

CÔNG THỨC BÁN LÝ THUYẾT TÍNH VẬN TỐC RƠI BÃO HOÀ CỦA CÁC HẠT MƯA

Nguyễn Hương Điền

1. Mở đầu

Vận tốc rơi của các hạt mưa có liên quan chặt chẽ với cường độ mưa và do đó, công thức tính toán nó có liên quan với sơ đồ dự báo mưa trong các mô hình dự báo số, các mô hình tính hoặc dự báo tầm nhìn xa v.v... Do vậy, việc nghiên cứu nó có tầm quan trọng không nhỏ. Đã có nhiều công trình nghiên cứu về vấn đề này trên thế giới, nhưng các kết quả còn khá phân tán, thậm chí sai lệch nhiều giữa các tác giả khác nhau và chỉ dừng lại ở mức công thức thực nghiệm, không tiện áp dụng trong những điều kiện khí quyển khác nhau, chẳng hạn như các công thức của Gunn và Kinzer [2], Beard và Pruppacher [xem 5], Foote và Toit [3], Liu và Orville [4] v.v...

Ở đây chúng tôi phát triển một công thức bán lý thuyết cho phép tính vận tốc rơi của hạt mưa, trong các điều kiện áp suất và nhiệt độ khí quyển khác nhau dựa trên các số liệu đo tốc độ rơi của các hạt nước do Gunn, Kinzer và Pruppacher thực hiện ở nhiệt độ 20°C và áp suất 1013 mb, nêu trong bảng B1 của [5].

1.2. Phương pháp nghiên cứu

Khi rơi trong khí quyển yên tĩnh, các hạt mưa chịu tác dụng của các lực: trọng lực P , lực Acximet F_A và lực cản của không khí f_C . Khi vận tốc rơi đạt bão hoà (vận tốc dừng), phương trình chuyển động trở thành:

$$0 = \frac{dv}{dt} = P - F_A - f_C = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_n - \rho_k)g - f_C \quad (1)$$

trong đó m là khối lượng của hạt, g - gia tốc trọng trường, r - bán kính hạt, ρ_n và ρ_k - khối lượng riêng của nước lỏng và không khí.

Đối với các hạt nhỏ, do tốc độ rơi chậm, không gây ra các chuyển động rối của môi trường thì lực cản có thể tính được tương đối chính xác bằng công thức Stokes:

$$f_C = 6\pi\eta r v = f_0 \quad (2)$$

Tuy nhiên, đối với các hạt lớn, rơi với vận tốc lớn, công thức Stokes không còn áp dụng được nữa. Theo lý thuyết rối thì nếu sự rơi của hạt gây ra chuyển động rối của môi trường, lực cản sẽ phụ thuộc thêm vào một tham số nữa, đó là số Reynolds Re . Theo định nghĩa:

$$Re = \frac{2rv\rho_k}{\eta} \quad (3)$$

Nhiều tác giả đã đi tìm lực cản bằng cách hiệu chỉnh công thức Stokes dưới dạng:

$$f_C = f_0[1 + F(Re)] \quad (4)$$

trong đó F là một hàm nào đó của số Re với $F(Re) \rightarrow 0$ khi $Re \rightarrow 0$.

Một trong những công thức đáng chú ý nhất dưới dạng này là của L. Kliachko rút ra từ các thí nghiệm với các hạt hình cầu rắn rơi trong môi trường nhớt [xem 6]:

$$f_C = f_0 \left(1 + \frac{1}{6} Re^{2/3} \right) \quad (5)$$

Theo tác giả thì công thức này áp dụng tốt khi $3 < Re < 400$ với sai số nhỏ hơn 2%.

Pruppacher [xem 5] cũng sử dụng một công thức gần giống như vậy:

$$f_C = f_0 \left(1 + 0,189 Re^{0,632} \right) \quad (6)$$

và theo ông thì công thức trên áp dụng tốt cho các hạt mưa nhỏ với $21 < Re < 200$ để chúng không bị biến dạng khi rơi.

Tuy nhiên, đưa các công thức này vào phương trình chuyển động (1) ta sẽ tìm được vận tốc rơi của các hạt mưa lớn hơn thực tế khá nhiều. Thật vậy, đưa (5) vào (1) và lưu ý đến (2), (3) ta được:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_n - \rho_k) g - 6 \pi \eta r v \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{2 r v \rho_k}{\eta} \right)^{2/3} \right] = 0 \quad (7)$$

Do số Re lớn, ta có thể bỏ qua 1 bên cạnh $\left(\frac{2 r v \rho_k}{\eta} \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{6}$ và thu được phương trình gần đúng:

$$\pi \eta r^{5/3} v^{5/3} \frac{2^{2/3} \rho_k^{2/3}}{\eta^{2/3}} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_n - \rho_k) g \quad (8)$$

Từ đó

$$\Rightarrow v = \left(\frac{4}{3} \frac{r^{4/3} (\rho_n - \rho_k) g}{\eta^{1/3} 2^{2/3} \rho_k^{2/3}} \right)^{3/5} = \frac{2^{4/5} (\rho_n - \rho_k)^{3/5} g^{3/5}}{3^{3/5} \eta^{1/5} \rho_k^{2/5}} r^{4/5} \quad (9)$$

Thay giá trị của các thông số vào đây (lấy ở điều kiện tiêu chuẩn $\eta = 1,716 \cdot 10^{-5}$ kg/ms, $\rho_n = 10^3$ kg/m³, $\rho_k = 1$, 293 kg/m³) ta được:

$$v = 1806 r^{4/5} \quad (10)$$

Công thức trên được viết trong hệ đơn vị quốc tế (r tính ra mét). Với $r = 1$ mm thì $v = 7,191283$ m/s. Với $r = 2$ mm thì $v = 12,520752$ m/s. Với $r = 3$ mm thì $v = 17,318227$ m/s. Trong khi đó, theo các quan trắc (xem bảng B1 trong [5], hoặc [1]) thì vận tốc thực tế chỉ bằng khoảng một nửa như vậy.

Để thu được công thức chính xác hơn, chúng tôi cũng xuất phát từ công thức tính lực cản dưới dạng tương tự như của L. Kliachko, cụ thể là:

$$f_C = f_0 (1 + a Re^b) \quad (11)$$

Đối với các hạt mưa trong mưa dầm (mưa thường) hoặc mưa rào, $r > 0,5$ mm = $5 \cdot 10^{-4}$ m và $v > 2$ m/s, do đó số $Re > 150$, ngay cả các hạt mưa phùn có $r > 0,1$ mm thì v cũng $> 0,71$ m/s, do đó số $Re > 9,4$, như vậy nói chung, trừ trường hợp các hằng số a và b quá nhỏ, ta có thể bỏ qua 1 bên cạnh $a Re^b$ (điều này chúng ta sẽ xét lại sau khi xác định được các trị số của a và b). Sử dụng phương trình chuyển động, tương tự như trên, ta sẽ thu được vận tốc rơi bão hoà:

$$v = \frac{2^{\frac{1-b}{b+1}} (\rho_n - \rho_k)^{\frac{1}{b+1}} g^{\frac{1}{b+1}} r^{\frac{2-b}{b+1}}}{3^{\frac{1}{b+1}} \eta^{\frac{1-b}{b+1}} \rho_k^{\frac{b}{b+1}} a^{\frac{1}{b+1}}} \quad (12)$$

Kí hiệu

$$A = \frac{2^{\frac{1-b}{b+1}} (\rho_n - \rho_k)^{\frac{1}{b+1}} g^{\frac{1}{b+1}}}{3^{\frac{1}{b+1}} \eta^{\frac{1-b}{b+1}} \rho_k^{\frac{b}{b+1}} a^{\frac{1}{b+1}}} \quad (13a)$$

và

$$B = \frac{2-b}{b+1} \quad (13b)$$

ta được

$$v = Ar^B \quad (14)$$

Các hằng số A và B ở đây được xác định theo phương pháp bình phương tối thiểu (sau khi tuyến tính hoá công thức trên bằng cách lấy logarit hai vế của nó) dựa trên số liệu đo đạc trong phòng thí nghiệm vận tốc của các hạt có bán kính khác nhau trong không khí ở nhiệt độ 20⁰ C và áp suất tiêu chuẩn nêu trong bảng B1 của Mason [5]. Sau khi xác định được A và B, dựa vào các công thức (13a) và (13b) ta tính được các hệ số a và b, tức xác định được công thức tính lực cản. Sau khi có lực cản, ta có thể giải phương trình chuyển động để tìm vận tốc bão hoà một cách tổng quát (áp dụng được cho mọi điều kiện của khí quyển).

Để đánh giá độ chính xác của công thức thu được, chúng tôi đã tính độ lệch trung bình toàn phương

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{K=1}^N (v_{doK} - v_{tinhK})^2} \quad (15)$$

và sai số tương đối:

$$s = \frac{\sigma}{v} \quad (16)$$

với N là dung lượng mẫu, v_{doK} , v_{tinhK} và $\bar{v}$ là vận tốc đo, tính được ở loạt thứ k và vận tốc trung bình.

3. Kết quả tính toán và tổng quát hoá kết quả

3.1. Kết quả tính toán

Dựa trên số liệu nêu trên, chỉ tính đối với những hạt có bán kính trên 0,1 mm, chúng tôi đã tìm được

$$A \approx 925 (\text{đơn vị trong hệ SI}) \quad (17a)$$

$$B \approx 0,8 \quad (17b)$$

Như vậy, công thức tính vận tốc bão hoà của các hạt mưa dầm hoặc mưa rào ở nhiệt độ 20⁰C và áp suất tiêu chuẩn là:

$$v = 925r^{0,8} \quad (18)$$

Kết hợp (17b) với (13b) ta tìm được $b \approx 2/3$; Kết hợp tiếp với (17a) và (13a) trong đó lấy giá trị các thông số của nước và không khí ở nhiệt độ 20°C và áp suất tiêu chuẩn ($\eta = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$, $\rho_k = 1,205 \text{ kg/m}^3$, $\rho_n = 10^3 \text{ kg/m}^3$) ta tìm được $a \approx 0,5$. Như vậy, công thức tính lực cản là:

$$f_C = f_0 \left(1 + 0,5 \text{Re}^{2/3} \right) \quad (19)$$

Với giá trị của a và b như vậy, việc ta bỏ qua 1 bên cạnh $a\text{Re}^b$ trong công thức (11) là hoàn toàn có thể được.

3.2. Tổng quát hoá kết quả

Công thức (19) có thể áp dụng cho điều kiện nhiệt độ T và áp suất khí quyển p bất kì vì số Re phụ thuộc vào hai thông số này thông qua η , ρ_k . Do vậy ta có thể tìm công thức tính vận tốc bão hoà của các hạt mưa trong điều kiện bất kì như trình bày dưới đây:

Đưa (19) vào phương trình chuyển động, bỏ qua 1 bên cạnh $0,5\text{Re}^{2/3}$ và phương trình tương tự như trước đây, ta thu được công thức giải tích tính vận tốc rơi của các giọt nước có bán kính từ 0,1 mm trở lên:

$$v = \left(\frac{4}{9} \frac{r^{4/3} (\rho_n - \rho_k) g}{\eta^{1/3} 2^{2/3} \rho_k^{2/3}} \right)^{3/5} = \frac{2^{4/5} (\rho_n - \rho_k)^{3/5} g^{3/5}}{3^{6/5} \eta^{1/5} \rho_k^{2/5}} r^{4/5} \quad (20)$$

Nhân và chia cả tử và mẫu cho $\eta_0^{1/5} \rho_0^{2/5}$, ta thu được công thức tương đương:

$$v = \frac{(\rho_n - \rho_k)^{3/5} g^{3/5}}{2^{1/5} \cdot 3^{3/5} \eta_0^{1/5} \rho_0^{2/5}} \left(\frac{\eta_0}{\eta} \right)^{1/5} \left(\frac{\rho_0}{\rho_k} \right)^{2/5} r^{4/5} \quad (21)$$

trong đó η_0 và ρ_0 là hệ số nhớt phân tử và mật độ của không khí ở điều kiện tiêu chuẩn (nhiệt độ T_0 và áp suất p_0).

Mặt khác, theo lí thuyết động học phân tử các chất khí [6] thì $\eta = \bar{p} \bar{v} \bar{l} / 3$, trong đó $\bar{v}$ là vận tốc chuyển động nhiệt trung bình ($\bar{v} \sim \sqrt{T}$), $\bar{l}$ là quãng đường tự do trung bình ($\bar{l} \sim 1/\rho$), do đó

$$\frac{\eta_0}{\eta} = \frac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{T}} \quad (22)$$

mà không phụ thuộc vào áp suất.

Như vậy, một dạng khác của công thức tổng quát tính vận tốc bão hoà (vận tốc dừng) đối với hạt mưa có $r > 0,1\text{mm}$ là:

$$v = \frac{(\rho_n - \rho_k)^{3/5} g^{3/5}}{2^{1/5} \cdot 3^{3/5} \eta_0^{1/5} \rho_0^{2/5}} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/10} \left(\frac{\rho_0}{\rho_k} \right)^{2/5} r^{4/5} \quad (23)$$

Lưu ý đến phương trình trạng thái của không khí $p = \rho RT$, ta có

$$\frac{\rho_0}{\rho_k} = \frac{p_0}{p} \frac{T_0}{T} \quad (24)$$

Do vậy, (23) có thể viết lại:

$$v = C \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/10} \left(\frac{\rho_0}{\rho_k} \right)^{2/5} r^{4/5} = C \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{p_0}{p_k} \right)^{2/5} r^{4/5} \quad (25)$$

trong đó C là kí hiệu của đại lượng

$$C = \frac{(\rho_n - \rho_k)^{3/5} g^{3/5}}{2^{1/5} \cdot 3^{3/5} \eta_0^{1/5} \rho_0^{2/5}} \quad (26)$$

mà hầu như không phụ thuộc vào điều kiện khí quyển. Thay giá trị của các thông số vào đây ta tìm được $C \approx 903 \text{ m}^{0.2}/\text{s}$ và thu được công thức tính vận tốc bão hoà để áp dụng hơn trong thực tế:

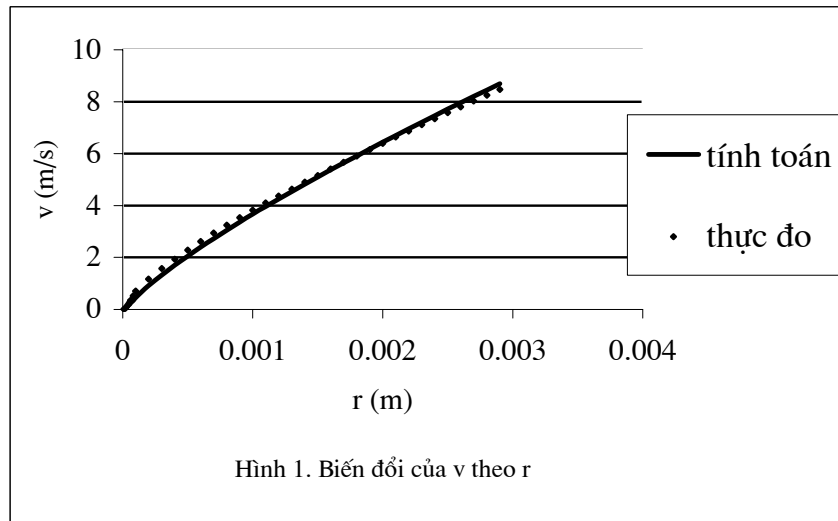
$$v \approx 903 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/10} \left(\frac{\rho_0}{\rho_k} \right)^{2/5} r^{4/5} = 903 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \left(\frac{p_0}{p_k} \right)^{2/5} r^{4/5} \quad (27)$$

Công thức này được viết trong hệ đơn vị quốc tế và áp dụng được cho các hạt mưa có bán kính từ 0,1 mm trở lên. Qua đây chúng ta thấy rằng vận tốc rơi bão hoà của các giọt nước mưa, ngoài việc phụ thuộc vào kích thước hạt, nó còn phụ thuộc vào nhiệt độ và mật độ hoặc áp suất khí quyển.

Đối với các hạt mưa có bán kính nhỏ hơn 0,1 mm, ta phải giữ nguyên dạng của công thức tính lực cản (19) đưa vào phương trình chuyển động. Điều này dẫn tới một phương trình không thể giải được bằng phương pháp giải tích, tuy nhiên vẫn giải được theo phương pháp số ứng với từng bán kính cụ thể của giọt nước.

Công thức bán lí thuyết (25) hoặc (27) có độ lệch trung bình toàn phương $\sigma = 0,12 \text{ m/s}$ và sai số tương đối $s \approx 2,2\%$ (tính theo các công thức (15) và (16)).

Hình1 biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc tính theo công thức ($v_{\text{tính}}$) trên và vận tốc quan trắc được (v_{do}) vào bán kính hạt r (đường liền nét biểu diễn vận tốc tính toán, các điểm rời rạc biểu diễn vận tốc đo đạc đối với các hạt có bán kính từ 0,01 mm đến 2,9 mm).



Từ đồ thị ta thấy rằng, các giá trị vận tốc tính toán hơi nhỏ hơn giá trị đo đối với các hạt nhỏ và hơi lớn hơn giá trị đo đối với các hạt lớn. Tuy nhiên, điều này có thể làm cho số liệu tính toán trở nên phù hợp hơn so với thực tế trong khí quyển vì các việc đo đạc được

tiến hành trong phòng thí nghiệm, các hạt nước được cho rơi trong một ống nghiệm dài [5], do vậy đã bỏ qua một hiệu ứng trong thực tế là không khí bị cuốn xuống theo mưa, nhất là trong mưa to, làm tăng vận tốc rơi của các hạt mưa lớn.

Công thức trên cũng đã được sử dụng để cải tiến sơ đồ dự báo mưa qui mô lưới trong mô hình dự báo số HRM và cho kết quả khả quan.

4. Kết luận

- Đã xác định được các công thức tính vận tốc rơi của các hạt nước theo bán kính hạt và lực cản của môi trường đối với chúng trong mưa.

- Từ công thức tính lực cản, đã tổng quát hoá để thu được một công thức bán lý thuyết tính vận tốc rơi của các hạt mưa có bán kính từ 1 mm trở lên trong các điều kiện áp suất và nhiệt độ khác nhau của khí quyển với độ chính xác cao.

Bài báo được hoàn thành với sự hỗ trợ kinh phí của đề tài NCCB 733104. Tác giả xin bày tỏ lời cảm ơn chân thành.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đài Khí tượng Cao không, *Tài liệu tập huấn Khí tượng radar*. Tổng cục Khí tượng Thủy văn, Hà Nội 1998, 119tr.
2. Gossard E. E., Measurement of Cloud Droplet Size Spectra by Doppler Radar, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, V. 11 (1994), pp. 712-725.
3. Foote G. B., Toit P. S., Terminal Velocity of Raindrop Aloft, *Journal of Applied Meteorology*, V. 8 (1969), pp. 249-253.
4. Lin Y-L., Farley R. D., Orville H. D., Bulk Parameterization of the Snow Field in a Cloud Model, *Journal of Climate and Applied Meteorology*, 22 (1983), pp. 1065-1091.
5. Mason B. J.. *The Physics of Clouds*. Clarendon, Oxford 1971, 671tr
6. Матвеев Л. Т.. *Основы общей метеорологии - Физика атмосферы*. Гидрометиздат, Ленинград, 1965, 876