

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

1.1 Giới thiệu

Xét phương trình vi phân nửa tuyến tính

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad t \in [0, +\infty), x \in X \quad (1)$$

trong đó $A(t)$ là toán tử tuyến tính trên không gian Banach X với mỗi t cố định và $f : \mathbb{R}_+ \times X \longrightarrow X$ là toán tử phi tuyến.

Một trong những vấn đề được quan tâm liên quan đến đáng điều nghiệm của phương trình trên là tìm điều kiện để phương trình có đa tạp tích phân (có thể là đa tạp ổn định, không ổn định hay tâm). Điều kiện phổ biến nhất cho sự tồn tại của đa tạp tích phân là toán tử tuyến tính $A(t)$ thỏa mãn điều kiện nhị phân mũ và toán tử phi tuyến $f(t, x)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz đều với hằng số Lipschitz đủ bé. Các đa tạp này địa phương hay toàn cục tương ứng phụ thuộc $f(t, x)$ Lipschitz địa phương hay toàn cục.

Dưới đây ta xét sự tồn tại của đa tạp tích phân cho phương trình (1) với điều kiện tổng quát hơn. Cụ thể toán tử phi tuyến $f(t, x)$ thỏa mãn điều kiện

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varphi(t)\|x - y\|$$

trong đó $\varphi(t)$ là hàm thực không âm thuộc không gian hàm chấp nhận được. Để thuận tiện ta xét phương trình (1) ở dạng sau

$$x(t) = U(t, s)x(s) + \int_s^t U(t, \xi)f(\xi, x(\xi))d\xi$$

trong đó $U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa ta định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.1. Họ các toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là họ tiến hóa trên nửa đường thẳng nếu

- (i) $U(t, t) = id$ và $U(t, \tau)U(\tau, s) = U(t, s)$ với mọi $t \geq \tau \geq s \geq 0$
- (ii) Ánh xạ $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ liên tục với mọi $x \in X$
- (iii) Tồn tại các hằng số $K, c \geq 0$ sao cho $\|U(t, s)\| \leq Ke^{c(t-s)}$

Khái niệm về họ tiến hóa ở trên xuất hiện một cách tự nhiên từ lý thuyết của bài toán Cauchy đối với phương trình tiến hóa đặt chính sau đây (xem thêm [7, Chương 5], [13], [15]).

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), & t \geq s \geq 0 \\ u(s) = x_s \in X \end{cases}$$

trong đó $A(t)$ là toán tử tuyến tính nói chung không bị chặn với mỗi $t \geq 0$. Khi bài toán Cauchy trên đặt chính thì tồn tại một họ tiến hóa (liên tục mạnh, bị chặn mũ) $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ sao cho nghiệm của phương trình được cho bởi $u(t) = U(t, s)u(s)$. Để biết chi tiết hơn về khái niệm họ tiến hóa, điều kiện để tồn tại những họ như vậy và những ứng dụng vào phương trình đạo hàm riêng thì ta có thể tham khảo Pazy [7] (cũng có thể xem Nagel và Nickel [12] về sự đặt chính của bài toán Cachy không autonom trên toàn trục $\mathbb{R}$).

1.2 Không gian hàm và tính chấp nhận được

Định nghĩa 2.1. Một không gian vectơ E gồm các hàm thực đo được Borel trên $\mathbb{R}_+$ được gọi là không gian hàm Banach (trên $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \lambda)$ trong đó $\mathcal{B}$ là đại số Borel và λ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}_+$) nếu

- (1) $(E, \|\cdot\|_E)$ là không gian Banach và nếu $\varphi \in E$, ψ là hàm thực đo được Borel sao cho $|\psi(\cdot)| \leq |\varphi(\cdot)|$ (λ -a.e) thì $\psi \in E$ và $\|\psi\|_E \leq \|\varphi\|_E$
- (2) Hàm đặc trưng $\chi_A \in E$ với mọi $A \in \mathcal{B}$ có độ đo hữu hạn và $\sup_{t \geq 0} \|\chi_{[t, t+1]}\|_E < \infty$, $\inf_{t \geq 0} \|\chi_{[t, t+1]}\|_E > 0$.
- (3) $E \hookrightarrow L_{1, loc}(\mathbb{R}_+)$ tức là với mọi đoạn compact $J \subset \mathbb{R}_+$ tồn tại $\beta_J \geq 0$ sao cho $\int_J |f(t)| dt \leq \beta_J \|f\|_E$ với mọi $f \in E$.

Bổ đề dưới đây cho ta tiêu chuẩn kiểm tra một hàm liệu có thuộc không gian hàm Banach E .

Bổ đề 2.2. Cho không gian hàm Banach E , φ và ψ là các hàm thực đo được Borel trên $\mathbb{R}_+$ sao cho hai hàm trùng nhau bên ngoài một đoạn compact và bị chặn cốt yếu trong đoạn này. Khi đó $\varphi \in E$ khi và chỉ khi $\psi \in E$.

Chứng minh: Giả sử $\varphi \in E$ và $\varphi \neq \psi$ trên $J = [a, b]$. Do ψ bị chặn cốt yếu trên J nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\lambda(A) := \lambda(\{t \in J : |\psi(t)| > M\}) = 0$$

Đặt $B = J \setminus A$, do E là không gian hàm Banach nên $|\varphi| \in E$ và $\chi_B \in E$. Bởi vậy, $|\varphi| + M\chi_B \in E$. Ngoài ra ta có, $|\psi| \leq |\varphi| + M\chi_B$ (λ -a.e), suy ra $\psi \in E$. $\square$

Định nghĩa 2.3. Cho không gian hàm Banach E và không gian Banach X , đặt

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, X) = \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X \text{ sao cho } f \text{ đo được và } \|f(\cdot)\| \in E\}$$

với $\|f\|_{\mathcal{E}} := \|\|f(\cdot)\|\|_E$. Khi đó $\mathcal{E}$ là không gian Banach, nó được gọi là không gian Banach tương ứng với không gian hàm Banach E .

Định nghĩa 2.4. Không gian hàm Banach E được gọi là chấp nhận được nếu nó thỏa mãn

(i) Tồn tại hằng số $M \geq 1$ sao cho mọi $[a, b] \in \mathbb{R}_+$ và mọi $\varphi \in E$ ta có

$$\int_a^b |\varphi(t)| dt \leq \frac{M(b-a)}{\|\chi_{[a,b]}\|_E} \|\varphi\|_E$$

(ii) Nếu $\varphi \in E$ thì hàm $\Lambda_1 \varphi(t) = \int_t^{t+1} \varphi(\tau) d\tau \in E$

(iii) E là T_{τ}^+ và T_{τ}^- bất biến với mọi $\tau \in \mathbb{R}_+$, trong đó

$$\begin{aligned} T_{\tau}^+ \varphi(t) &= \begin{cases} \varphi(t - \tau) & \text{nếu } t \geq \tau \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } 0 \leq t \leq \tau \end{cases} \\ T_{\tau}^- \varphi(t) &= \varphi(t + \tau) \text{ với mọi } t \geq 0 \end{aligned}$$

Hơn nữa tồn tại $N_1, N_2 > 0$ sao cho $\|T_\tau^+\| \leq N_1, \|T_\tau^-\| \leq N_2$ với mọi $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Ví dụ Không gian $L_p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$ và không gian

$$\mathbf{M}(\mathbb{R}_+) = \left\{ f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+) : \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |f(\tau)| d\tau < \infty \right\}$$

với $\|f\|_{\mathbf{M}} = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |f(\tau)| d\tau$ là các không gian hàm Banach chấp nhận được. Hơn nữa, nếu E là không gian hàm Banach thì $E \hookrightarrow \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$. Thật vậy, đặt $\beta = \inf_{t \geq 0} \|\chi_{[t, t+1]}\|_E > 0$. Theo định nghĩa của E ta có

$$\int_t^{t+1} |f(\tau)| d\tau \leq \frac{M}{\beta} \|f\|_E \text{ với mọi } t \geq 0 \text{ và } f \in E \quad (2)$$

Do đó, $f \in \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$ và $\|f\|_{\mathbf{M}} \leq \frac{M}{\beta} \|f\|_E$. Bởi vậy, $E \hookrightarrow \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$.

Dưới đây là một số tính chất của không gian hàm chấp nhận được.

Mệnh đề 2.5. Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được. Ta có các khẳng định sau

(a) Cho $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ sao cho $\varphi \geq 0$ và $\Lambda_1 \varphi \in E$. Với mọi $\sigma > 0$ ta xác định $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi$ như sau

$$\begin{aligned} \Lambda'_\sigma \varphi(t) &= \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \varphi(s) ds \\ \Lambda''_\sigma \varphi(t) &= \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

Khi đó $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi \in E$. Hơn nữa, nếu $\varphi \in \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$ thì $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi$ bị chặn và ta có đánh giá

$$\|\Lambda'_\sigma \varphi\|_\infty \leq \frac{N_1}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty \text{ và } \|\Lambda''_\sigma \varphi\|_\infty \leq \frac{N_2}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty \quad (3)$$

trong đó T_1^+ , Λ_1 và N_1, N_2 được xác định trong định nghĩa 2.4.

(b) Với mọi $\alpha > 0$, $\psi(t) = e^{-\alpha t} \in E$.

(c) Với mọi $b > 0$, $f(t) = e^{bt} \notin E$.

Chứng minh: Với $a \in \mathbb{R}$ đặt $a_+ = \max\{0, a\}$, ta có

$$\begin{aligned}\Lambda_1 T_1^+ \varphi(t) &= \int_{(t-1)_+}^t \varphi(s) ds \\ T_1^+ \Lambda_1 \varphi(t) &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{(t-1)_+}^t \varphi(s) ds & \text{nếu } t > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Do $T_1^+ \Lambda_1 \varphi \in E$ nên theo bổ đề (1.2.2) suy ra $\Lambda_1 T_1^+ \varphi \in E$. Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}\Lambda'_\sigma \varphi(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{(t-(j+1))_+}^{(t-j)_+} e^{-\sigma(t-s)} \varphi(s) ds \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\sigma} \int_{(t-(j+1))_+}^{(t-j)_+} \varphi(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\sigma} T_j^+ \Lambda_1 T_1^+ \varphi(t) \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

Ta có $e^{-j\sigma} T_j^+ \Lambda_1 T_1^+ \varphi \in E$ với mọi j và

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|e^{-j\sigma} T_j^+ \Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_E \leq \sum_{j=0}^{\infty} N_1 e^{-j\sigma} \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_E = \frac{N_1}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_E$$

Vì E là không gian hàm Banach nên $\Lambda'_\sigma \varphi \in E$ và ta có

$$\|\Lambda'_\sigma \varphi\|_E \leq \frac{N_1}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_E \quad (4)$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned}\Lambda''_\sigma \varphi(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t+j}^{t+j+1} e^{-\sigma(s-t)} \varphi(s) ds \leq \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\sigma} \int_{t+j}^{t+j+1} \varphi(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\sigma} T_j^- \Lambda_1 \varphi(t) \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

Ta có $e^{-j\sigma} T_j^- \Lambda_1 \varphi(t) \in E$ với mọi j và

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|e^{-j\sigma} T_j^- \Lambda_1 \varphi\|_E \leq \sum_{j=0}^{\infty} N_2 e^{-j\sigma} \|\Lambda_1 \varphi\|_E = \frac{N_2}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 \varphi\|_E$$

Vì E là không gian hàm Banach nên $\Lambda''_\sigma \varphi \in E$ và ta có

$$\|\Lambda''_\sigma \varphi\|_E \leq \frac{N_2}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 \varphi\|_E \quad (5)$$

Với $\varphi \in \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$ suy ra Λ'_σ và Λ''_σ bị chặn. Áp dụng với $E = L_\infty$, từ (4) và (5) suy ra bất đẳng thức (3).

(b) Lấy $\chi_{[0,1]} \in E$, đặt

$$v(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \chi_{[0,1]}(s) ds = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha t}(e^\alpha - 1)}{1 - e^{-\alpha t}} & \text{nếu } t \geq 1 \\ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & \text{nếu } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

Theo (a) ta có $v(t) \in E$. Vì vậy, theo bổ đề 2.2 suy ra $\psi \in E$.

(c) Giả sử tồn tại $b > 0$ sao cho $f(t) = e^{bt} \in E$. Theo (2) ta có

$$\frac{1}{b} e^{bt}(e^b - 1) \leq \frac{M}{\beta} \|f\|_E \text{ với mọi } t \geq 0$$

Điều này mâu thuẫn với $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{bt} = \infty$. □

Để so sánh các nghiệm trên đa tạp ta cần định lý bất đẳng thức nón, trước hết ta nhắc lại khái niệm nón dưới đây.

Một tập đóng $\mathcal{K}$ trong không gian Banach W được gọi là nón nếu nó thỏa mãn các tính chất sau

- (i) $x_0 \in \mathcal{K}$ suy ra $\lambda x_0 \in \mathcal{K}$ với mọi $\lambda \geq 0$
- (ii) $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ suy ra $x_1 + x_2 \in \mathcal{K}$
- (iii) $\pm x_0 \in \mathcal{K}$ suy ra $x_0 = 0$.

Cho nón $\mathcal{K}$ trong không gian Banach W . Với $x, y \in W$ ta xác định quan hệ $x \leq y$ nếu $y - x \in \mathcal{K}$.

Định lý 2.6. (Bất đẳng thức nón) Cho nón $\mathcal{K}$ trong không gian Banach W sao cho $\mathcal{K}$ là bất biến với toán tử $A \in \mathcal{L}(W)$ có bán kính phổ $r_A < 1$. Với x và $z \in W$ sao cho $x \leq Ax + z$. Khi đó, mọi $y \in W$ là nghiệm của phương trình $y = Ay + z$ ta có $x \leq y$.

Chứng minh: Đặt $Sx = Ax + z$, theo giả thiết ta có $x \leq Sx$. Với mọi $x \leq y$ ta có $Sy - Sx = A(y - x) \in \mathcal{K}$ do nón $\mathcal{K}$ bất biến với toán tử A ,

suy ra $Sx \leq Sy$. Bằng quy nạp ta có

$$S^n x = A^n x + \sum_{i=0}^{n-1} A^i z$$

và $x \leq Sx \leq S^2 x \leq \dots \leq S^n x$. Chọn q sao cho $r_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} < q < 1$. Do đó, tồn tại $N > 0$ sao cho $\|A^n\| \leq q^n$ với mọi $n \geq N$. Suy ra, $\|A^n x\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Xét phương trình

$$y = Ay + z \Leftrightarrow (I - A)y = z$$

Do $r_A < 1$ nên tồn tại $(I - A)^{-1}$ và $y = (I - A)^{-1}z = \sum_{i=0}^{\infty} A^i z$. Ta có

$$x \leq S^n x \Leftrightarrow A^n x + \sum_{i=0}^{n-1} A^i z - x \in K$$

Vì K đóng nên khi cho $n \rightarrow \infty$ ta có $y - x \in K$, suy ra $x \leq y$. □