tập con đếm được của $\mathbb{C}$ với 0 là điểm có thể tụ được.

2.3 Vết

Phần này chúng tôi định nghĩa vết và nêu tính bất biến của nó, xây dựng lớp toán tử vết và lớp toán tử Hilbert-Schmidt. Với tích phân của một toán tử compact là vết của toán tử, từ đó hình thành các không gian khả tích cấp p ($1 \leq p < \infty$). Để tìm sự tương tự giữa lý thuyết của các hàm và lý thuyết của các toán tử trên không gian Hilbert phức H , phần 2.1 đã đề cập rằng:

- $B_f(H)$ tương ứng các hàm liên tục có giá compact.
- $B_0(H)$ tương ứng các hàm liên tục triệt tiêu tại vô cùng.
- Lớp $B(H)$ thể hiện cả hai vai trò: đôi khi $B(H)$ tương tự như tập tất cả các hàm liên tục bị chặn và đôi khi $B(H)$ tác động như là L^∞ . Cách tác động thứ hai ở trên giả thiết tồn tại như là một sự tương tự từ H vào độ đo Lebesgue.

2.3.1 Định nghĩa vết

Định nghĩa 2.3.1. Cho $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert phức H . Với mỗi toán tử dương T thuộc $B(H)$, ta định nghĩa vết của T , ký hiệu là $tr(T)$, bởi:

$$tr(T) = \sum \langle Te_j, e_j \rangle$$

có giá trị trong $[0, +\infty]$.

Nhận xét 2.3.2. Với mỗi T thuộc $B(H)$ ta có $tr(T^*T) = tr(TT^*)$.

Chứng minh. Mỗi i, j ta có

$$\langle Te_i, e_j \rangle \langle e_j, Te_i \rangle = \langle T^*e_j, e_i \rangle \langle e_i, T^*e_j \rangle$$

có giá trị lớn hơn hoặc bằng 0.

Lấy tổng về trái theo j và về phải theo i , ta có:

$$\begin{aligned} \sum_j \langle \langle Te_i \mid e_j \rangle e_j, Te_i \rangle &= \langle Te_i, Te_i \rangle = \langle T^*Te_i, e_i \rangle \\ \sum_i \langle \langle T^*e_j, e_i \rangle e_i, T^*e_j \rangle &= \langle T^*e_j, T^*e_j \rangle = \langle TT^*e_j, e_j \rangle \end{aligned}$$

Với từng hạng tử dương, hai tổng trên không phụ thuộc vào thứ tự các hạng tử. Do đó

$$tr(T^*T) = \sum_i \langle T^*Te_i, e_i \rangle = \sum_j \langle TT^*e_j, e_j \rangle = tr(TT^*)$$

.

□

Nhận xét 2.3.3. Nếu U là unitar và $T \geq 0$ thì

$$tr(UTU^*) = tr(T)$$

Đặc biệt định nghĩa vết không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở. Do đó $\|T\| \leq tr(T)$.

Nhận xét 2.3.4. Nếu T thuộc $B(H)$ thỏa mãn $tr(|T|^p) < \infty$ với $p > 0$ nào đó, thì T là compact.

Chứng minh. Cho $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H và $\epsilon > 0$, có một tập con hữu hạn λ của J thỏa mãn $\sum_{j \notin \lambda} |T|^p e_j, e_j > \epsilon$.

Đặt P_λ là phép chiếu từ H lên $\text{span}\{e_j \mid j \in \lambda\} = \{\sum_{j \in \lambda} c_j e_j \mid c_j \in \mathbb{C}\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} |||T|^{p/2}(I - P_\lambda)|||^2 &= ||(I - P_\lambda)|T|^p(I - P_\lambda)|| \\ &\leq \text{tr}((I - P_\lambda)|T|^p(I - P_\lambda)) < \epsilon \end{aligned}$$

Do ϵ nhỏ tùy ý nên $|||T|^{p/2}(I - P_\lambda)|| = 0$. Theo Định lý Atkinson ta có $|T|^{p/2} \in B_0(H)$. Với cơ sở trực chuẩn phù hợp (ta vẫn ký hiệu là $\{e_j \mid j \in J\}$). Theo Định lý (2.2.8) ta có:

$$|T|^{p/2} = \sum \lambda_j e_j \odot e_j$$

và $\{\lambda_j\}$ triệt tiêu tại vô cùng. Do p nguyên nên $|T| = \sum \lambda_j^{2/p} e_j \odot e_j$. Từ đó $|T| \in B_0(H)$. Từ phép phân tích cực $T = U|T|$ ta có $T \in B_0(H)$ hay T compact. $\square$

2.3.2 Lớp toán tử vết và lớp toán tử Hilbert-Schmidt

Định nghĩa 2.3.5. Ta định nghĩa lớp toán tử vết:

$$B^1(H) = \text{span}\{T \in B_0(H) \mid T \geq 0, \text{tr}(T) < \infty\}$$

và lớp toán tử Hilbert-Schmidt:

$$B^2(H) = \{T \in B_0(H) \mid \text{tr}(T^*T) < \infty\}$$

Ta có $\text{tr}(T_1 + T_2) = \text{tr}(T_1) + \text{tr}(T_2)$ và $\text{tr}(\alpha T) = \alpha \text{tr}(T)$ với mọi toán tử dương T_1 và T_2 và mỗi $\alpha \geq 0$. Với mỗi T thuộc $B^1(H)$, ta có $T = \sum_{k=0}^3 i^k T_k$,

$T_k \geq 0$. Do đó $\text{tr}(T) = \sum_{k=0}^3 i^k \text{tr}(T_k)$ thác triển hàm vết thành một phiếm hàm tuyến tính trên $B^1(H)$.

Từ nay ta có thể sử dụng hàm vết vào bất kỳ toán tử nào trong tập $B(H)_+ + B^1(H)$ (với $\alpha + \infty = \infty, \forall \alpha \in \mathbb{C}$). Cũng như các vectơ trong

H , ta cũng có quy tắc hình bình hành đối với các toán tử trong $B(H)$ như sau

$$(S + T)^*(S + T) + (S - T)^*(S - T) = 2(S^*S + T^*T) \quad (*)$$

Từ đó suy ra

$$(S + T)^*(S + T) \leq 2(S^*S + T^*T) \quad (**)$$

Bằng các tính toán đơn giản, ta có đẳng thức phân cực cho các toán tử trong không gian Hilbert phức

$$4T^*S = \sum_{k=0}^3 i^k (S + i^k T)^*(S + i^k T) \quad (***)$$

Mệnh đề 2.3.6. Các lớp $B^1(H)$ và $B^2(H)$ là các ideal tự liên hợp trong $B(H)$ và

$$B_f(H) \subset B^1(H) \subset B^2(H) \subset B_0(H)$$

Chứng minh. Ta chứng minh $B^1(H)$ là ideal tự liên hợp. Nếu $T \geq 0$ với $tr(T) < \infty$ và $S \in B(H)$, ta có

$$4TS = 4T^{1/2}T^{1/2}S = \sum_{k=0}^3 i^k (S + i^k I)^* T (S + i^k I)$$

Với $V = S + i^k I$, ta có:

$$tr(V^*TV) = tr(V^*T^{1/2}T^{1/2}V) = tr(T^{1/2}VV^*T^{1/2}) \leq \|VV^*\|tr(T)$$

Do đó $TS \in B^1(H)$. Do vậy $B^1(H)$ là ideal phải tự liên hợp. Tương tự ta sẽ có $B^1(H)$ là ideal hai phía.

Với:

$$B^1(H) = span\{T \in B_0(H) \mid T \geq 0, tr(T) < \infty\}$$

Ta sẽ chỉ ra rằng:

$$B^1(H) = \{T \in B(H) \mid tr(|T|) < \infty\}$$

Thực vậy, nếu $|T| \in B^1(H)$, từ sự phân tích cực $T = U|T|$ thì theo chứng minh trên ta có $T \in B^1(H)$. Ngược lại nếu $T \in B^1(H)$, $|T| = U^*T$ thì $|T| \in B^1(H)$.

Ta chứng minh $B^2(H)$ là ideal tự liên hợp. Ta có $B^2(H)$ là không gian con tuyến tính của $B_0(H)$. Từ nhận xét (2.3.2) ta có $B^2(H)$ là tự liên hợp. Do $B^1(H)$ là ideal trong $B(H)$, theo định nghĩa của $B^2(H)$ ta có ngay $B^2(H)$ là ideal.

Ta cần chứng minh $B_f(H) \subset B^1(H) \subset B^2(H) \subset B_0(H)$.
Nếu $T \in B_f(H)$ thì $|T|$ là toán tử chéo hóa được có hạng hữu hạn. Do đó $T \in B^1(H)$ và $|T| \in B^1(H)$. Vậy $B_f(H) \subset B^1(H)$.
Nếu $T \in B^1(H)$ thì

$$T^*T = |T|^2 = |T|^{1/2}|T||T|^{1/2} \leq ||T|||T|$$

Suy ra $tr(T^*T) < \infty$ hay $T \in B^2(H)$. Vậy $B^1(H) \subset B^2(H)$.

Chứng minh $B^2(H) \subset B_0(H)$ suy ngay từ định nghĩa của lớp $B^2(H)$. $\square$

Định lý 2.3.7. *Ideal $B^2(H)$ các toán tử Hilbert-Schmidt có dạng một không gian Hilbert với tích trong:*

$$\langle S, T \rangle_{tr} = tr(T^*S), \quad S, T \in B^2(H)$$

.

Chứng minh. Với mọi S, T thuộc $B^2(H)$ thì T^*S thuộc $B^1(H)$ hay $\langle S, T \rangle_{tr} < \infty$. Do đó dạng nửa song tuyến tính $\langle \cdot, \cdot \rangle_{tr}$ là một định nghĩa đúng, tự liên hợp và dương. Hơn nữa, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{tr}$ đưa ra một tích trong trên $B^2(H)$ bởi chuẩn-2 liên kết thỏa mãn:

$$||T||_2^2 = tr(T^*T) \geq ||T^*T|| = ||T||^2$$

Kéo theo mọi dãy Cauchy $\{T_n\}$ thuộc $B^2(H)$ với chuẩn $||\cdot||_2$ sẽ hội tụ theo chuẩn tới một toán tử T thuộc $B_0(H)$. Ta cần chứng minh $T_n \rightarrow T$ theo chuẩn-2.

Với mỗi phép chiếu P lên một không gian con hữu hạn chiều của H ta có

$$\begin{aligned} ||P(T - T_n)||_2^2 &= tr((T - T_n)^*P(T - T_n)) = tr(P(T - T_n)(T - T_n)^*P) \\ &= \lim_m tr(P(T_m - T_n)(T_m - T_n)^*P) \\ &= \lim_m tr((T_m - T_n)^*P(T_m - T_n)) \\ &\leq \lim_m \sup tr((T_m - T_n)^*(T_m - T_n)) = \lim_m \sup ||T_m - T_n||_2^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\|P(T - T_n)\|_2 \leq \limsup_m \|T_m - T_n\|_2$.

Do P là phép chiếu tùy ý nên $\|T - T_n\|_2 \leq \limsup_m \|T_m - T_n\|_2$. Do vậy $T \in B^2(H)$ và $T_n \rightarrow T$ theo chuẩn-2.

□

Bổ đề 2.3.8. Nếu $T \in B^1(H)$ và $S \in B(H)$ thì

$$|tr(ST)| \leq \|S\|tr(|T|)$$

Chứng minh. Đặt $T = U|T|$ là phân tích cực của T . Vì $|T|^{1/2} \in B^2(H)$ nên $(SU|T|^{1/2})^* \in B^2(H)$. Theo BĐT Cauchy-Schwarz đối với vết tr ta có

$$\begin{aligned} |tr(ST)|^2 &= |tr(SU|T|^{1/2}|T|^{1/2})|^2 = |((|T|^{1/2}) | (SU|T|^{1/2})^*)_{tr}|^2 \\ &\leq \| |T|^{1/2} \|_2^2 \| (SU|T|^{1/2})^* \|_2^2 = tr(|T|).tr(|T|^{1/2}U^*S^*SU|T|^{1/2}) \\ &\leq tr(|T|).tr(\|U^*S^*SU\||T|) \leq \|S\|^2.(tr(|T|))^2 \end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.3.9. Nếu S và T thuộc $B^2(H)$ thì

$$tr(ST) = tr(TS)$$

Công thức trên vẫn đúng khi $S \in B(H)$ và $T \in B^1(H)$.

Chứng minh. Nếu $S, T \in B^2(H)$ thì ta có

$$\begin{aligned} 4tr(T^*S) &= \Sigma i^k tr((S + i^k T)^*(S + i^k T)) \\ &= \Sigma i^k tr((S^* + i^{-k} T^*)^*(S^* + i^{-k} T^*)) \\ &= \Sigma i^k tr((T^* + i^k S^*)^*(T^* + i^k S^*)) = 4tr(ST^*) \end{aligned}$$

Do đó $tr(ST) = tr(TS)$.

Giả sử $S \in B(H)$ và $T \in B^1(H)$. Từ $T \geq 0$ và chứng minh trên ta có

$$\begin{aligned} tr(ST) &= tr((ST^{1/2})T^{1/2}) = tr(T^{1/2}(ST^{1/2})) \\ &= tr((T^{1/2}S)T^{1/2}) = tr(T^{1/2}(T^{1/2}S)) = tr(TS) \end{aligned}$$

□

Định lý 2.3.10. *Idean $B^1(H)$ của lớp các toán tử vết là một đại số Banach với chuẩn*

$$\|T\|_1 = \text{tr}(|T|), \quad T \in B^1(H)$$

Chứng minh. Rõ ràng $\|\cdot\|_1$ là hàm thuần nhất trên $B^1(H)$ và là định nghĩa đúng (vì $\|\cdot\|_1 \geq \|\cdot\|$). Để chứng minh tính nửa cộng tính dưới của $B^1(H)$ ta lấy S và T thuộc $B^1(H)$ với phân tích cực $S + T = W|S + T|$ thì $|S + T| = W^*(S + T)$. Theo Bổ đề (2.3.8) ta có

$$\begin{aligned} \|S + T\|_1 &= \text{tr}(|S + T|) = \text{tr}(W^*(S + T)) \leq |\text{tr}(W^*S)| + |\text{tr}(W^*T)| \\ &\leq \|W^*\|(\text{tr}(|S|) + \text{tr}(|T|)) \leq \|S\|_1 + \|T\|_1. \end{aligned}$$

Tương ứng bất đẳng thức với phép phân tích cực $ST = V|ST|$ ta có

$$\begin{aligned} \|ST\|_1 &= \text{tr}(V^*ST) \leq \|V^*S\| \text{tr}(|T|) \\ &\leq \|S\| \text{tr}(|T|) \leq \text{tr}(|S|) \text{tr}(|T|) = \|S\|_1 \|T\|_1 \end{aligned}$$

Cuối cùng ta cần chứng minh $B^1(H)$ là không gian Banach. Cho $\{T_n\}$ là dãy Cauchy trong $B^1(H)$ với chuẩn-1. Rõ ràng dãy này hội tụ theo chuẩn tới phần tử $T \in B_0(H)$. Với phân tích cực $T - T_n = U|T - T_n|$ và mỗi phép chiếu P hữu hạn chiều lên H ta có:

$$\text{tr}(P|T - T_n|) = \text{tr}|PU^*(T - T_n)| = \lim_m \text{tr}(PU^*(T_m - T_n)) \leq \lim_m \sup \|T_m - T_n\|_1$$

Do P bất kỳ nên với $P = I$ ta có

$$\|T - T_n\|_1 \leq \limsup_m \|T_m - T_n\|_1 \rightarrow 0$$

Rõ ràng $T \in B^1(H)$ và $T_n \rightarrow T$ theo chuẩn-1. Vậy $B^1(H)$ là không gian Banach. $\square$

Định lý 2.3.11. *Dạng song tuyến tính*

$$\langle S, T \rangle = \text{tr}(ST)$$

thể hiện đầy đủ tính đối ngẫu giữa cặp không gian Banach $B_0(H)$ và $B^1(H)$, giữa cặp không gian $B^1(H)$ và $B(H)$. Tức là:

$$(B_0(H))^* = B^1(H) \quad \text{và} \quad (B^1(H))^* = B(H)$$

Chứng minh. (i) Trước hết ta chứng minh không gian $B_0(H)$ và $B^1(H)$ đối ngẫu. Với mỗi T thuộc $B^1(H)$ xét phiếm hàm tuyến tính bị chặn trên $B_0(H)$

$$\varphi_T = \langle \cdot, T \rangle$$

Theo Bổ đề (2.3.9) ta có $\|\varphi_T\| \leq \|T\|_1$ hay $\varphi_T \in (B_0(H))^*$.

Ngược lại nếu $\varphi \in (B_0(H))^*$, $S \in B^2(H)$ thì:

$$|\varphi(S)| \leq \|\varphi\| \|S\| \leq \|\varphi\| \|S\|_2$$

Do $B^2(H)$ là một không gian Hilbert nên có một phần tử duy nhất T thuộc $B^2(H)$ thoả mãn:

$$\varphi(S) = \text{tr}(TS) = \text{tr}(ST)$$

với mọi S thuộc $B^2(H)$. Hơn nữa với mỗi phép chiếu P trên H có hạng hữu hạn và với phép phân tích cực $T = U|T|$, ta có:

$$|\text{tr}(P|T|)| = |\text{tr}(PU^*T)| = |\varphi(PU^*)| \leq \|\varphi\|$$

Do P bất kỳ nên $T \in B^1(H)$ với $\|T\|_1 \leq \|\varphi\|$.

Rõ ràng tương ứng $\varphi \leftrightarrow T$ là một song ánh đẳng cự. Từ đó $(B_0(H))^* = B^1(H)$.

(ii) Bây giờ ta chứng minh $(B^1(H))^* = B(H)$. Với mỗi S thuộc $B(H)$, xác định một phiếm hàm tuyến tính bị chặn:

$$\psi_S = \langle S, \cdot \rangle$$

trên $B^1(H)$. Theo Bổ đề (2.3.9) ta có $\|\psi_S\| \leq \|S\|$ hay $\psi_S \in (B^1(H))^*$. Ngược lại, nếu $\psi \in (B^1(H))^*$, ta định nghĩa dạng nửa song tuyến tính U trên H bởi:

$$U(x, y) = \psi(x \odot y), \quad x, y \in H$$

trong đó $x \odot y$ là toán tử hạng một. Ta có:

$$\begin{aligned} |x \odot y| &= ((x \odot y)^*(x \odot y))^{1/2} = ((y \odot x)(x \odot y))^{1/2} \\ &= (\|x\|^2 y \odot y)^{1/2} = \|x\| \|y\| (\|y\|^{-1} y \odot \|y\|^{-1} y) \end{aligned}$$

U bị chặn bởi vì:

$$|U(x, y)| \leq \|\psi\| \|x \odot y\|_1 = \|\psi\| \text{tr}(|x \odot y|) = \|\psi\| \|x\| \|y\|$$

Do đó có duy nhất toán tử S thuộc $B(H)$ thỏa mãn $\|S\| \leq \|\psi\|$ và $\psi(x \odot y) = U(x, y) = \langle Sx, y \rangle$.

Với mọi toán tử tự liên hợp T thuộc $B^1(H)$, có một dạng chéo hoá được $T = \sum \lambda_j e_j \odot e_j$ trong đó $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn nào đó, λ_j là giá trị riêng thực ứng với véctơ riêng e_j và $\sum |\lambda_j| = \|T\|_1$. Do vậy

$$\psi(T) = \sum \lambda_j \psi(e_j \odot e_j) = \sum \lambda_j (Se_j \odot e_j) = \sum \langle STe_j, e_j \rangle = \text{tr}(ST)$$

Từ $B^1(H)$ là tự liên hợp, công thức $\psi T = \text{tr}(ST)$ đúng với mọi T thuộc $B^1(H)$.

Vậy ta lại có một song ánh đẳng cự $\psi \leftrightarrow S$. Do vậy $(B^1(H))^* = B(H)$. $\square$

2.3.3 Một dạng cụ thể của lớp toán tử Hilbert-Schmidt

Nhận xét 2.3.12. Với mỗi cơ sở trực chuẩn $\{e_j \mid j \in J\}$ của H thì:

$$\{e_i \odot e_j \mid (i, j) \in J^2\}$$

là tập các toán tử hạng một tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $B^2(H)$.

Chứng minh. Từ $(e_i \odot e_j)^* = (e_j \odot e_i)$ và $(e_i \odot e_j)(e_k \odot e_l) = \delta_{jk} \cdot (e_i \odot e_l)$, rõ ràng các toán tử $\{e_i \odot e_j\}$ có dạng một tập trực giao trong $B^2(H)$. Hơn nữa nếu $T \in B^2(H)$ thì:

$$\begin{aligned} \langle T, e_i \odot e_j \rangle_{tr} &= \text{tr}((e_j \odot e_i)T) = \text{tr}(e_j \odot T^*e_i) \\ &= \sum_l \langle e_l, T^*e_i \rangle \langle e_j, e_l \rangle = \langle Te_j, e_i \rangle \end{aligned}$$

Từ đó các phần tử trực giao với bao tuyến tính của các $e_i \odot e_j$ là $\{0\}$ hay $\{e_i \odot e_j\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $B^2(H)$. $\square$

Sau đây chúng tôi giới thiệu một trường hợp đặc biệt của lớp toán tử Hilbert-Schmidt là không gian $B^2(L^2(X))$, với không gian Hilbert tương ứng là $L^2(X)$. Ở đây X là một không gian Hausdorff compact địa phương, $L^2(X)$ là không gian các hàm khả tích cấp 2 với tích phân Radon $\int$ trên X . Ta đã biết một tích phân Radon $\int$ là một phiếm hàm tuyến tính:

$$\int : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

dương, tức là $f \geq 0$ kéo theo $\int f \geq 0$.

Nếu $\int_x$ là một tích phân Radon trên X , thì có một tích phân Radon $\int_x \otimes \int_y$ trên X^2 thỏa mãn:

$$\int_x \otimes \int_y f \otimes g = \left(\int_x f \right) \left(\int_y g \right), f \in C_c(X), g \in C_c(X)$$

trong đó $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$ là tích tenxơ của hàm f và g . Ta xét không gian Hilbert $L^2(X^2)$ là không gian các hàm khả tích cấp 2 trên X^2 . Gọi $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(X)$ thì tập các hàm $e_i \otimes \bar{e}_j(x, y) = e_i(x) \cdot \bar{e}_j(y)$ trên X^2 là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(X^2)$. Do đó tồn tại một phép đẳng cự U từ $L^2(X^2)$ lên $B^2(L^2(X))$ được xác định bởi:

$$U(e_i \otimes \bar{e}_j) = e_i \odot e_j$$

Để nghiên cứu định lý sau, chúng tôi giới thiệu định lý Fubini.

Một hàm Borel f trên không gian tô pô X là một hàm nhận giá trị thực $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $\{f > t\}$ là tập Borel trong X với mỗi t thuộc $\mathbb{R}$ (hay f là hàm liên tục).

Định lý Fubini. Cho $\int_x$ và $\int_y$ là các tích phân Radon trên các không gian Hausdorff compact địa phương X và Y . Nếu h là một hàm Borel trên $X \times Y$ và h là khả tích với tích phân $\int_x \otimes \int_y$, thì hàm Borel $y \rightarrow \int_x h(x, y)$ thuộc $L^1(Y)$ với hầu hết x thuộc X . Trên hầu hết x thuộc X , hàm $x \rightarrow \int_y h(x, y)$ thuộc $L^1(Y)$ với:

$$\int_x \int_y h = \int_x \otimes \int_y h$$

Do đó, nếu $h \in L^1(X \times Y)$, các tích phân dưới đây đều tồn tại và bằng nhau:

$$\int_x \int_y h = \int_x \otimes \int_y h = \int_y \int_x h$$

Định lý 2.3.13. Với mỗi k thuộc $L^2(X^2)$, toán tử tích phân T_k được xác định bởi:

$$T_k f(x) = \int_y k(x, y) f(y), \quad f \in L^2(X)$$

là một toán tử Hilbert-Schmidt trên $L^2(X)$. Ánh xạ $k \rightarrow T_k$ là một đẳng cấu từ $L^2(X^2)$ lên $B^2(L^2(X))$ với chuẩn-2. Với $k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}$, ta có $T_{k^*} = T_k^*$. Do vậy T_k là tự liên hợp khi và chỉ khi $\ker T_k$ (tức k) là đối xứng liên hợp.

Ở đây ta hiểu một dạng nửa song tuyến tính b trên không gian Hilbert H được gọi là đối xứng liên hợp (conjugate-symmetric) nếu $b(y, x) = \overline{b(x, y)}$ với mọi x và y thuộc H .

Chứng minh. Nếu k thuộc $L^2(X^2)$, ta chứng minh T_k là toán tử Hilbert-Schmidt. Với mỗi cặp f, g thuộc $L^2(X)$ ta có:

$$\int_x \int_y |k(x, y) f(y) \overline{g(x)}| = \int_x \otimes \int_y |k| |f \otimes \overline{g}| < \infty$$

Từ định lý Fubini, toán tử T_k như trong giả thiết là thuộc $B(L^2(X))$ với $\|T_k\| \leq \|k\|_2$.

Ánh xạ $k \rightarrow T_k$ là phép đẳng cự từ $L^2(X^2)$ lên $B^2(L^2(X))$. Vì nếu $\{e_j \mid j \in J\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(X)$ thì $\{e_i \odot e_j \mid (i, j) \in J^2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $B^2(L^2(X))$ và $\{e_i \otimes \overline{e_j} \mid (i, j) \in J^2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(X^2)$. Do $k \in L^2(X^2)$ nên $k = \sum c_{ij} e_i \otimes \overline{e_j}$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$, là một tổng hữu hạn. Do đó:

$$T_k f = \sum c_{ij} \langle f, e_j \rangle e_i = (\sum c_{ij} e_i \odot e_j) f = (U(k)) f$$

với $U(e_i \otimes \overline{e_j}) = e_i \odot e_j$. Do tính liên tục ta có $T_k = U(k)$ với mỗi k thuộc $L^2(X^2)$. Từ đó ánh xạ $U : k \rightarrow T_k$ là một phép đẳng cự.

Đẳng thức $T_{k^*} = T_k^*$ dễ dàng chứng minh được từ $k = \sum \alpha_{ij} e_i \otimes \overline{e_j}$. $\square$

Nhận xét 2.3.14. Cho phương trình tích phân Fredholm:

$$\int_y k(x, y) f(y) - \lambda f(x) = g(y)$$

ở đó g thuộc $L^2(X)$, k là một hàm đối xứng liên hợp trong $L^2(X^2)$ và số λ cho trước. Theo Định lý (2.2.8) chúng ta tìm được một cơ sở trực chuẩn $\{e_j \mid j \in J\}$ của $L^2(X)$ sao cho: $T_k = \sum \lambda_j e_j \odot e_j$ với $\lambda_j \in \mathbb{R}$ và $\sum |\lambda_j|^2 = \|k\|_2^2$ (Đẳng thức Parseval).

Nếu $\lambda \neq \lambda_j$ với mọi j , thì nghiệm phương trình tích phân trên là duy nhất và được cho bởi:

$$f = \sum (\lambda_j - \lambda)^{-1} \langle g, e_j \rangle e_j$$

Nhận xét 2.3.15. Một ứng dụng của lớp toán tử Hilbert-Schmidt là bài toán Sturm-Liouville. Sau đây chúng tôi đề cập (không chứng minh) những kết quả chính của bài toán này.

Trên đoạn $V = [a, b]$, p, q, h là các hàm giá trị thực liên tục, $p > 0$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có các phương trình:

$$(pf')' + qf = 0 \quad (2.1)$$

$$(pf')' + qf = \lambda f \quad (2.2)$$

$$(pf')' + qf = \lambda f + h \quad (2.3)$$

Phương trình thuần nhất (2.1) có không gian nghiệm hai chiều được tổ hợp tuyến tính bởi, chẳng hạn u và v , với u và v thoả mãn điều kiện biên:

$$\alpha u(a) + \beta p(a)u'(a) = 0$$

$$\gamma v(b) + \delta p(b)v'(b) = 0$$

với các số $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cho trước. Hơn nữa $p(uv' - u'v) = c$ với c cố định khác không nào đó. Ta định nghĩa hàm Green bởi:

$$g(x, y) = \begin{cases} c^{-1}u(x)v(y) & \text{với } a \leq x \leq y \leq b \\ c^{-1}u(y)v(x) & \text{với } a \leq y \leq x \leq b \end{cases}$$

với T_g là toán tử Hilbert-Schmidt trên $L^2(V)$ được xác định trong Định lý (2.3.13).

Với mỗi $h \in L^2(V)$, hàm $f = T_g h$ là nghiệm duy nhất của (2.3). Khi $\lambda = 0$, hàm $f = T_g h$ thoả mãn điều kiện biên (E):

$$\alpha f(a) + \beta p(a)f'(a) = \gamma f(b) + \delta p(b)f'(b) = 0$$

Theo Định lý (2.3.13) thì với $g^*(x, y) = \overline{g(y, x)}$, ta có $T_{g^*} = T_g^*$. Lại do k là đối xứng liên hợp nên $\overline{g(y, x)} = g(x, y)$ với mọi x, y thuộc V . Vậy $g^* = g$ trên V^2 hay $T_g = T_g^*$.

Theo Định lý (2.2.8), có một cơ sở trực chuẩn $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ của $L^2(V)$ sao cho:

$$T_g = \sum \lambda_n e_n \odot e_n$$

trong đó $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$, $\sum |\lambda_n|^2 = \|g\|_2^2$.

Do vậy nghiệm của (2.2) thỏa mãn điều kiện biên (E) tồn tại khi và chỉ khi $\lambda = \lambda_n^{-1}$ với n nào đó. Khi đó nghiệm của (2.2) là e_n .

Với $\lambda = \lambda_n^{-1}$ (n nào đó), nghiệm của (2.3) thỏa mãn (E) chỉ dương nếu $h \perp e_n$. Còn với $\lambda \neq \lambda_n$ với mọi n , thì nghiệm của (2.3) thỏa mãn điều kiện (E) luôn luôn dương.

Trong cả hai trường hợp trên, nghiệm của (2.3) là

$$f = \sum \lambda_n (1 - \lambda \lambda_n)^{-1} \langle h, e_n \rangle e_n.$$

2.3.4 Tích phân của toán tử compact

Với mỗi p thỏa mãn $1 \leq p < \infty$, ta đặt:

$$B^p(H) = \{T \in B_0(H) \mid \text{tr}(|T|^p) < \infty\}$$

thì $B^p(H)$ là không gian Banach với p -chuẩn.

$$\|T\|_p = (\text{tr}(|T|^p))^{1/p}, T \in B^p(H).$$

Do có sự tương tự giữa lý thuyết của các hàm và lý thuyết của các toán tử trên không gian Hilbert phức H : $B_0(H)$ tương ứng các hàm liên tục triệt tiêu tại vô cùng, vết trên $B_0(H)$ tương ứng một phiếm hàm tuyến tính dương trên không gian các hàm liên tục triệt tiêu tại vô cùng; nên các không gian $B^p(H)$, $1 \leq p < \infty$, thể hiện tương tự như không gian các hàm khả tích cấp p , với vết của một toán tử compact là một tích phân.

Chương 3

Xây dựng không gian L^p cho đại số von Neumann với vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn

Trong chương này chúng ta (Edward Nelson) xây dựng các không gian $L^p(1 \leq p < \infty)$ theo vết của đại số von Neumann trên không gian Hilbert H . Đại số trên không giao hoán, do đó nội dung của chương này chính là lý thuyết về tích phân không giao hoán.

3.1 Đại số von Neumann

Cho H là không gian Hilbert, $B(H)$ là đại số các toán tử bị chặn trên H .

Định nghĩa 3.1.1. Cho $\mathcal{A}$ là một đại số con của $B(H)$. $\mathcal{A}$ được gọi là đại số von Neumann nếu:

- $\mathcal{A}$ đóng với phép liên hợp, tức là nếu $a \in \mathcal{A}$ thì $a^* \in \mathcal{A}$

- $I \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ đóng trong tôpô toán tử yếu.

Như vậy đại số von Neumann là một C^* -đại số.
Tập $\mathcal{A}'$ gọi là tập giao hoán của đại số von Neumann $\mathcal{A}$ nếu:

$$\mathcal{A}' = \{b \in B(H) \mid ab = ba, \forall a \in \mathcal{A}\}$$

Dễ thấy $\mathcal{A}'$ là một đại số von Neumann.

Đặt $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$ thì $\mathcal{A}''$ cũng là một đại số von Neumann. Ta có định lý sau.

Định lý 3.1.2. (*Double commutant theory*) Nếu $\mathcal{A}$ là đại số von Neumann thì $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Chứng minh. Cho số tự nhiên dương n .

Đặt $\hat{H} = H \oplus H \oplus \dots \oplus H$, n lần. Khi đó mỗi phần tử của $B(\hat{H})$ là một ma trận (b_{ij}) với các phần tử trong $B(H)$.

Với mỗi $a \in \mathcal{A}$, đặt $\hat{a} = (\delta_{ij}a)_{n \times n}$ trong đó:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Gọi $\hat{\mathcal{A}}$ là tập các phần tử $\hat{a}$. Khi đó $\hat{\mathcal{A}}$ là đại số von Neumann. Ta nhận thấy $(b_{ij})_{n \times n}$ thuộc $\hat{\mathcal{A}}$ khi và chỉ khi b_{ij} thuộc $\mathcal{A}'$ với mọi $i, j = 1, \dots, n$. Từ đó nếu $s \in \mathcal{A}''$ thì $\hat{s} = (\delta_{ij}s)_{n \times n} \in \hat{\mathcal{A}}$.

Đặt $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_n$ thuộc $\hat{H}$. Gọi e là phép chiếu vuông góc lên bao đóng của $\hat{\mathcal{A}}\psi$, ở đây $\hat{\mathcal{A}}\psi \in \hat{H}$. Khi đó $e \in \hat{\mathcal{A}}'$ và bao đóng của $\hat{\mathcal{A}}\psi$ bất biến đối với $\hat{s}$ khi $s \in \mathcal{A}''$, tức là $\hat{s}(\hat{\mathcal{A}}\psi) = \hat{\mathcal{A}}\psi$ khi $s \in \mathcal{A}''$. Do $\psi \in \hat{\mathcal{A}}\psi$, hay $\hat{s}\psi \in \hat{\mathcal{A}}\psi$, nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $t \in \mathcal{A}$ thỏa mãn:

$$\|\hat{s}\psi - t\psi\| \leq \epsilon \quad \text{hay} \quad \sum \|s\psi_i - t\psi_i\|^2 \leq \epsilon^2$$

Chứng tỏ $\mathcal{A}$ trù mật trong $\mathcal{A}''$ theo tôpô toán tử mạnh. Tức $\mathcal{A}$ trù mật trong $\mathcal{A}''$ theo tôpô toán tử yếu. Do vậy $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. $\square$

Nhận xét 3.1.3. Nếu a thuộc $\mathcal{A}$ thì a^*a là toán tử tự liên hợp.

Theo Định lý 1.5.16, có một toán tử dương duy nhất $|a|$ thuộc $\mathcal{A}$ với $|a| = (a^*a)^{1/2}$ và có một phép đẳng cự một phần duy nhất u thuộc $\mathcal{A}$ với $u|a| = a$.

Đặt $R(a)$ là phép chiếu lên bao đóng của miền giá trị của a . $N(a)$ là phép chiếu lên không gian không của a , tức là không gian $\{x \in H \mid ax = 0\}$. Dễ thấy:

$$a = u|a|, \quad a^* = u^*|a^*|$$

$$u^*u = R(a^*) = N(a)^\perp \quad (3.1)$$

$$uu^* = R(a) = N(a^*)^\perp \quad (3.2)$$

trong đó với mỗi phép chiếu p đặt $p^\perp = I - p$, các toán tử đều thuộc $\mathcal{A}$.

Hai phép chiếu p và q thuộc $\mathcal{A}$ gọi là tương đương, kí hiệu $p \sim q$, nếu tồn tại $v \in \mathcal{A}$ với $v^*v = p, vv^* = q$. Do đó nếu $a \in \mathcal{A}$ thì $R(a) \sim R(a^*)$. Ta kí hiệu $p < q$ nếu p tương đương với một phép chiếu con của q .

Nếu p và q là các phép chiếu trong $\mathcal{A}$ thì:

$$N(pq^\perp) = q + p^\perp \wedge q^\perp = (p \vee q - q)^\perp$$

$$N(q^\perp p) = p^\perp + p \wedge q = (p - p \wedge q)^\perp$$

$$R(q^\perp p) = p \vee q - q$$

$$R(pq^\perp) = p - p \wedge q.$$

Do $pq^\perp = (q^\perp p)^*$ nên

$$p \vee q - q \sim p - p \wedge q. \quad (3.3)$$

Nếu k và p là các phép chiếu trong $\mathcal{A}$ với $k \wedge p = 0$ thì $k^\perp \vee p^\perp = I$. Do đó $k = k^\perp \vee p^\perp - k^\perp \sim p^\perp - k^\perp \wedge p^\perp$. Do vậy:

$$k < p^\perp \text{ nếu } k \wedge p = 0$$

Nếu a thuộc $\mathcal{A}$ và p là một phép chiếu trong $\mathcal{A}$. Đặt:

$$p_a = N(p^\perp a)$$

Rõ ràng $ap_a = pap_a$, ở đây p_a là phép chiếu lớn nhất với tính chất này. Ta có $p_a^\perp = R(a^*p^\perp) \sim R(p^\perp a)$, $p_a^\perp$ là một phép chiếu con của $R(p^\perp) = p^\perp$. Do vậy:

$$ap_a = pap_a, \quad p_a^\perp < p^\perp \quad (3.4)$$

$$p_a^*a = p_a^*ap, \quad p_a^* < p^\perp. \quad (3.5)$$

3.2 Hàm vết trên đại số von Neumann

Định nghĩa 3.2.1. Cho $\mathcal{A}$ là một đại số von Neumann trong $B(H)$, $\mathcal{A}^+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$. Cho ánh xạ: $\tau : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, \infty]$ thỏa mãn với mọi $a, b \in \mathcal{A}^+, \lambda \geq 0$ thì:

$$\tau(a + b) = \tau(a) + \tau(b); a, b \in \mathcal{A}^+, \quad (3.6)$$

$$\tau(\lambda a) = \lambda \tau(a); a \in \mathcal{A}^+, \lambda \geq 0, \quad (3.7)$$

$$\tau(a^*a) = \tau(aa^*); a \in \mathcal{A}, \quad (3.8)$$

(qui ước $0 \cdot \infty = 0$). Hơn nữa nếu u là một unitar thì $\tau(uau^{-1}) = \tau(a)$ với mọi a thuộc $\mathcal{A}^+$. Khi đó τ gọi là vết của đại số $\mathcal{A}$.

Nếu $\tau(a) < \infty$ với mọi a thuộc $\mathcal{A}^+$ thì τ gọi là vết hữu hạn.

Nếu $\tau(a) = \sup\{\tau(b) \mid b \leq a, \tau(b) < \infty\}$ thì τ gọi là vết nửa hữu hạn.

Nếu $\tau(a) = 0$ và $a \geq 0$ mà suy ra $a = 0$ thì gọi là vết chính xác.

Vết τ gọi là chuẩn tắc (nomal) nếu $\tau(a) = \sup_{\alpha} \tau(a_\alpha)$ trong đó a_α là dãy các toán tử tăng tới a trong $\mathcal{A}^+$.

Định nghĩa 3.2.2. Một vết chuẩn tắc, chính xác, nửa hữu hạn trên $\mathcal{A}$ là một hàm $\tau : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, \infty]$ thỏa mãn (3.6), (3.7), (3.8) và:

$$\text{Nếu } a_\alpha \uparrow a \text{ trong } \mathcal{A}^+ \text{ thì } \tau(a_\alpha) \uparrow \tau(a), \quad (3.9)$$

$$\text{Nếu } \tau(a) = 0 \text{ thì } a = 0, a \in \mathcal{A}^+, \quad (3.10)$$

$$\text{và với mọi } a \in \mathcal{A}^+, \text{ tồn tại dãy } a_\alpha \in \mathcal{A}^+ \text{ với } a_\alpha \uparrow a \text{ và } \tau(a_\alpha) < \infty. \quad (3.11)$$

($a_\alpha \uparrow a$ nghĩa là dãy a_α hội tụ tăng tới a trong tô pô toán tử mạnh).

Nhận xét 3.2.3. Theo (3.8) $\tau(p) = \tau(q)$ khi $p \sim q$.

Theo (3.3) thì $\tau(p \vee q) \leq \tau(p) + \tau(q)$ với mọi phép chiếu p và q thuộc $\mathcal{A}$. Bằng quy nạp ta có $\tau(\vee p_\alpha) \leq \Sigma \tau(p_\alpha)$ với hữu hạn phép chiếu p_α thuộc $\mathcal{A}$. Nếu p_α là họ các phép chiếu bất kỳ của $\mathcal{A}$ và các hợp hữu hạn của chúng là một dãy tăng thì chuyển qua giới hạn công thức trên ta có:

$$\tau(\vee p_\alpha) \leq \Sigma \tau(p_\alpha)$$

Dấu "=" xảy ra khi các p_α là trực giao tương hỗ (mutually orthogonal), tức là $p_\alpha \cdot p_\beta = 0$ với mọi α khác β (hay $p_\alpha(H) \perp p_\beta(H)$).

Trên đại số von Neumann bất kỳ luôn tồn tại một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn.

Ví dụ 3. Trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ký hiệu

$$L_2(P) = \{f : E|f|^2 < \infty\}$$

và tích vô hướng trong $L_2(P)$: $\langle f, g \rangle = Ef \cdot \bar{g}$. Ký hiệu

$$L_\infty(P) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid P(\{w : |f(w)| < m\}) = 1\}$$

với m nào đó. Với mọi $f \in L_\infty(P)$ ta xét ánh xạ

$$Tf : L_2(P) \rightarrow L_2(P)$$

$$g \mapsto fg$$

Xét $\mathcal{A} = \{Tf : f \in L_\infty(P)\} \subset B(L_2(P))$. Khi đó $\mathcal{A}$ là một đại số von Neumann và đại số này là đại số giao hoán.

Trên $\mathcal{A}$ ta xây dựng hàm τ như sau

$$\tau(Tf) = \int_{\Omega} f dP = Ef$$

Ta có Tf khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại $n > 0$ sao cho

$$P(\{|f(w)| > n\}) = 1 \text{ và } (Tf)^{-1} = Tf.$$

Nếu $Ef = 0, f \geq 0$ thì $f = 0$. Vậy τ là vết chính xác.

Khi $Tf_\alpha \uparrow Tf$ hay $f_\alpha \uparrow f$ thì $Ef_\alpha \uparrow Ef$ hay $\tau(Tf_\alpha) \uparrow \tau(Tf)$. Vậy τ là vết chuẩn tắc.

Do đó τ là vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn trên đại số von Neumann $\mathcal{A}$.

Cuối cùng từ (3.4) và tính chính xác của τ (3.10), nếu k là một phép chiếu trong $\mathcal{A}$ thỏa mãn: với mọi $\epsilon > 0$, có một phép chiếu p trong $\mathcal{A}$ với $k \wedge p = 0$ và $\tau(p^\perp) \leq \epsilon$, thì $k=0$. Nếu k_1 và k_2 là các phép chiếu trong $\mathcal{A}$ thì áp dụng với $k_1 - k_2$, ta có:

$$k_1 = k_2 \text{ nếu với mọi } \epsilon > 0, \text{ tồn tại } p: k_1 \wedge p = k_2 \wedge p, \tau(p^\perp) \leq \epsilon.$$

3.3 Sự hội tụ theo độ đo

Trong phần này, chúng ta giả thiết $\mathcal{A}$ là đại số von Neumann trên không gian Hilbert H , với một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn τ . Dưới đây là một cách tiếp cận mới lý thuyết tích phân, trong đó ý tưởng chủ đạo là chia không gian thành các mảng nhỏ, vấn đề phức tạp chỉ có ở trường hợp tích phân không giao hoán (đối lập với thuyết tích phân giao hoán thông thường).

Định nghĩa 3.3.1. Ta có các khái niệm sau:

1. Cho $\epsilon, \delta > 0$. Đặt:

$$N(\epsilon, \delta) = \{a \in \mathcal{A} \mid \text{với phép chiếu } p \text{ nào đó trong } \mathcal{A}, \|ap\| \leq \epsilon, \text{ và } \tau(p^\perp) \leq \delta\}$$

Ta gán cho $\mathcal{A}$ một tôpô bất biến đối với phép tịnh tiến, ở đó $N(\epsilon, \delta)$ là một hệ cơ bản của các lân cận của 0. Ta gọi đó là tôpô độ đo của $\mathcal{A}$.

Trong $\mathcal{A}$ ta có các khái niệm sau:

2. Dãy $\{a_n\}$ hội tụ theo độ đo đến a nếu a_n hội tụ tới a trong tôpô độ đo của $\mathcal{A}$, nghĩa là với mọi $\epsilon, \delta > 0$, tồn tại $n_0 > 0$ sao cho với mọi $n > n_0$ thì $a_n - a \in N(\epsilon, \delta)$.

3. Dãy $\{a_n\}$ là Cauchy theo độ đo nếu với mọi $\epsilon, \delta > 0$, có $n_0 > 0$ sao cho với mọi $m, n > n_0$ thì $a_n - a_m \in N(\epsilon, \delta)$.

4. Ta nói rằng tập con S của $\mathcal{A}$ là bị chặn theo độ đo, nếu với mọi N là lân cận của 0, tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn $\alpha S \subset N$.

Từ $\alpha N(c, \delta) = N(\alpha c, \delta)$, một tập con S của $\mathcal{A}$ là bị chặn theo độ đo khi và chỉ khi với mọi $\delta > 0$, tồn tại hằng số $c < \infty$ thỏa mãn $S \subset N(c, \delta)$.

Tương tự, với $\epsilon, \delta > 0$. Đặt:

$$O(\epsilon, \delta) = \{\psi \in H \mid \text{với phép chiếu } p \text{ nào đó trong } \mathcal{A}, \|p\psi\| \leq \epsilon, \text{ và } \tau(p^\perp) < \delta\}$$

Ta gán cho H một tô pô bất biến với phép tịnh tiến, trong đó $O(\epsilon, \delta)$ là hệ cơ bản của lân cận của 0. Ta gọi đó là tô pô theo độ đo của H . Các khái niệm hội tụ theo độ đo, Cauchy theo độ đo và bị chặn theo độ đo như định nghĩa trên.

Một tập con S của H là bị chặn theo độ đo khi và chỉ khi với mọi $\delta > 0$, tồn tại một hằng số $c < \infty$ thỏa mãn $S \subset O(c, \delta)$.

Định lý 3.3.2. *Cho $\tilde{\mathcal{A}}$ là mở rộng đầy đủ (completion) của $\mathcal{A}$, và $\tilde{H}$ là mở rộng đầy đủ của H . Các ánh xạ*

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad a \mapsto a^* \quad (3.12)$$

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a + b \quad (3.13)$$

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto ab \quad (3.14)$$

$$H \times H \rightarrow H, \quad (\psi, \phi) \mapsto \psi + \phi \quad (3.15)$$

$$\mathcal{A} \times H \rightarrow H, \quad (a, \psi) \mapsto a\psi \quad (3.16)$$

tương ứng có duy nhất một ánh xạ thác triển liên tục (continuous extension) $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{H} \times \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}, \tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$.

Các ánh xạ (3.12), (3.13), (3.15) và các thác triển của chúng là liên tục đều. Các ánh xạ (3.14), (3.16) và các thác triển tương ứng của chúng là liên tục đều trên các tích của các tập bị chặn theo độ đo.

Chứng minh. Ta cần chứng minh các khẳng định sau

$$N(\epsilon, \delta)^* \subset N(\epsilon, 2\delta)$$

$$N(\epsilon_1, \delta_1) + N(\epsilon_2, \delta_2) \subset N(\epsilon_1 + \epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$$

$$N(\epsilon_1, \delta_1)N(\epsilon_2, \delta_2) \subset N(\epsilon_1\epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$$

$$O(\epsilon_1, \delta_1) + O(\epsilon_2, \delta_2) \subset O(\epsilon_1 + \epsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$$

$$N(\epsilon_1, \delta_1)O(\epsilon_2, \delta_2) \subset O(\epsilon_1\epsilon_2, 2\delta_1 + \delta_2)$$

Ta đặt tương ứng các khẳng định trên là (3.12'), (3.13'), (3.14'), (3.15'), (3.16').

Rõ ràng nếu (3.12'), (3.13'), (3.15') là đúng thì (3.12), (3.13), (3.15) là các ánh xạ liên tục đều. Từ đó sự mở rộng liên tục là duy nhất và là liên tục đều.

Nếu (3.15') và (3.16') là đúng, ta suy ra tính liên tục đều của (3.16) trên tích các tập bị chặn theo độ đo. Ta nhớ lại dãy Cauchy theo độ đo là bị chặn theo độ đo. Do vậy các ánh xạ (3.14) và (3.16) có các thác triển liên tục là duy nhất và liên tục đều trên tích các tập bị chặn theo độ đo. Từ (3.13') và (3.14') ta suy ra (3.14). Để chỉ ra tính liên tục đều của (3.14) trên $S_1 \times S_2$, ta cho $\epsilon, \delta > 0$ và cần chỉ ra $\epsilon_1, \delta_1, \epsilon_2, \delta_2 > 0$ thỏa mãn nếu $a \in S_1, b \in S_2$ thì

$$ab - (a + N(\epsilon_1, \delta_1))(b + N(\epsilon_2, \delta_2)) \subset N(\epsilon, \delta)$$

Thực vậy, cho $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tồn tại $c_1, c_2 < \infty$ thỏa mãn $S_1 \subset N(c_1, \alpha_1)$ và $S_2 \subset N(c_2, \alpha_2)$. Do đó

$$\begin{aligned} & ab - (a + N(\epsilon_1, \delta_1))(b + N(\epsilon_2, \delta_2)) \\ & \subset N(c_1, \alpha_1)N(\epsilon_2, \delta_2) + N(c_2, \alpha_2)N(\epsilon_1, \delta_1) + N(\epsilon_1, \delta_1)N(\epsilon_2, \delta_2) \\ & \subset N(c_1\epsilon_2, \alpha_1 + \delta_2) + N(\epsilon_1c_2, \delta_1 + \alpha_2) + N(\epsilon_1\epsilon_2, \delta_1 + \delta_2) \\ & \subset N(c_1\epsilon_2 + \epsilon_1c_2 + \epsilon_1\epsilon_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\delta_1 + 2\delta_2) \\ & \subset N(\epsilon, \delta) \end{aligned}$$

ở đây ta chọn δ_1, δ_2 thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\delta_1 + 2\delta_2 \leq \delta$, và chọn $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ sao cho $c_1\epsilon_2 + \epsilon_1c_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \leq \epsilon$.

Như vậy thực chất của định lý này ta cần chứng minh (3.12') đến (3.16').

Ta chứng minh (3.12'). Cho $a \in N(\epsilon, \delta)$. Tồn tại phép chiếu $p \in \mathcal{A}$ với $\|ap\| \leq \epsilon$ và $\tau(p^\perp) \leq \delta$. Từ đó $\|pap\| \leq \epsilon$, do vậy $\|pa^*p\| \leq \epsilon$.

Lại do (3.4) nên $a^*(p \wedge p_{a^*}) = pa^*(p \wedge p_{a^*}) = pa^*p(p \wedge p_{a^*})$. Do vậy $\|a^*(p \wedge p_{a^*})\| \leq \epsilon$ và

$$\tau((p \wedge p_{a^*})^\perp) = \tau(p^\perp \vee p_{a^*}^\perp) \leq \tau(p^\perp) + \tau(p_{a^*}^\perp) \leq 2\tau(p^\perp) \leq 2\delta$$

Vậy (3.12') được chứng minh.

Ta chứng minh (3.13') và (3.15'). Cho $a \in N(\epsilon_1, \delta_1), b \in N(\epsilon_2, \delta_2)$ với

$$\|ap\| \leq \epsilon_1, \tau(p^\perp) \leq \delta_1, \|bq\| \leq \epsilon_2, \tau(q^\perp) \leq \delta_2$$

Từ đó $(a + b)(p \wedge q) = (ap + bq)(p \wedge q)$. Do vậy

$$|(a + b)(p \wedge q)| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{và} \quad \tau((p \wedge q)^\perp) = \tau(p^\perp \vee q^\perp) \leq \delta_1 + \delta_2$$

Do đó (3.13') và (3.15') được chứng minh.

Với ký hiệu tương tự,

$$ab(q \wedge p_b) = ap_bq(q \wedge p_b)$$

suy ra $|ab(q \wedge p_b)| \leq |ap_b||bq| \leq \epsilon_1\epsilon_2$ và $\tau((q \wedge p_b)^\perp) \leq \delta_1 + \delta_2$. Vậy (3.14') được chứng minh.

Ta chứng minh (3.16'). Cho $a \in N(\epsilon_1, \delta_1)$, $\psi \in O(\epsilon_2, \delta_2)$ với $\|q\psi\| \leq \epsilon_2$, $\tau(q^\perp) \leq \delta_2$. Theo (3.12'), $a^* \in N(\epsilon_1, 2\delta_1)$. Từ đó tồn tại một phép chiếu $p \in \mathcal{A}$ với $\|a^*p\| \leq \epsilon_1$, $\tau(p^\perp) \leq 2\delta_1$. Do đó $\|pa\| \leq \epsilon_1$.

Theo (3.11) thì $q_{a^*}a = q_{a^*}aq$ nên

$$(p \wedge q_{a^*})a\psi = (p \wedge q_{a^*})paq\psi$$

$$|(p \wedge q_{a^*})a\psi| \leq \|pa\| \|q\psi\| \leq \epsilon_1\epsilon_2$$

$$\tau((p \wedge q_{a^*})^\perp) \leq \tau(p^\perp) + \tau(q^\perp) \leq 2\delta_1 + \delta_2.$$

Vậy (3.16') được chứng minh. $\square$

Định lý 3.3.3. (i) H và $\mathcal{A}$ là các không gian Hausdorff trong tôpô độ đo.

(Do vậy ánh xạ tự nhiên của $\mathcal{A}$ vào $\tilde{\mathcal{A}}$ và H vào $\tilde{H}$ theo tôpô độ đo là đơn ánh).

(ii) Nếu a thuộc $\tilde{\mathcal{A}}$ thì với mọi $\epsilon > 0$, có một phép chiếu p thuộc $\mathcal{A}$ sao cho ap thuộc $\mathcal{A}$ và $\tau(p^\perp) \leq \epsilon$.

Chứng minh. (i) Giả sử ψ ở trong mọi lân cận của 0 trong tôpô độ đo của H . Khi đó với mỗi n , có một phép chiếu q_n trong $\mathcal{A}$ với $\|q_n\psi\| \leq 2^{-n}$ và $\tau(q_n^\perp) \leq 2^{-n}$. Đặt

$$p_n = \bigwedge_{k=n}^{\infty} q_k$$

Khi đó $p_n \in \mathcal{A}$, $p_n\psi = 0$ với mọi n , p_n là dãy tăng và $\tau(p_n^\perp) \leq 2^{-n+1} \downarrow 0$. Do vậy $p_n \uparrow I$ và $\psi = 0$. Từ đó H là không gian Hausdorff trong tôpô độ đo.

Tương tự nếu $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$ và a nằm trong mọi lân cận của 0 trong tôpô

độ đo. Từ $a \neq 0$, tồn tại $\psi \neq 0$ trong H thỏa mãn $a\psi \neq 0$. Nhưng theo Định lý 3.3.2, $a\psi$ ở trong mọi lân cận của 0 trong tôpô độ đo của H , nên $a\psi = 0$. Điều mâu thuẫn này dẫn đến $a=0$. Vậy $\mathcal{A}$ là không gian Hausdorff trong tôpô độ đo.

(ii) Cho a thuộc $\widetilde{\mathcal{A}}$ thì a là giới hạn của một dãy các phần tử của $\mathcal{A}$. Ta có thể viết:

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{với} \quad a_0, a_k \in \mathcal{A}, a_k \in N(2^{-k}, 2^{-k})$$

Khi đó có các phép chiếu q_k trong $\mathcal{A}$ với $\|a_k q_k\| \leq 2^{-k}, \tau(q_k^\perp) \leq 2^{-k}$. Đặt

$$p_n = \bigwedge_{k=n}^{\infty} q_k$$

thì $p_n \uparrow I$ và $\tau(p_n^\perp) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \tau(q_k^\perp) \downarrow 0$. Từ $p_n \rightarrow I$ trong độ đo và từ Định lý 3.3.2 ta có:

$$\begin{aligned} ap_n &= a_0 p_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_n \\ &= a_0 p_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k p_n + \sum_{k=n}^{\infty} a_k q_k p_n \end{aligned}$$

Tổng $\sum_{k=n}^{\infty} a_k q_k p_n$ hội tụ theo chuẩn nên $ap_n \in \mathcal{A}$. Vậy (ii) được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 3.3.4. Một toán tử A trên H (không cần bị chặn hay xác định hầu khắp nơi) gọi là *liên kết* với $\mathcal{A}$ nếu $Au = uA$ với mọi toán tử unitar u trong tập giao hoán $\mathcal{A}'$. Theo Định lý (3.3.5), một toán tử A thuộc $B(H)$ là liên kết với $\mathcal{A}$ khi và chỉ khi A thuộc $\mathcal{A}$.

Với $D(A)$ là miền xác định của một toán tử A , ta nêu không chứng minh định lý sau:

Định lý 3.3.5. Cho A và B là các toán tử đóng liên kết với $\mathcal{A}$. Giả sử với mọi $\epsilon > 0$, có một phép chiếu p thuộc $\mathcal{A}$ với $\tau(p^\perp) \leq \epsilon$ sao cho: với mỗi ψ thuộc $D(A)$ mà cả ψ và $A\psi$ thuộc miền giá trị của p , thì ψ thuộc $D(B)$ và $B\psi = A\psi$ và ngược lại. Khi đó $A = B$. (Trường hợp riêng của định lý này là nếu $pH \in D(A) \cap D(B)$ và $Ap = Bp$ thì $A = B$)

Cho toán tử T thuộc $B(H)$ có đồ thị là:

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

Bao đóng $\overline{\mathcal{G}(T)}$ của T là một không gian con tuyến tính của $H \oplus H$. Nếu $\overline{\mathcal{G}(T)}$ là đồ thị của một toán tử, kí hiệu là $\overline{T}$, thì $\overline{T}$ được gọi là bao đóng của toán tử T . Ở đó, $D(T) \subset D(\overline{T})$, $\overline{T}x = Tx$ với mỗi x thuộc $D(T)$, và $\overline{T}$ là một toán tử đóng.

Nếu a thuộc $\tilde{\mathcal{A}}$ và ψ thuộc H thì $a\psi$ thuộc $\tilde{H}$. Nếu $a\psi$ thuộc H thì ta nói ψ thuộc tập xác định của toán tử nhân bởi a , ta viết $\psi \in D(M_a)$ và định nghĩa $M_a\psi = a\psi$.

Định lý 3.3.6. Với mọi a thuộc $\tilde{\mathcal{A}}$, M_a là một toán tử đóng, xác định trừu mật liên kết với $\mathcal{A}$ và:

$$M_a^* = M_{a^*} \quad (3.17)$$

Nếu a và b đều thuộc $\tilde{\mathcal{A}}$ thì:

$$M_{a+b} = \overline{M_a + M_b} \quad (3.18)$$

$$M_{ab} = \overline{M_a M_b} \quad (3.19)$$

Chứng minh. Tất cả các toán tử xuất hiện trong khẳng định của định lý đã được gắn với a và b theo cấu trúc lý thuyết của không gian Hilbert, rõ ràng chúng liên kết với $\mathcal{A}$.

Giả sử $\psi \in D(M_a)$, $\psi_n \rightarrow \psi$ trong H và $M_a\psi_n \rightarrow \phi$ trong H . Khi đó $\psi_n \rightarrow \psi$ theo độ đo, do vậy $M_a\psi_n = a\psi_n \rightarrow a\psi$ theo độ đo.

Vì $M_a\psi_n \rightarrow \phi$ trong H theo độ đo và $\tilde{H}$ là không gian Hausdorff nên theo Định lý (3.3.3)(i) ta có $a\psi = \phi$. Do vậy $\psi \in D(M_a)$ và $M_a\psi = \phi$. Vì vậy M_a là đóng.

Theo Định lý (3.3.3)(ii), $D(M_a) \supset pH$ với phép chiếu $p \in \mathcal{A}$ và $\tau(p^\perp)$ nhỏ tùy ý. Do đó $D(M_a)^\perp = 0$ và M_a xác định trừu mật.

Cho $\epsilon > 0$. Theo Định lý (3.3.3)(ii), tồn tại phép chiếu p thuộc $\mathcal{A}$ sao cho: $a^*p \in \mathcal{A}$, $\tau(p^\perp) \leq \epsilon$. Khi đó $pH \subset D(M_{a^*})$. Cho ψ thuộc pH và ϕ thuộc $D(M_a)$ ta có:

$$\langle M_a\phi, \psi \rangle = \langle pa\phi, \psi \rangle = \langle \phi, a^*p\psi \rangle = \langle \phi, M_{a^*}\psi \rangle$$

Do đó ψ thuộc $D(M_{a^*})$ và $M_{a^*}\psi = M_a^*\psi$. Tức là $pH \subset D(M_{a^*}) \cap D(M_a^*)$ và $M_a^*p = M_{a^*}p$. Do đó $M_a^* = M_{a^*}$.

Rõ ràng $M_a + M_b \subset M_{a+b}$, nên $M_a + M_b$ có một bao đóng. Cho p, q là các phép chiếu trong $\mathcal{A}$ với

$$\tau(p^\perp) \leq \epsilon, \tau(q^\perp) \leq \epsilon, ap \in \mathcal{A}, bq \in \mathcal{A}$$

và cho $r = p \wedge q$, thì $ar \in \mathcal{A}, br \in \mathcal{A}$ và $\tau(r^\perp) \leq 2\epsilon$. Khi đó, với mọi ψ nằm trong tập ảnh của r , $(M_a + M_b)\psi = M_{a+b}\psi$. Vậy $M_{a+b} = \overline{M_a + M_b}$. Ta chứng minh $M_{ab} = \overline{M_a M_b}$. Rõ ràng $M_{ab} \subset \overline{M_a M_b}$, do vậy $M_a M_b$ có một bao đóng. Với p, q như trên, đặt $s = q \wedge p$, suy ra $\tau(s^\perp) \leq 2\epsilon$. Và với mọi ψ nằm trong tập ảnh của s ta có

$$M_a M_b \psi = M_{ab} \psi$$

Vậy $M_{ab} = \overline{M_a M_b}$. □

Nhận xét 3.3.7. Mỗi toán tử đóng xác định trừ mật A trên H có một phân tích cực $A = u|A|$. Và nếu A liên kết với $\mathcal{A}$ thì $u \in \mathcal{A}$ và các phép chiếu phổ e_λ của $|A|$ là thuộc $\mathcal{A}$. Dễ thấy một toán tử đóng xác định trừ mật A liên kết với $\mathcal{A}$ có dạng $A = M_a$ với duy nhất phần tử $a \in \tilde{\mathcal{A}}$ khi và chỉ khi $\tau(e_\lambda^\perp) < \infty$ với λ đủ lớn.

Thực vậy, nếu $\tau(e_\lambda^\perp) < \infty$ với λ đủ lớn thì $\tau(e_\mu^\perp) \rightarrow 0$ khi $\mu \rightarrow \infty$. Từ $e_\lambda^\perp - e_\mu^\perp \uparrow e_\lambda^\perp$ khi $\mu \uparrow \infty$ ta có

$$a_n = u \int_0^n \lambda de_\lambda$$

là dãy Cauchy theo độ đo, hội tụ tới a nào đó trong $\tilde{\mathcal{A}}$ và $A = M_a$ theo Định lý (3.3.5).

Ngược lại nếu:

$$M_a = u \int_0^\infty \lambda de_\lambda$$

và $ap \in \mathcal{A}$ với $\tau(p^\perp) \leq \epsilon$ thì với $\lambda > \|ap\|$ ta có $e_\lambda^\perp \wedge p = 0$. Do vậy $e_\lambda^\perp < p^\perp$ và $\tau(e_\lambda^\perp) \leq \epsilon$. Đặc biệt nếu τ là hữu hạn thì mỗi toán tử đóng xác định trừ mật liên kết với $\mathcal{A}$ có dạng M_a với duy nhất a trong $\mathcal{A}$.

Để nghiên cứu về tích phân theo vết (Mục 3.4), chúng tôi xin trình bày **Sơ lược về lý thuyết phổ** như sau:

Định nghĩa 3.3.8. Nếu A là một phần tử của đại số Banach $\mathcal{U}$, một số phức λ được gọi là giá trị phổ của A khi $A - \lambda I$ không khả nghịch trong $\mathcal{U}$. Tập các giá trị phổ của A được gọi là phổ của A và được ký hiệu là $sp(A)$.

Bán kính phổ của một phần tử A trong đại số Banach $\mathcal{U}$, kí hiệu là $r(A)$, và được định nghĩa:

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp(A)\}.$$

Như vậy, nếu A là một phần tử trong đại số Banach $\mathcal{U}$, thì phổ của A là một tập con đóng khác rỗng của đĩa đóng trong $\mathbb{C}$ với tâm 0 bán kính $\|A\|$. Do đó $r(A) \leq \|A\|$.

Nếu $\mathcal{U}$ và $\mathcal{V}$ là các đại số Banach với các phép đối hợp tương ứng, một ánh xạ $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ được mô tả là một *đồng cấu nếu φ là đồng cấu với $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$, $A \in \mathcal{U}$. Hơn nữa, nếu φ là song ánh thì φ được mô tả là một *đẳng cấu. Các *đồng cấu không làm tăng chuẩn và các *đẳng cấu bảo toàn chuẩn, khi $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ là các C^* -đại số.

Nếu $\mathcal{U}$ là một đại số Banach với một phép đối hợp, một tập con $\mathcal{E}$ của $\mathcal{U}$ được gọi là tự liên hợp nếu $\mathcal{E}$ chứa liên hợp của mỗi phần tử trong $\mathcal{E}$. Một đại số con tự liên hợp của $\mathcal{U}$ là một *đại số con. Một *đại số con đóng $\mathcal{B}$ của $\mathcal{U}$ có chứa phần tử đơn vị của $\mathcal{U}$ chính là một đại số Banach; nếu $\mathcal{U}$ là một C^* -đại số thì $\mathcal{B}$ cũng là một C^* -đại số, và ta gọi là C^* -đại số con của $\mathcal{U}$.

Mệnh đề 3.3.9. Cho A là một phần tử của C^* -đại số $\mathcal{U}$.

- (i) Nếu A chuẩn tắc thì $r(A) = \|A\|$.
- (ii) Nếu A là tự liên hợp, $sp(A)$ là một tập con compact của đường thẳng thực, và chứa ít nhất một trong hai số thực $\|A\|$ và $-\|A\|$.
- (iii) Nếu A là unitar thì $\|A\| = 1$ và $sp(A)$ là một tập con compact của đường tròn đơn vị $\{a \in \mathbb{C} : |a| = 1\}$.

Định lý 3.3.10. (Định lý phổ)

Nếu A là một phần tử tự liên hợp của C^* -đại số $\mathcal{U}$, có duy nhất một ánh xạ $f \rightarrow f(A) : C(sp(A)) \rightarrow \mathcal{U}$ thỏa mãn:

- (i) $\|f(A)\| = \|f\|$,
- (ii) $(af + bg)(A) = af(A) + bg(A)$,
- (iii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$,
- (iv) $\overline{f}(A) = [f(A)]^*$, $\overline{f}$ là hàm phức liên hợp của f ,

- (v) $f(A)$ là chuẩn tắc,
 (vi) $f(A)B = Bf(A)$, khi $B \in \mathcal{U}$ và $AB = BA$,
 (với mọi f, g thuộc $C(sp(A))$ và mọi a, b thuộc $\mathbb{C}$).

Nếu A là một phần tử tự liên hợp của C^* -đại số $\mathcal{U}$, tập $\mathcal{U}(A) = \{f(A) : f \in C(sp(A))\}$ là một C^* -đại số aben. Đây là đại số con đóng bé nhất của $\mathcal{U}$ chứa I và A (và A^*). Mỗi phần tử của $\mathcal{U}(A)$ là giới hạn của một dãy của các đa thức của A .

Cho X là một không gian Hausdorff compact, $C(X)$ là đại số của các hàm phức liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, thì $C(X)$ là một ví dụ về C^* -đại số aben. Nếu $\mathcal{A}$ là một đại số von Neumann aben thì $\mathcal{A}$ đẳng cấu với $C(X)$, ở đó X là một không gian Hausdorff compact vô cùng rời rạc (extremely disconnected).. Định lý sau đây mô tả về *giải phổ* (spectral resolution) của một toán tử tự liên hợp bị chặn.

Định lý 3.3.11. *Nếu A là một toán tử tự liên hợp trên không gian Hilbert H và $\mathcal{A}$ là một đại số von Neumann aben chứa A , có một họ $\{e_\lambda\}$ của các phép chiếu trong $\mathcal{A}$, chỉ số λ trong $\mathbb{R}$, thỏa mãn:*

- (i) $e_\lambda = 0$ nếu $\lambda < -\|A\|$, và $e_\lambda = I$ nếu $\|A\| \leq \lambda$;
 (ii) $e_\lambda \leq e_{\lambda'}$ nếu $\lambda \leq \lambda'$;
 (iii) $e_\lambda = \bigwedge_{\lambda' > \lambda} e_{\lambda'}$;
 (iv) $Ae_\lambda \leq \lambda e_\lambda$ và $\lambda(I - e_\lambda) \leq A(I - e_\lambda)$ với mỗi λ ;
 (v) $A = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda de_\lambda$, và A là giới hạn của hữu hạn các tổ hợp tuyến tính (các hệ số trong $sp(A)$) của các phép chiếu trực giao $e_{\lambda'} - e_\lambda$.

3.4 Tích phân theo vết

Cho $\mathcal{A}$ là đại số von Neumann trên không gian Hilbert H . Giả sử τ là một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn trên $\mathcal{A}$. Mục đích của phần này là định nghĩa các không gian L^p , $L^p = L^p(\mathcal{A}, \tau)$, $1 \leq p \leq \infty$, và thiết lập các tính chất của chúng. Segal đã xây dựng chúng với $p = 1, 2, \infty$ (ở đó $L^\infty = \mathcal{A}$). Còn Kunze xây dựng được L^p trong trường hợp tổng quát. Trong phần này, chúng ta sẽ tiếp cận với cách xây dựng dựa trên khái niệm hội tụ theo độ đo đã được Edward Nelson đề xuất.

3.4.1 Xây dựng tích phân theo vết

Đặt:

$$J_2 = \{a \in \mathcal{A} \mid \tau(a^*a) < \infty\}$$

Cho a thuộc J_2 và b thuộc $\mathcal{A}$ thì $(ba)^*ba \leq \|b\|^2 a^*a$. Do vậy ba thuộc J_2 . Nếu a và b thuộc J_2 thì $a + b \in J_2$, vì $(a + b)^*(a + b) \leq 2(a^*a + b^*b)$. Vậy J_2 là ideal trái.

Theo (3.8) thì J_2 là tự liên hợp nên là ideal hai phía (Sau này ta sẽ đồng nhất J_2 với $L^2 \cap L^\infty$).

Đặt $J = J_2^2$ thì J là một ideal (sau này sẽ đồng nhất với $L^1 \cap L^\infty$). Nếu $a \in \mathcal{A}^+$, $\tau(a) < \infty$ thì $a^{1/2} \in J_2$. Do vậy $a \in J$.

Ngược lại, cho $c \geq 0$, $c \in J$ thì c là tổng hữu hạn $c = \sum b_i a_i$ với $b_i, a_i \in J_2$. Từ $c \leq \frac{1}{2} \sum (b_i b_i^* + a_i^* a_i)$ ta có $\tau(c) < \infty$.

Vậy J gồm mọi tổ hợp tuyến tính hữu hạn các phần tử $a \in \mathcal{A}^+$ với $\tau(a) < \infty$ và các phần tử như thế tạo nên $J \cap \mathcal{A}^+$. Như vậy τ thác triển duy nhất thành một phiếm hàm tuyến tính (vẫn ký hiệu là τ) ở trên J . Theo khai triển áp dụng cho (3.8) ta có $\tau(b^*a) = \tau(ab^*)$, do vậy $\tau(ba) = \tau(ab)$ với mọi $a, b \in J$. Từ đó nếu $a \geq 0$ và $a \in J$ thì $\tau(ba) = \tau(a^{1/2}ba^{1/2})$. Do vậy

$$0 \leq \tau(ba) \leq \|b\| \tau(a)$$

với mọi $b \geq 0$ thuộc J , do đó đúng với mọi $b \in \mathcal{A}^+$. Suy ra

$$|\tau(ba)| \leq \|b\| \tau(a)$$

với mọi b thuộc $\mathcal{A}$.

Ta sẽ ký hiệu $\|b\|_\infty$ là chuẩn toán tử của phần tử $b \in \mathcal{A}$ và đặt $\|a\|_1 = \tau(|a|)$ với $a \in J$. Từ $a = u|a|$ với $\|u\|_\infty = 1$ ta có

$$|\tau(ba)| \leq \|b\|_\infty \|a\|_1, b \in \mathcal{A}, a \in J \quad (3.20)$$

Với $1 \leq p < \infty$ và $a \in J$, đặt $\|a\|_p = \tau(|a|^p)^{1/p}$ ta có
Bất đẳng thức Holder

$$|\tau(ba)| \leq \|b\|_q \|a\|_p \quad (3.21)$$

với a và b thuộc J và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (p, q cố định).

Chứng minh. Cho $u, v \in \mathcal{A}$ với $\|u\|_\infty \leq 1, \|v\|_\infty \leq 1$. Cho $c \geq 0, d \geq 0, c \in J, d \in J$ với c, d bị chặn dưới bởi giá trị dương trên các không gian trực giao với không gian không của chúng.

Khi đó $s \mapsto \tau(ud^s vc^{1-s})$ là liên tục và bị chặn trên $0 \leq Res \leq 1$ và là chỉnh hình trên phần trong. Với $0 \leq \sigma \leq 1$ ta có

$$|\tau(ud^\sigma vc^{1-\sigma})| \leq \sup_{Res=1} |\tau(ud^s vc^{1-s})|^\sigma \cdot \sup_{Res=0} |\tau(ud^s vc^{1-s})|^{1-\sigma} \leq \|d\|_1^\sigma \cdot \|c\|_1^{1-\sigma}$$

Thay c bởi $|a|^{1/\sigma}$, d bởi $|b|^{1/(1-\sigma)}$, ở đó $a = u|a|, b = v|b|, \sigma = \frac{1}{p}, 1 - \sigma = \frac{1}{q}$ ta được điều phải chứng minh.

Công thức tính chuẩn Với $a = u|a|$ trong J, đặt:

$$b = \frac{|a|^{p-1} u^*}{\|a\|_p^{p/q}}$$

trong đó $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dễ thấy $\|b\|_q = 1, \tau(ba) = \|a\|_p$. Tức là:

$$\|a\|_p = \sup_{\|b\|_q=1} |\tau(ba)| \quad (3.22)$$

và sup đạt được. Từ đây ta có BĐT Minkowski

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p \quad (3.23)$$

với $a, b \in J$. Bất đẳng thức này dễ có được vì với một phần tử c có $\|c\|_q = 1$, vế trái (3.23) là $\tau(c(a + b)) = \tau(ca) + \tau(cb)$ nhỏ hơn vế phải bởi BĐT Holder.

Cuối cùng chú ý là $\|a\|_p = 0$ thì $a = 0$ do tính chính xác của τ . Từ đó J là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn $\|\cdot\|_p$. Gọi L^p là không gian Banach mở rộng đầy đủ của J.

Nếu $a \geq 0$ thuộc J với biểu diễn phổ

$$a = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$$

thì $\|a\|_p^p = \tau(a^p) = \int_0^\infty \lambda^p d\tau(e_\lambda)$. Do vậy:

$$\|a\|_p^p \geq \lambda^p \tau(e_\lambda^\perp) \quad (3.24)$$

với mọi $\lambda \geq 0$. Điều này kéo theo nếu a_n thuộc J là dãy Cauchy trong L^p thì nó là dãy Cauchy theo độ đo. Từ đó tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục tự nhiên từ L^p vào $\tilde{\mathcal{A}}$.

Định lý 3.4.1. *Ảnh xạ tuyến tính liên tục tự nhiên từ L^p vào $\tilde{\mathcal{A}}$ là một đơn ánh.*

Chứng minh. Với $p = \infty$, đây là Định lý (3.3.3)(i).

Với $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cho $\{a_n\}$ là dãy Cauchy của J theo chuẩn của L^p với $a_n \rightarrow 0$ theo độ đo và $a_n \rightarrow a$ trong L^p .

Nếu $a \neq 0$ trong L^p thì có một b thuộc J với $\|b\|_q = 1$ thỏa mãn $\tau(ba_n)$ bị chặn dưới bởi giá trị dương khi n đủ lớn. Nhưng với mọi $\epsilon > 0$ và n đủ lớn, có một phép chiếu e với $\|a_n e\|_\infty \leq \epsilon$, $\tau(e^\perp) \leq \epsilon$. Từ đó

$$\begin{aligned} |\tau(ba_n)| &\leq |\tau(ba_n e)| + |\tau(ba_n e^\perp)| \\ &\leq \epsilon \|b\|_1 + \|b\|_\infty \|a_n\|_p \|e^\perp\|_q \\ &\leq \epsilon \|b\|_1 + \|b\|_\infty \|a_n\|_p \epsilon^{1/q} \end{aligned}$$

Nếu $p > 1$ thì $\epsilon^{1/q}$ nhỏ tùy ý và $\|a_n\|_p$ bị chặn. Do vậy định lý đúng khi $p > 1$.

Trường hợp $p = 1$: Cho $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong J theo chuẩn của L^p . Ta cần chứng minh với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn với mọi phép chiếu e trong $\mathcal{A}$ thì $|\tau(a_n e)| \leq \epsilon$ khi $\tau(e) \leq \delta$.

Muốn vậy ta chọn n_0 sao cho với mọi $m, n \geq n_0$ thì $\|a_m - a_n\|_1 \leq \epsilon/2$. Chọn $\delta > 0$ thỏa mãn $\|a_k\|_\infty \delta \leq \epsilon/2$ với $k = 1, \dots, n_0$.

Gọi e là một phép chiếu trong $\mathcal{A}$ với $\tau(e) \leq \delta$. Khi đó với $k \leq n_0$ ta có

$$|\tau(a_k e)| \leq \|a_k\|_\infty \|e\|_1 \leq \|a_k\|_\infty \delta \leq \epsilon$$

Với $k > n_0$ ta có

$$\begin{aligned} |\tau(a_k e)| &\leq |\tau((a_k - a_{n_0})e)| + |\tau(a_{n_0} e)| \\ &\leq \|a_k - a_{n_0}\|_1 \|e\|_\infty + \|a_{n_0}\|_\infty \|e\|_1 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ thỏa mãn với mọi phép chiếu e trong $\mathcal{A}$ thì $|\tau(a_n e)| \leq \epsilon$ khi $\tau(e) < \delta$.

Bây giờ ta giả sử $a_n \rightarrow 0$ theo độ đo. Cho $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ như trên. Với n đủ lớn, tồn tại phép chiếu p trong $\mathcal{A}$ với $\|a_n p\| \leq \epsilon$, $\tau(p^\perp) \leq \delta$. Với phép chiếu q nào đó trong $\mathcal{A}$ ta có:

$$\tau(a_n q) = \tau(a_n (q - q \wedge p)) + \tau(a_n (q \wedge p))$$

Nhưng $\tau(q - q \wedge p) = \tau(q \vee p - p) \leq \tau(p^\perp) \leq \delta$ nên $|\tau(a_n(q - q \wedge p))| \leq \epsilon$ và:

$$|\tau(a_n(q \wedge p))| = |\tau(a_n p(q \wedge p))| \leq \epsilon \tau(q)$$

Suy ra $|\tau(a_n q)| \leq \epsilon(1 + \tau(q))$ với mọi $\epsilon > 0$. Do đó $\tau(a_n q) \rightarrow 0$ với mọi phép chiếu q thỏa mãn $\tau(q) < \infty$.

Theo định lý phổ, với b nào đó trong J có thể xấp xỉ trong chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ bởi tổ hợp tuyến tính hữu hạn các phép chiếu. Từ đó $\tau(a_n b) \rightarrow 0$ với mọi b thuộc J hay $a_n \rightarrow 0$ trong L^1 .

□

Kết luận

Luận văn trình bày về việc xây dựng các không gian L^p ($1 \leq p < \infty$) cho một số các đại số toán tử trên không gian Hilbert phức H . Dựa trên mô hình coi tích phân là các phiếm hàm tuyến tính dương trên không gian các hàm giá trị thực, liên tục và triệt tiêu bên ngoài một tập compact. Chương 2, từ hàm vết của một toán tử compact là một tích phân, tác giả đã giới thiệu cách xây dựng các không gian khả tích cấp p , đi sâu vào tính chất của lớp toán tử vết và lớp toán tử Hilbert-Schmidt. Chương 3 tác giả giới thiệu một cách tiếp cận mới về khái niệm sự hội tụ theo độ đo trên một đại số von-Neumann theo một vết chuẩn tắc chính xác nửa hữu hạn. Từ đó, giới thiệu một cách ngắn gọn các vấn đề cơ sở trong lý thuyết tích phân không giao hoán.

Mặc dù vậy, do khả năng và thời gian còn hạn chế nên luận văn không thể tránh khỏi những sai sót, tác giả mong nhận được sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình của các thầy, sự hợp tác của các bạn để luận văn hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Hữu Dư, *Độ đo và tích phân*.
- [2] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2001), *Cơ sở lý thuyết hàm và giải tích hàm*, T II, NXB GD.
- [3] Trịnh Minh Nam (2007), *Toán tử đo được*, Luận văn thạc sỹ khoa học- ĐH KHTN.
- [4] Nguyễn Duy Tiến, Nguyễn Viết Phú (2006), *Cơ sở lý thuyết xác suất*, NXB ĐHQG HN.
- [5] Phạm Thị Phương Thuý (2007), *Phiếm hàm tuyến tính và độ đo*, Luận văn thạc sỹ khoa học- ĐH KHTN.
- [6] Edward Nelson (1974), *Notes on Non-commutative integration*, Journal of functional anylysic.
- [7] Pederson (1989), *Anlysis now*, Springer-Verlag New York Inc.
- [8] R.V.Kadison, J.R.Ringrose (1986), *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Volum I, II.