

Chương 2. Các đa tạp tích phân

Ta xét phương trình tích phân

$$u(t) = U(t, s)u(s) + \int_s^t U(t, \xi)f(\xi, u(\xi))d\xi \text{ với mọi } t \geq s \geq 0 \quad (6)$$

trong đó $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ là họ tiến hóa của bài toán Cauchy thuần nhất. Một hàm u mà thỏa mãn (6) với hàm f nào đó được gọi là nghiệm đủ tốt (mild solution) của bài toán không thuần nhất

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t, u(t)), & t \geq s \geq 0 \\ u(s) = x_s \in X \end{cases}$$

Ta có thể tham khảo Pazy [7, Chương 5] và Elgel-Nagel [6] để biết chi tiết hơn về nghiệm đủ tốt và mối quan hệ giữa nghiệm đủ tốt và nghiệm cổ điển.

2.1 Đa tạp ổn định địa phương

Trong phần này, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của đa tạp ổn định địa phương cho các nghiệm của (6) với các điều kiện của họ tiến hóa $U(t, s)$ và hàm phi tuyến $f(t, x)$. Trước hết, ta có các khái niệm dưới đây.

Định nghĩa 1.1. Họ tiến hóa $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là nhị phân mũ trên $[0, \infty)$ nếu tồn tại các toán tử chiếu tuyến tính bị chặn $P(t)$, $t \geq 0$ trên X và các hằng số dương N, ν sao cho

(a) $U(t, s)P(s) = P(t)U(t, s)$, $t \geq s \geq 0$

(b) Ánh xạ hạn chế $U(t, s)|_{\text{Ker}P(s)} : \text{Ker}P(s) \rightarrow \text{Ker}P(t)$, $t \geq s \geq 0$ là đẳng cấu, ta ký hiệu $(U(t, s)|_{\text{Ker}P(s)})^{-1} = U(s, t)|_{\text{Ker}P(t)}$

- (c) $\|U(t, s)x\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}\|x\|$ với mọi $x \in P(s)X$, $t \geq s \geq 0$
(d) $\|U(s, t)|x\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}\|x\|$ với mọi $x \in \text{Ker}P(t)$, $t \geq s \geq 0$.

Các hằng số N, ν được gọi là hằng số nhị phân và các toán tử chiếu $P(t)$ được gọi phép chiếu nhị phân. Ta ký hiệu, $X_0(t) = P(t)X$ và $X_1(t) = (I - P(t)X)$.

Nhận xét 1.2. Các phép chiếu nhị phân $P(t)$ có các tính chất sau

- (i) $H = \sup_{t \geq 0} \|P(t)\| < \infty$
(ii) $t \mapsto P(t)$ liên tục mạnh.

Thật vậy, với $t_0 \geq 0$ đặt

$$d(t_0) = \inf\{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t_0), \|x_0\| = \|x_1\| = 1, i = 0, 1\}$$

Do $U(t, s)$ là họ tiến hóa nên ta có $\|U(t, t_0)(x_0 + x_1)\| \leq Ke^{c(t-t_0)}\|x_0 + x_1\|$ với mọi $t \geq t_0$. Suy ra

$$\begin{aligned} \|x_0 + x_1\| &\geq K^{-1}e^{-c(t-t_0)}\|U(t, t_0)(x_0 + x_1)\| \\ &\geq K^{-1}e^{-c(t-t_0)}(\|U(t, t_0)x_1\| - \|U(t, t_0)x_0\|) \\ &\geq K^{-1}e^{-c(t-t_0)}(N^{-1}e^{\nu(t-t_0)} - Ne^{-\nu(t-t_0)}) \end{aligned}$$

Vế phải của bất đẳng thức cuối là hàm số có giá trị cực đại dương và không phụ thuộc vào t_0 , Bởi vậy, ta có $d(t_0) \geq m > 0$ với mọi $t_0 \geq 0$.

Với mọi $x \in X$ sao cho $P(t)x \neq 0$ và $Q(t)x = x - P(t)x \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned} d(t) &\leq \left\| \frac{P(t)x}{\|P(t)x\|} + \frac{Q(t)x}{\|Q(t)x\|} \right\| = \frac{1}{\|P(t)x\|} \|P(t)x + \frac{\|P(t)x\|}{\|Q(t)x\|} Q(t)x\| \\ &= \frac{1}{\|P(t)x\|} \|x + \frac{\|P(t)x\| - \|Q(t)x\|}{\|Q(t)x\|} Q(t)x\| \leq \frac{2\|x\|}{\|P(t)x\|} \end{aligned}$$

Suy ra, $\|P(t)\| \leq 2d(t)^{-1} \leq 2m^{-1}$. Do đó, $H = \sup_{t \geq 0} \|P(t)\| < \infty$.

- (ii) Lấy $t_0 \geq 0$, với $t > t_0$ ta có

$$\begin{aligned} \|P(t)x - P(t_0)x\| &\leq \|P(t)x - P(t)U(t, t_0)x\| + \|P(t)U(t, t_0)x - P(t_0)x\| \\ &\leq H\|x - U(t, t_0)x\| + \|U(t, t_0)P(t_0)x - P(t_0)x\| \quad (7) \end{aligned}$$

Do $U(t, t_0)$ liên tục nên $P(t)x$ liên tục phải tại t_0 . Với $t < t_0$ ta có

$$\begin{aligned} \|Q(t)x - Q(t_0)x\| &\leq \|U(t, t_0)|U(t_0, t)Q(t)x - U(t, t_0)|Q(t_0)x\| \\ &\quad + \|U(t, t_0)|Q(t_0)x - Q(t_0)x\| \\ &\leq N\|Q(t_0)U(t_0, t)x - Q(t_0)x\| \\ &\quad + \|U(t, t_0)|Q(t_0)x - Q(t_0)x\| \quad (8) \end{aligned}$$

Do $U(t_0, t)$ và $U(t, t_0)_|$ liên tục nên $Q(t)x$ liên tục trái tại t_0 . Suy ra, $P(t)x$ liên tục trái tại t_0 . Vậy, $P(t)$ liên tục mạnh.

Ngoài ra, cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được và $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, X)$ là không gian Banach tương ứng với E . Khi đó, với mỗi $t_0 \geq 0$ không gian $X_0(t_0) = P(t_0)X$ được xác định như sau

$$X_0(t_0) = \left\{ x \in X : z(t) = \begin{cases} U(t, t_0)x & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases} \in \mathcal{E} \right\}$$

Thật vậy, đặt

$$A = \left\{ x \in X : z(t) = \begin{cases} U(t, t_0)x & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases} \in \mathcal{E} \right\}$$

Với $x \in X_0(t_0)$ ta có $x = P(t_0)x$. Do đó, với mọi $t \geq t_0$ ta có

$$\|z(t)\| = \|U(t, t_0)x\| \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x\|$$

Vì $Ne^{-\nu(t-t_0)}\|x\| \in E$ nên $\|z(t)\| \in E$. Do đó $z(t) \in \mathcal{E}$, suy ra $x \in A$. Do vậy, $X_0(t_0) \subset A$.

Lấy $x \in A$, $x \neq 0$ và giả sử $P(t_0)x = 0$. Ta có $U(t, t_0)P(t_0)x = P(t)U(t, t_0)x$, do đó $z(t) = U(t, t_0)x \in \text{Ker}P(t)$ với mọi $t \geq t_0$. Suy ra, $x = U(t_0, t)_|U(t, t_0)x$. Với $0 < \alpha < \nu$ ta có

$$\begin{aligned} e^{\alpha(t-t_0)}\|x\| &\leq Ne^{\alpha(t-t_0)}e^{-\nu(t-t_0)}\|U(t, t_0)x\| \\ &= Ne^{-(\nu-\alpha)(t-t_0)}\|U(t, t_0)x\| \leq \|U(t, t_0)x\| \end{aligned}$$

Do $\|U(t, t_0)x\| \in E$ nên $e^{\alpha t}\|x\| \in E$. Điều này mâu thuẫn với E là không gian hàm Banach chấp nhận được. Vậy, nếu $x \in A$ và $P(t_0)x = 0$ thì $x = 0$. Theo giả thiết ta có $U(t, t_0)x \in \mathcal{E}$ và do $X_0(t_0) \subset A$ nên $U(t, t_0)P(t_0)x \in \mathcal{E}$. Suy ra $U(t, t_0)(x - P(t_0)x) \in \mathcal{E}$, do đó $x - P(t_0)x \in A$. Suy ra $x = P(t_0)x$, vì vậy $A = X_0(t_0)$.

Cho họ $U(t, s)$ có nhị phân mũ, ta định nghĩa hàm Green như sau

$$\mathcal{G}(t, \tau) = \begin{cases} P(t)U(t, \tau) & \text{nếu } t > \tau \geq 0 \\ -U(t, \tau)_|(I - P(\tau)) & \text{nếu } 0 \leq t < \tau \end{cases}$$

Ta có ước lượng

$$\|\mathcal{G}(t, \tau)\| \leq N(1 + H)e^{-\nu|t-\tau|} \quad \text{với } t \neq \tau$$

Với hàm phi tuyến ta có khái niệm sau

Định nghĩa 1.3. Cho $\varphi \in E$ là hàm không âm và B_ρ là hình cầu đóng trong X . Hàm $f : [0, \infty) \times B_\rho \rightarrow X$ được gọi là thuộc lớp (M, φ, ρ) với M, ρ là các hằng số dương nào đó nếu f thỏa mãn

- (i) $\|f(t, x)\| \leq M\varphi(t)$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}_+$ và mọi $x \in B_\rho$.
- (ii) $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varphi(t)\|x_1 - x_2\|$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}_+$ và mọi $x_1, x_2 \in B_\rho$.

Định nghĩa 1.4. Tập $S \subset \mathbb{R}_+ \times X$ được gọi là đa tập ổn định địa phương đối với các nghiệm của phương trình (6) nếu với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$ ta có $X = X_0(t) \oplus X_1(t)$ sao cho

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Sn(X_0(t), X_1(t)) := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{i=0,1} \{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t), \|x_i\| = 1\} > 0$$

và tồn tại các hằng số dương ρ, ρ_0, ρ_1 và các ánh xạ Lipschitz

$$g_t : B_{\rho_0} \cap X_0(t) \rightarrow B_{\rho_1} \cap X_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

với các hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào t sao cho

- (i) $S = \{(t, x + g_t(x)) \in \mathbb{R}_+ \times X_0(t) \oplus X_1(t) \mid t \in \mathbb{R}_+, x \in B_{\rho_0} \cap X_0(t)\}$, ta ký hiệu $S_t = \{x + g_t(x) : (t, x + g_t(x)) \in S\}$.
- (ii) S_t đồng phôi với $B_{\rho_0} \cap X_0(t)$ với mọi $t \geq 0$.
- (iii) Mỗi $x_0 \in S_{t_0}$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện $u(t_0) = x_0$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| \leq \rho$.

Bổ đề dưới đây cho ta dạng nghiệm bị chặn của (6).

Bổ đề 1.5. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Giả sử $\varphi \in E$ là hàm không âm và $f : \mathbb{R}_+ \times B_\rho \rightarrow X$ thuộc lớp (M, φ, ρ) với M, ρ là hằng số dương nào đó. Gọi $u(t)$ là nghiệm của (6) sao cho $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| \leq \rho$ với t_0 cố định. Khi đó, với mọi $t \geq t_0$ tồn tại $\nu_0 \in X_0(t_0) = P(t_0)X$ sao cho $u(t)$ có dạng

$$u(t) = U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad (9)$$

trong đó $\mathcal{G}(t, \tau)$ là hàm Green.

Chứng minh: Đặt $y(t) = \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau$ với $t \geq t_0$. Vì $f \in (M, \varphi, \rho)$ nên ta có ước lượng

$$\|y(t)\| \leq (1 + H)NM \int_0^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) d\tau \quad \text{với } t \geq t_0$$

Sử dụng ước lượng (3) ta có

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \|y(t)\| \leq \frac{(1 + H)NM(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty})}{1 - e^{-\nu}}$$

Tính toán trực tiếp ta thấy rằng $y(t)$ thỏa mãn phương trình

$$y(t) = U(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, s)f(s, u(s))ds \quad \text{với } t \geq t_0.$$

Vì $u(t)$ là nghiệm của (6) nên ta có $u(t) - y(t) = U(t, t_0)(u(t_0) - y(t_0))$ với $t \geq t_0$. Đặt $\nu_0 = u(t_0) - y(t_0)$ ta có đẳng thức (9) và $\nu_0 \in X_0(t_0)$ do $u(t), y(t)$ bị chặn cốt yếu trên $[t_0, \infty)$ và đặc trưng của không gian $X_0(t_0)$. $\square$

Nhận xét 1.6. Bằng tính toán trực tiếp ta chứng minh được nghiệm của phương trình (9) thỏa mãn phương trình (6) với mọi $t \geq t_0$.

Sử dụng tính chấp nhận được, ta xây dựng cấu trúc nghiệm của phương trình (6) bởi định lý dưới đây.

Định lý 1.7. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Khi đó, nếu $f \in (M, \varphi, \rho)$ với $M, \rho > 0$ cho trước và $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn

$$\frac{(1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty})}{1 - e^{-\nu}} < \min \left\{ 1, \frac{\rho}{2M} \right\}$$

thì với mỗi $\nu_0 \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn $P(t_0)u(t_0) = \nu_0$ và $\operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| \leq \rho$. Hơn nữa, với $u_1(t), u_2(t)$ ứng với hai giá trị khác nhau $\nu_1, \nu_2 \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_{\mu} e^{-\mu(t-t_0)} \|\nu_1 - \nu_2\| \quad \text{với mọi } t \geq t_0 \quad (10)$$

trong đó μ thỏa mãn

$$0 < \mu < \nu + \ln(1 - (1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)), \text{ và}$$

$$C_\mu = \frac{N}{1 - \frac{(1+H)N}{1-e^{-(\nu-\mu)}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}$$

Chứng minh: Chúng ta xét trong không gian $L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$ ta có

$$\mathcal{B}_\rho = \{x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, X) : \|x(\cdot)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|x(t)\| \leq \rho\}$$

Với $\nu_0 \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ ta sẽ chứng minh ánh xạ $T : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$ xác định bởi

$$(Tx)(t) = \begin{cases} U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^\infty \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases}$$

là ánh xạ co.

Thực vậy, với $x(\cdot) \in \mathcal{B}_\rho$ ta có $\|f(t, x(t))\| \leq M\varphi(t)$. Đặt

$$y(t) = \begin{cases} U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^\infty \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases}$$

Ta có $\|y(t)\| \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_0\| + (1 + H)NM \int_0^\infty e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)d\tau$. Suy ra $y(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$ và

$$\|y(\cdot)\|_\infty \leq N\|\nu_0\| + \frac{(1 + H)NM(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1 - e^{-\nu}}$$

Do $\|\nu_0\| \leq \frac{\rho}{2N}$ và

$$\frac{(1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1 - e^{-\nu}} \leq \frac{\rho}{2M}$$

nên $\|y(\cdot)\|_\infty \leq \rho$. Bởi vậy, $(Tx)(t) \in \mathcal{B}_\rho$.

Ta có

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Tz(t)\| &\leq \int_0^\infty \|\mathcal{G}(t, \tau)\| \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, z(\tau))\| d\tau \\ &\leq (1 + H)N \int_0^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) d\tau \|x(\cdot) - z(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Do đó

$$\|Tx(t) - Tz(t)\|_\infty \leq \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)\|x(\cdot) - z(\cdot)\|_\infty$$

$\forall \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < 1$ nên T là ánh xạ co. Bởi vậy, tồn tại duy nhất $u(\cdot) \in \mathcal{B}_\rho$ sao cho $Tu = u$. Do định nghĩa của T nên $u(\cdot)$ là nghiệm duy nhất trong $\mathcal{B}_\rho$ của phương trình (9) với $t \geq t_0$. Theo bổ đề (1.5) và nhận xét (1.6) ta có $u(\cdot)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (6).

Gọi $u_1(t)$, $u_2(t)$ là hai nghiệm bị chặn cốt yếu của (6) ứng với hai giá trị khác nhau $\nu_1, \nu_2 \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$. Khi đó, với $t \geq t_0$ ta có

$$u_1(t) - u_2(t) = U(t, t_0)(\nu_1 - \nu_2) + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)[f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))]d\tau$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\| \\ &+ (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|d\tau \end{aligned}$$

Đặt $\phi(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|$. Khi đó, $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \phi(t) < \infty$ và

$$\phi(t) \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\| + (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)\phi(\tau)d\tau \quad (11)$$

Ta áp dụng định lý bất đẳng thức nón cho không gian Banach $W = L_\infty([t_0, \infty))$ và nón $\mathcal{K}$ là các hàm không âm hầu khắp nơi. Ta xác định toán tử tuyến tính A trên $L_\infty([t_0, \infty))$ như sau

$$(Au)(t) = (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)u(\tau)d\tau \quad \text{với } t \geq t_0$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} (Au)(t) &= \sup_{t \geq t_0} (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)u(\tau)d\tau \\ &\leq \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)\|u\|_\infty \end{aligned}$$

Do đó $A \in \mathcal{L}(L_\infty([t_0, \infty)))$ và $\|A\| < 1$. Rõ ràng, nón $\mathcal{K}$ là bất biến đối với A . Bất đẳng thức (11) có dạng là

$$\phi \leq A\phi + z \quad \text{với } z(t) = Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\|$$

Do đó, theo định lý (1.2.6) ta có $\phi \leq \psi$ trong đó $\psi \in L_\infty([t_0, \infty))$ là nghiệm của phương trình $\psi = A\psi + z$ tức là

$$\psi(t) = Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\| + (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) \psi(\tau) d\tau \quad (12)$$

Ta sẽ ước lượng ψ . Đặt $w(t) = e^{\mu(t-t_0)}\psi(t)$ với $t \geq t_0$. Từ (12) ta có

$$w(t) = Ne^{-(\nu-\mu)(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\| + (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|+\mu(t-\tau)} \varphi(\tau) w(\tau) d\tau$$

Xét toán tử tuyến tính D trên $L_\infty([t_0, \infty))$ xác định như sau

$$(Du)(t) = (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|+\mu(t-\tau)} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau \quad \text{với } t \geq t_0$$

Từ (3) ta có đánh giá

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} (Du)(t) &= \sup_{t \geq t_0} (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-\tau|+\mu(t-\tau)} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau \\ &\leq \sup_{t \geq t_0} (1+H)N \int_{t_0}^{\infty} e^{-(\nu-\mu)|t-\tau|} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{(1+H)N}{1-e^{-(\nu-\mu)}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \|u\|_\infty \end{aligned}$$

Do đó, $D \in \mathcal{L}(L_\infty([t_0, \infty)))$. Ta có phương trình

$$w = Dw + z \quad \text{với } z(t) = Ne^{-(\nu-\mu)(t-t_0)}\|\nu_1 - \nu_2\|; \quad t \geq t_0$$

Vì $\mu < \nu + \ln(1 - (1+H)N(N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty))$ nên $\|D\| < 1$. Do vậy, phương trình $w = Dw + z$ có nghiệm duy nhất $w = (I - D)^{-1}z$. Suy ra

$$\begin{aligned} \|w\|_\infty &= \|(I - D)^{-1}z\|_\infty \leq \|(I - D)^{-1}\| \|z\|_\infty \leq \frac{N}{1 - \|D\|} \|\nu_1 - \nu_2\| \\ &\leq \frac{N}{1 - \frac{(1+H)N}{1-e^{-(\nu-\mu)}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)} \|\nu_1 - \nu_2\| \end{aligned}$$

Do vậy, $w(t) \leq C_\mu \|\nu_1 - \nu_2\|$ với $t \geq t_0$. Ta có $\psi(t) = e^{-\mu(t-t_0)}w(t)$, suy ra

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_\mu e^{-\mu(t-t_0)} \|\nu_1 - \nu_2\| \quad \text{với mọi } t \geq t_0$$

□

Dưới đây là kết quả chính của phần này.

Định lý 1.8. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Khi đó, nếu $f \in (M, \varphi, \rho)$ với $M, \rho > 0$ cho trước và $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < \min\{\frac{\rho}{2M}, \frac{1}{N+1}\}$ thì tồn tại đa tạp ổn định địa phương S với các nghiệm của phương trình (6). Hơn nữa, với hai nghiệm bất kỳ $u_1(t), u_2(t)$ trên đa tạp S tồn tại hai hằng số dương μ và C_μ không phụ thuộc vào t_0 sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_\mu e^{-\mu(t-t_0)} \|P(t_0)u_1(t_0) - P(t_0)u_2(t_0)\|, \quad t \geq t_0 \quad (13)$$

Chứng minh: Vì họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ nên với mọi $t \geq 0$ ta có $X = X_0(t) \oplus X_1(t)$ trong đó $X_0(t) = P(t)X$ và $X_1(t) = \text{Ker}P(t)$. Hơn nữa, ta có

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Sn(X_0(t), X_1(t)) := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{i=0,1} \{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t), \|x_i\| = 1\} > 0$$

Thật vậy, với mỗi $x \in X$ tồn tại duy nhất $x_i(t) \in X_i(t), i = 0, 1$ sao cho $x = x_0(t) + x_1(t)$. Ta có $\|P(t)x\| = \|x_0(t)\| \leq \|P(t)\|\|x\| \leq H\|x\|$. Suy ra, $\frac{1}{H}\|x_0(t)\| \leq \|x\|$. Do vậy, với mọi $t \geq 0$ và $x = x_0(t) + x_1(t)$ sao cho $\|x_i(t)\| = 1, i = 0, 1$ ta có $\|x\| \geq \frac{1}{H}$. Do đó, $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Sn(X_0(t), X_1(t)) > 0$.

Để xây dựng họ ánh xạ Lipschitz $(g_t)_{t \geq 0}$ thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa (2.1.4), với mỗi $t_0 \geq 0$ ta xác định

$$g_{t_0}(y) = \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t_0, s) f(s, x(s)) ds \quad (14)$$

trong đó $y \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ và $x(\cdot)$ là nghiệm duy nhất trong $\mathcal{B}_\rho$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn $P(t_0)x(t_0) = y$ và $x(t) = 0$ nếu $t < t_0$. Theo định nghĩa của hàm Green ta có $g_{t_0}(y) \in X_1(t_0)$. Ta có

$$\begin{aligned} \|g_{t_0}(y)\| &\leq \int_0^{\infty} \|\mathcal{G}(t_0, s)\| \|f(s, x(s))\| ds \leq (1+H)NM \int_0^{\infty} e^{-\nu|t_0-s|} \varphi(s) ds \\ &\leq \frac{(1+H)NM}{1-e^{-\nu}} (N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \leq \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

Do vậy, ánh xạ $g_{t_0} : B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0) \rightarrow B_{\frac{\rho}{2}} \cap X_1(t_0)$. Ta sẽ chứng minh g_{t_0} là ánh xạ Lipschitz. Thực vậy, với $y_1, y_2 \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ ta có

$$\begin{aligned} \|g_{t_0}(y_1) - g_{t_0}(y_2)\| &\leq \int_0^\infty \|\mathcal{G}(t_0, s)\| \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| ds \\ &\leq (1+H)N \int_0^\infty e^{-\nu|t_0-s|} \varphi(s) \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \\ &\leq \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

Vì $x_i(\cdot)$ là nghiệm duy nhất trong $\mathcal{B}_\rho$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ tương ứng với điều kiện $P(t_0)x_i(t_0) = y_i$, $i = 1, 2$ nên với mọi $t \geq t_0$ ta có

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \|U(t, t_0)(y_1 - y_2) \\ &\quad + \int_{t_0}^\infty \mathcal{G}(t, \tau)[f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))]d\tau\| \leq N\|y_1 - y_2\| \\ &\quad + \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

Đặt $k = \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < 1$ ta có

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \leq N\|y_1 - y_2\| + k\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty$$

Suy ra

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \leq \frac{N}{1-k} \|y_1 - y_2\|$$

Do vậy, ta có

$$\|g_{t_0}(y_1) - g_{t_0}(y_2)\| \leq \frac{Nk}{1-k} \|y_1 - y_2\|$$

Vậy, g_{t_0} là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz $q := \frac{Nk}{1-k}$ không phụ thuộc vào t_0 .

Đặt $S = \{(t, x + g_t(x)) \in \mathbb{R}_+ \times X_0(t) \oplus X_1(t) \mid x \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)\}$. Với mỗi $t_0 \geq 0$, ta chứng minh $S_{t_0} = \{x + g_{t_0}(x) : (t_0, x + g_{t_0}(x)) \in S\}$ đồng phôi với $B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$. Thật vậy, ta định nghĩa ánh xạ $H : B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0) \rightarrow S_{t_0}$ với $Hy = y + g_{t_0}(y)$. Do hằng số Lipschitz $q < 1$ nên g_{t_0} là ánh xạ co. Bởi vậy, H là đồng phôi. Điều kiện (iii) trong định nghĩa (2.1.4) và bất đẳng thức (13) được suy ra từ định lý (2.1.7). $\square$

2.2 Đa tập bất biến cho nghiệm bị chặn

Trong mục này ta sẽ chứng minh sự tồn tại của đa tập ổn định bất biến(hay toàn cục) cho nghiệm của (6). Bởi vậy, hàm phi tuyến f phải có những tính chất dưới đây.

Định nghĩa 2.1. Cho không gian hàm Banach chấp nhận được E và $\varphi \in E$ là hàm không âm, ánh xạ $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ được gọi là φ -Lipschitz nếu tồn tại $M > 0$ sao cho f thỏa mãn

- (i) $\|f(t, 0)\| \leq M\varphi(t)$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}_+$
- (ii) $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varphi(t)\|x_1 - x_2\|$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}_+$ và mọi $x_1, x_2 \in X$

Nhận xét 2.2. Nếu f là φ -Lipschitz thì $\|f(t, x)\| \leq \varphi(t)(M + \|x\|)$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}_+$ và mọi $x \in X$.

Định nghĩa 2.3. Tập $S \subset \mathbb{R}_+ \times X$ được gọi là đa tập ổn định bất biến đối với nghiệm của phương trình (6) nếu với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$ ta có $X = X_0(t) \oplus X_1(t)$ sao cho

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Sn(X_0(t), X_1(t)) := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{i=0,1} \{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t), \|x_i\| = 1\} > 0$$

và tồn tại các ánh xạ Lipschitz

$$g_t : X_0(t) \rightarrow X_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

với các hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào t sao cho

- (i) $S = \{(t, x + g_t(x)) \in \mathbb{R}_+ \times X_0(t) \oplus X_1(t) \mid t \in \mathbb{R}_+, x \in X_0(t)\}$, ta ký hiệu $S_t = \{x + g_t(x) : (t, x + g_t(x)) \in S\}$.
- (ii) S_t đồng phôi với $X_0(t)$ với mọi $t \geq 0$.
- (iii) Mỗi $x_0 \in S_{t_0}$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện $u(t_0) = x_0$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty$.
- (iv) S là bất biến đối với phương trình (6) nếu u là nghiệm của phương trình (6) thỏa mãn $u(t_0) = x_0 \in S_{t_0}$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty$ thì $u(s) \in S_s$ với mọi $s \geq t_0$.

Tương tự như bổ đề (2.1.5) ta có thể chứng minh bổ đề dưới đây đưa ra công thức nghiệm bị chặn của phương trình (6).

Bổ đề 2.4. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân N , $\nu > 0$. Giả sử $\varphi \in E$ là hàm không âm và $f : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ là φ -Lipschitz. Gọi $u(t)$ là nghiệm của (6) sao cho $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty$ với t_0 cố định. Khi đó, với mọi $t \geq t_0$ tồn tại $\nu_0 \in X_0(t_0) = P(t_0)X$ sao cho $u(t)$ có dạng

$$u(t) = U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad (15)$$

trong đó $\mathcal{G}(t, \tau)$ là hàm Green.

Nhận xét 2.5. Bằng tính toán trực tiếp ta chứng minh được nghiệm của phương trình (15) thỏa mãn phương trình (6) với mọi $t \geq t_0$.

Định lý 2.6. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân N , $\nu > 0$. Giả sử f là φ -Lipschitz với $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty}) < 1$. Khi đó, mỗi $\nu_0 \in X_0(t_0)$ tồn tại duy nhất nghiệm $u(t)$ của (6) trên $[t_0, \infty)$ sao cho $P(t_0)u(t_0) = \nu_0$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty$. Hơn nữa, với $u_1(t), u_2(t)$ là hai nghiệm ứng với hai giá trị khác nhau $\nu_1, \nu_2 \in X_0(t_0)$ ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_{\mu} e^{-\mu(t-t_0)} \|\nu_1 - \nu_2\| \quad \text{với mọi } t \geq t_0 \quad (16)$$

trong đó μ thỏa mãn

$$0 < \mu < \nu + \ln(1 - (1+H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty})), \quad \text{và} \\ C_{\mu} = \frac{N}{1 - \frac{(1+H)N}{1-e^{-(\nu-\mu)}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_{\infty} + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_{\infty})}$$

Chứng minh: Với mỗi $\nu_0 \in X_0(t_0)$ ta xác định ánh xạ $T : L_{\infty}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow L_{\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ như sau

$$(Tx)(t) = \begin{cases} U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases}$$

Thực vậy, với $x(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ ta có $\|f(t, x(t))\| \leq \varphi(t)(M + \|x(t)\|)$. Đặt

$$y(t) = \begin{cases} U(t, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau & \text{nếu } t \geq t_0 \\ 0 & \text{nếu } t < t_0 \end{cases}$$

Ta có $\|y(t)\| \leq Ne^{-\nu(t-t_0)}\|\nu_0\| + (1+H)N \int_0^\infty e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)(M+\|x(\tau)\|)d\tau$.
 Vì $x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$ nên

$$\|y(\cdot)\|_\infty \leq N\|\nu_0\| + \frac{(1+H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1-e^{-\nu}}(M+\|x(\cdot)\|_\infty)$$

Bởi vậy, $(Tx)(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$.

Các bước tiếp theo tiến hành tương tự như trong chứng minh định lý (2.1.7) ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh sự tồn tại của đa tạp ổn định bất biến.

Định lý 2.7. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Giả sử f là φ -Lipschitz với $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < \frac{1}{N+1}$. Khi đó, tồn tại đa tạp ổn định bất biến S đối với nghiệm của phương trình (6). Hơn nữa, với hai nghiệm bất kỳ $u_1(t), u_2(t)$ trên đa tạp S tồn tại hai hằng số dương μ và C_μ không phụ thuộc vào t_0 sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_\mu e^{-\mu(t-t_0)}\|P(t_0)u_1(t_0) - P(t_0)u_2(t_0)\|, t \geq t_0 \quad (17)$$

Chứng minh: Vì họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ nên với mọi $t \geq 0$ ta có $X = X_0(t) \oplus X_1(t)$ trong đó $X_0(t) = P(t)X$ và $X_1(t) = \text{Ker}P(t)$. Hơn nữa, ta có

$$\inf_{t \in \mathbb{R}_+} Sn(X_0(t), X_1(t)) := \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \inf_{i=0,1} \{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t), \|x_i\| = 1\} > 0$$

Để xây dựng họ ánh xạ Lipschitz $(g_t)_{t \geq 0}$ thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa (2.2.3), với mỗi $t_0 \geq 0$ ta xác định

$$g_{t_0}(y) = \int_{t_0}^\infty \mathcal{G}(t_0, s)f(s, x(s))ds \quad (18)$$

trong đó $y \in X_0(t_0)$ và $x(\cdot)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (6) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn $P(t_0)x(t_0) = y$ và $x(t) = 0$ nếu $t < t_0$. Theo định nghĩa của hàm Green ta có $g_{t_0}(y) \in X_1(t_0)$.

Do vậy, ánh xạ $g_{t_0} : X_0(t_0) \rightarrow X_1(t_0)$. Ta sẽ chứng minh g_{t_0} là ánh xạ Lipschitz. Thực vậy, với $y_1, y_2 \in X_0(t_0)$ ta có

$$\begin{aligned} \|g_{t_0}(y_1) - g_{t_0}(y_2)\| &\leq \int_0^\infty \|\mathcal{G}(t_0, s)\| \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| ds \\ &\leq (1+H)N \int_0^\infty e^{-\nu|t_0-s|} \varphi(s) \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \\ &\leq \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Vì $x_i(\cdot)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (6) trên $[t_0, \infty)$ tương ứng với điều kiện $P(t_0)x_i(t_0) = y_i$, $i = 1, 2$ nên với mọi $t \geq t_0$ ta có

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \left\| U(t, t_0)(y_1 - y_2) + \int_{t_0}^\infty \mathcal{G}(t, \tau) [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq N \|y_1 - y_2\| + \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Đặt $k = \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}} (N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < 1$ ta có

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \leq N \|y_1 - y_2\| + k \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty$$

Suy ra

$$\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_\infty \leq \frac{N}{1-k} \|y_1 - y_2\|$$

Do vậy, ta có

$$\|g_{t_0}(y_1) - g_{t_0}(y_2)\| \leq \frac{Nk}{1-k} \|y_1 - y_2\|$$

Vậy, g_{t_0} là ánh xạ Lipschitz với hằng số Lipschitz $q := \frac{Nk}{1-k}$ không phụ thuộc vào t_0 .

Đặt $S = \{(t, x + g_t(x)) \in \mathbb{R}_+ \times X_0(t) \oplus X_1(t) \mid x \in X_0(t_0)\}$. Với mỗi $t_0 \geq 0$, ta chứng minh $S_{t_0} = \{x + g_{t_0}(x) : (t_0, x + g_{t_0}(x)) \in S\}$ đồng phôi với $X_0(t_0)$. Thật vậy, ta định nghĩa ánh xạ $D : X_0(t_0) \rightarrow S_{t_0}$ với $Dy = y + g_{t_0}(y)$. Do hằng số Lipschitz $q < 1$ nên g_{t_0} là ánh xạ co. Bởi vậy, D là đồng phôi. Điều kiện (iii) trong định nghĩa (2.2.3) và bất đẳng thức (17) được suy ra từ định lý (2.2.6). Để chứng minh S là đa tập ổn định bất biến ta phải chứng minh S thỏa mãn điều kiện (iv) trong định

nghĩa (2.2.3). Thật vậy, gọi $u(t)$ là nghiệm của (6) trong $L_\infty(\mathbb{R}_+, X)$ sao cho $u(t_0) = u_0 \in S_{t_0}$. Với mỗi $s \geq t_0$, theo bổ đề (2.2.4) nghiệm $u(s)$ có dạng

$$u(s) = U(s, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^{\infty} \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad \text{với } \nu_0 = P(t_0)u_0 \quad (19)$$

trong đó $\mathcal{G}(s, \tau)$ là hàm Green.

Đặt $w_s = U(s, t_0)\nu_0 + \int_{t_0}^s \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau$, ta có $w_s \in P(s)X$ và

$$u(s) = w_s + \int_s^{\infty} \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad (20)$$

Hơn nữa, với mọi $t \geq s$ tính toán trực tiếp và sử dụng công thức (15) ta có

$$u(t) = U(t, s)w_s + \int_s^{\infty} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, u(\tau))d\tau \quad (21)$$

Từ (20), (21) và định nghĩa của g_t ta suy ra $u(s) = w_s + g_s(w_s)$. Do vậy, $u(s) \in S_s$ với mọi $s \geq t_0$. $\square$

Nhận xét 2.8. Đối với đa tạp ổn định địa phương tính bất biến không đúng vì khi t đủ lớn nghiệm $u(t)$ của (6) với $u(t_0) \in B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$ có thể không thuộc $B_{\frac{\rho}{2N}} \cap X_0(t_0)$.

2.3 Đa tạp không ổn định cho phương trình xác định trên đường thẳng

Trước hết, ta nhắc lại các khái niệm không gian hàm chấp nhận được, nhị phân mũ và một số khái niệm khác xác định trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 3.1. Một không gian vectơ E gồm các hàm thực đo được Borel trên $\mathbb{R}$ được gọi là không gian hàm Banach (trên $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ trong đó $\mathcal{B}$ là đại số Borel và λ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$) nếu

- (1) $(E, \|\cdot\|_E)$ là không gian Banach và nếu $\varphi \in E$, ψ là hàm thực đo được Borel sao cho $|\psi(\cdot)| \leq |\varphi(\cdot)|$ (λ -a.e) thì $\psi \in E$ và $\|\psi\|_E \leq \|\varphi\|_E$
- (2) Hàm đặc trưng $\chi_A \in E$ với mọi $A \in \mathcal{B}$ có độ đo hữu hạn và $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\chi_{[t, t+1]}\|_E < \infty$, $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|\chi_{[t, t+1]}\|_E > 0$.

(3) $E \hookrightarrow L_{1,loc}(\mathbb{R})$ tức là với mọi đoạn compact $J \subset \mathbb{R}$ tồn tại $\beta_J \geq 0$ sao cho $\int_J |f(t)|dt \leq \beta_J \|f\|_E$ với mọi $f \in E$.

Định nghĩa 3.2. Không gian hàm Banach E được gọi là chấp nhận được nếu nó thỏa mãn

(i) Tồn tại hằng số $M \geq 1$ sao cho mọi $[a, b] \in \mathbb{R}$ và mọi $\varphi \in E$ ta có

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt \leq \frac{M(b-a)}{\|\chi_{[a,b]}\|_E} \|\varphi\|_E$$

(ii) Nếu $\varphi \in E$ thì hàm $\Lambda_1 \varphi(t) = \int_t^{t+1} \varphi(\tau)d\tau \in E$

(iii) E là T_τ^+ và T_τ^- bất biến với mọi $\tau \in \mathbb{R}$, trong đó

$$\begin{aligned} T_\tau^+ \varphi(t) &= \varphi(t - \tau) \\ T_\tau^- \varphi(t) &= \varphi(t + \tau) \end{aligned}$$

Hơn nữa tồn tại $N_1, N_2 > 0$ sao cho $\|T_\tau^+\| \leq N_1, \|T_\tau^-\| \leq N_2$ với mọi $\tau \in \mathbb{R}$.

Chứng minh tương tự như trên nửa đường thẳng ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.3. Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được. Ta có các khẳng định sau

(a) Nếu φ và ψ là các hàm thực đo được Borel trên $\mathbb{R}$ sao cho hai hàm trùng nhau bên ngoài một đoạn compact và bị chặn cốt yếu trong đoạn này thì $\varphi \in E$ khi và chỉ khi $\psi \in E$.

(b) Cho $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ sao cho $\varphi \geq 0$ và $\Lambda_1 \varphi \in E$. Với mọi $\sigma > 0$ ta xác định $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi$ như sau

$$\begin{aligned} \Lambda'_\sigma \varphi(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\sigma(t-s)} \varphi(s)ds \\ \Lambda''_\sigma \varphi(t) &= \int_t^{\infty} e^{-\sigma(s-t)} \varphi(s)ds \end{aligned}$$

Khi đó $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi \in E$. Hơn nữa, nếu $\varphi \in E$ thì $\Lambda'_\sigma \varphi$ và $\Lambda''_\sigma \varphi$ bị chặn và ta có đánh giá

$$\|\Lambda'_\sigma \varphi\|_\infty \leq \frac{N_2}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty \text{ và } \|\Lambda''_\sigma \varphi\|_\infty \leq \frac{N_1}{1 - e^{-\sigma}} \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty$$

trong đó T_1^+ , Λ_1 và N_1 , N_2 được xác định trong định nghĩa (2.4.2).

Bằng các định nghĩa tương tự bổ đề trên vẫn đúng đối với không gian hàm Banach xác định trên $(-\infty, t_0]$ với mọi $t_0 \leq 0$.

Định nghĩa 3.4. Họ các toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s}$ trên không gian Banach X được gọi là họ tiến hóa trên đường thẳng nếu

- (i) $U(t, t) = id$ và $U(t, \tau)U(\tau, s) = U(t, s)$ với mọi $t \geq \tau \geq s$
- (ii) Ánh xạ $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ liên tục với mọi $x \in X$
- (iii) Tồn tại các hằng số $K, c \geq 0$ sao cho $\|U(t, s)\| \leq Ke^{c(t-s)}$

Định nghĩa 3.5. Họ tiến hóa $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s}$ trên không gian Banach X được gọi là nhị phân mũ trên $\mathbb{R}$ nếu tồn tại các toán tử chiếu tuyến tính bị chặn $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$ trên X và các hằng số dương N, ν sao cho

- (a) $U(t, s)P(s) = P(t)U(t, s)$, $t \geq s$
- (b) Ánh xạ hạn chế $U(t, s)|_{\text{Ker}P(s)} : \text{Ker}P(s) \rightarrow \text{Ker}P(t)$, $t \geq s$ là đẳng cấu, ta ký hiệu $(U(t, s)|)^{-1} = U(s, t)|$
- (c) $\|U(t, s)x\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}\|x\|$ với mọi $x \in P(s)X$, $t \geq s$
- (d) $\|U(s, t)|x\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}\|x\|$ với mọi $x \in \text{Ker}P(t)$, $t \geq s$.

Các hằng số N, ν được gọi là hằng số nhị phân và các toán tử chiếu $P(t)$ được gọi phép chiếu nhị phân.

Tương ứng với họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s}$ trên $\mathbb{R}$ có nhị phân mũ ta có hàm Green

$$\mathcal{G}(t, \tau) = \begin{cases} P(t)U(t, \tau) & \text{nếu } t \geq \tau \\ -U(t, \tau)|_I(I - P(\tau)) & \text{nếu } t < \tau \end{cases}$$

Ta có ước lượng

$$\|\mathcal{G}(t, \tau)\| \leq N(1 + H)e^{-\nu|t-\tau|} \quad \text{với } t \neq \tau$$

với $H = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|P(t)\| < \infty$.

Định nghĩa 3.6. Cho không gian hàm Banach chấp nhận được E và $\varphi \in E$ là hàm không âm, ánh xạ $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ được gọi là φ -Lipschitz nếu tồn tại $M > 0$ sao cho f thỏa mãn

- (i) $\|f(t, 0)\| \leq M\varphi(t)$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}$
- (ii) $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varphi(t)\|x_1 - x_2\|$ với hầu hết $t \in \mathbb{R}$ và mọi x_1, x_2 .

Xét phương trình sau

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in X \quad (22)$$

trong đó $A(t)$ là toán tử sinh của họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s}$ xác định trên $\mathbb{R}$ có nhị phân mũ và $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ là φ -Lipschitz.

Như các phần trước, ta xét nghiệm đủ tốt của phương trình (22) là nghiệm của phương trình tích phân

$$x(t) = U(t, s)x(s) + \int_s^t U(t, \xi)f(\xi, x(\xi))d\xi \quad \text{với } t \geq s \quad (23)$$

Sự tồn tại của đa tập ổn định bất biến cho các nghiệm của (23) đã được chứng minh trong định lý (2.2.7), ta chỉ thay $t_0 \geq 0$ bởi $t_0 \in \mathbb{R}$. Trong phần này, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của đa tập không ổn định bất biến cho các nghiệm của (23).

Định nghĩa 3.7. Tập $S \subset \mathbb{R} \times X$ được gọi là đa tập không ổn định bất biến với các nghiệm của (23) nếu với mọi $t \leq 0$ ta có $X = X_0(t) \oplus X_1(t)$ sao cho

$$\inf_{t \leq 0} Sn(X_0(t), X_1(t)) := \inf_{t \leq 0} \inf_{i=0,1} \{\|x_0 + x_1\| : x_i \in X_i(t), \|x_i\| = 1\} > 0$$

và tồn tại các ánh xạ Lipschitz

$$g_t : X_1(t) \rightarrow X_0(t), \quad t \leq 0$$

với các hằng số Lipschitz không phụ thuộc vào t sao cho

- (i) $S = \{(t, x + g_t(x)) \in \mathbb{R}_- \times (X_1(t) \oplus X_0(t)) \mid t \in \mathbb{R}_-, x \in X_1(t)\}$, ta ký hiệu $S_t = \{x + g_t(x) : (t, x + g_t(x)) \in S\}$.
- (ii) S_t đồng phôi với $X_1(t)$ với mọi $t \leq 0$.
- (iii) Mỗi $x_0 \in S_{t_0}$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của (23) trên $(-\infty, t_0]$ thỏa mãn điều kiện $u(t_0) = x_0$ và $\text{ess sup}_{t \leq t_0} \|u(t)\| < \infty$.
- (iv) S là bất biến đối với phương trình (23) nếu u là nghiệm của phương trình (23) thỏa mãn $u(t_0) = x_0 \in S_{t_0}$ và $\text{ess sup}_{t \leq t_0} \|u(t)\| < \infty$ thì $u(s) \in S_s$ với mọi $s \leq t_0$.

Bổ đề 3.8. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s}$ có nhị phân mũ với các phép chiếu nhị phân $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Giả sử, $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ là φ -Lipschitz với $\varphi \in E$ là hàm không âm. Gọi $x(t)$ là nghiệm của (23) sao cho $\text{ess sup}_{t \leq t_0} \|x(t)\| < \infty$ với t_0 cố định. Khi đó, với mọi $t \leq t_0$ nghiệm $x(t)$ có dạng

$$x(t) = U(t, t_0)\nu_1 + \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (24)$$

trong đó $\nu_1 \in X_1(t_0) = (I - P(t_0))X$.

Chứng minh: Với mọi $t \leq t_0$, đặt

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|y(\cdot)\|_\infty &\leq N(1 + H) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\nu|t-\tau|} \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^t e^{-\nu(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau + \int_t^{t_0} e^{-\nu(\tau-t)} \varphi(\tau) d\tau \right] \\ &\quad (1 + H)N(\|x(\cdot)\|_\infty + M) \\ &\leq (1 + H)N(\|x(\cdot)\|_\infty + M) \frac{N_2 \|\Lambda_1 \varphi\|_\infty + N_1 \|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty}{1 - e^{-\nu}} < \infty \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh với mọi $t \leq t_0$ thì $y(t_0)$ thỏa mãn phương trình sau

$$y(t_0) = U(t_0, t)y(t) + \int_t^{t_0} U(t_0, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

trong đó

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t_0, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} U(t_0, \tau) P(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Thực vậy, ta có

$$\begin{aligned}
& U(t_0, t)y(t) + \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& + U(t_0, t) \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& + U(t_0, t) \int_{-\infty}^t U(t, \tau)P(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& - U(t_0, t) \int_t^{t_0} U(t, \tau)(I - P(\tau))f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& = \int_{-\infty}^t U(t_0, \tau)P(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)(I - P(\tau))f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& + \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} U(t_0, \tau)P(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\
& = \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = y(t_0).
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$x(t_0) = U(t_0, t)x(t) + \int_t^{t_0} U(t_0, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Do đó $x(t_0) - y(t_0) = U(t_0, t)[x(t) - y(t)]$. Với mọi $s \leq t$ ta có

$$\begin{aligned}
P(t)x(t) &= P(t)U(t, s)x(s) + P(t) \int_s^t U(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\
&= U(t, s)P(s)x(s) + \int_s^t U(t, \tau)P(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau
\end{aligned}$$

Ta có

$$\|U(t, s)P(s)x(s)\| \leq e^{-\nu(t-s)}\|P(s)x(s)\| \leq He^{-\nu(t-s)}\|x(\cdot)\|_\infty$$

Bởi vậy khi cho $s \rightarrow -\infty$ ta có

$$P(t)x(t) = \int_{-\infty}^t U(t, \tau)P(\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = P(t)y(t)$$

Do đó, $x(t) - y(t) \in \text{Ker} P(t)$. Suy ra, $x(t_0) - y(t_0) = U(t_0, t)[x(t) - y(t)] \in \text{Ker} P(t_0)$. Đặt $\nu_1 = x(t_0) - y(t_0)$ ta có $x(t) = U(t, t_0)|\nu_1 + y(t)$. $\square$

Nhận xét 3.9. Bằng tính toán trực tiếp ta chứng minh được các nghiệm của phương trình (24) cũng là nghiệm của phương trình (23).

Định lý 3.10. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$ và hằng số nhị phân $N, \nu > 0$. Giả sử $f : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ là φ -Lipschitz với $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < 1$. Khi đó, mỗi $\nu_1 \in X_1(t_0)$ tồn tại duy nhất nghiệm $x(t)$ của (23) trên $(-\infty, t_0]$ sao cho $(I - P(t_0))x(t_0) = \nu_1$ và $\text{ess sup}_{t \leq t_0} \|x(t)\| < \infty$. Hơn nữa, với $x_1(t), x_2(t)$ là hai nghiệm ứng với hai giá trị khác nhau $\mu_1, \mu_2 \in X_1(t_0)$ ta có

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq C_\mu e^{-\mu(t_0-t)} \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \text{với mọi } t \leq t_0 \quad (25)$$

trong đó μ thỏa mãn

$$0 < \mu < \nu + \ln(1 - (1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)), \quad \text{và} \\ C_\mu = \frac{N}{1 - \frac{(1+H)N}{1-e^{-(\nu-\mu)}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}$$

Chứng minh: Với mỗi $\nu_1 \in X_1(t_0)$ ta xác định ánh xạ T như sau

$$T : L_\infty((-\infty, t_0], X) \rightarrow L_\infty((-\infty, t_0], X) \\ (Tx)(t) = U(t, t_0)|\nu_1 + \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Ta chứng minh T là ánh xạ co. Thực vậy, với $x(\cdot) \in L_\infty((-\infty, t_0], X)$ ta có $\|f(t, x(t))\| \leq \varphi(t)(M + \|x(t)\|)$. Ta có

$$\|(Tx)(t)\| \leq N e^{-\nu(t_0-t)} \|\nu_1\| + (1 + H)N \int_0^\infty e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau)(M + \|x(\tau)\|) d\tau$$

Vì $x(\cdot) \in L_\infty((-\infty, t_0], X)$ nên

$$\|Tx\|_\infty \leq N\|\nu_1\| + \frac{(1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1 - e^{-\nu}}(M + \|x(\cdot)\|_\infty)$$

Bởi vậy, $(Tx)(t) \in L_\infty((-\infty, t_0], X)$. Xét

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_\infty &\leq (1 + H)N \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\nu|t-\tau|} \varphi(\tau) d\tau \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_\infty \\ &\leq \frac{(1 + H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1 - e^{-\nu}} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

Vì $\frac{(1+H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)}{1 - e^{-\nu}} < 1$ nên T là ánh xạ co. Khi đó, tồn tại duy nhất $x(t) \in L_\infty((-\infty, t_0], X)$ sao cho $(Tx)(t) = x(t)$. Theo bổ đề (2.4.8) và nhận xét (2.4.9) thì $x(t)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (23).

Để chứng minh bất đẳng thức (25) ta thực hiện các bước tương tự như trong chứng minh định lý (2.1.7) sẽ thu được điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh sự tồn tại của đa tạp không ổn định bất biến.

Định lý 3.11. Cho họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$ và hằng số nhị phân N , $\nu > 0$. Giả sử f là φ -Lipschitz với $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < \frac{1}{N+1}$. Khi đó, tồn tại đa tạp không ổn định bất biến S đối với nghiệm của phương trình (23). Hơn nữa, với hai nghiệm bất kỳ $x_1(t)$, $x_2(t)$ trên đa tạp S tương ứng $\mu_1, \mu_2 \in \text{Ker} P(t_0)$ tồn tại hai hằng số dương μ và C_μ không phụ thuộc vào t_0 sao cho

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq C_\mu e^{-\mu(t_0-t)} \|\mu_1 - \mu_2\| \quad \text{với mọi } t \leq t_0$$

Chứng minh: Với mỗi $t \leq 0$ ta xây dựng ánh xạ $g_t : X_1(t) \rightarrow X_0(t)$ như sau

$$g_t(y) = \int_{-\infty}^t \mathcal{G}(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

trong đó $x(\cdot)$ là nghiệm duy nhất trong $L_\infty((-\infty, t], X)$ của phương trình (23) trên $(-\infty, t]$ thỏa mãn $(I - P(t))x(t) = y$. Rõ ràng, $g_t(y) \in X_0(t)$. Sự tồn tại của đa tạp không ổn định S được chứng minh như trong định lý (2.2.7). Dưới đây, ta chứng minh đa tạp S là bất biến đối với các nghiệm của phương trình (23).

Gọi $x(t)$ là nghiệm của phương trình (23) trong $L_\infty((-\infty, t_0], X)$ với $x(t_0) = x_0 \in S_{t_0}$. Với $s \leq t_0$, theo bổ đề (2.4.8) ta có

$$x(s) = U(s, t_0)|x_0 + \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Đặt $w_s = U(s, t_0)|x_0 + \int_s^{t_0} \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$. Ta có, $w_s \in \text{Ker}P(s)$ và

$$x(s) = w_s + \int_{-\infty}^s \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Mặt khác với $t \leq s$ ta có

$$\begin{aligned} & U(t, s)|w_s + \int_{-\infty}^s \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = U(t, s)|U(s, t_0)|x_0 \\ & + U(t, s)| \int_s^{t_0} \mathcal{G}(s, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^s \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\ & = U(t, t_0)|x_0 + \int_s^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^s \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau \\ & = U(t, t_0)|x_0 + \int_{-\infty}^{t_0} \mathcal{G}(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau = x(t) \end{aligned}$$

Vì vậy, $x(s) = w_s + g_s(w_s)$. Suy ra, $x(s) \in S_s$ với mọi $s \leq t_0$. $\square$

Nhận xét 3.12. Với các giả thiết của định lý (2.3.11) thì phương trình (23) tồn tại đa tập ổn định và không ổn định bất biến, các nghiệm xuất phát trên đa tập ổn định (không ổn định) tiến dần về nhau khi $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).

2.4 Đa tập tâm ổn định

Trong phần này, ta xét phương trình

$$u(t) = U(t, s)u(s) + \int_s^t U(t, \xi)f(\xi, u(\xi))d\xi \text{ với mọi } t \geq s \geq 0 \quad (26)$$

Khi họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ của phương trình trên có nhị phân mũ và f là φ -Lipschitz thì định lý (2.2.7) đã chỉ ra sự tồn tại của đa tập ổn

định bất biến cho nghiệm của phương trình trên. Dưới đây, ta xét họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ thỏa mãn điều kiện tổng quát hơn.

Định nghĩa 4.1. Họ tiến hóa $\mathcal{U} = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là tam phân mũ trên $[0, \infty)$ nếu tồn tại các họ toán tử chiếu tuyến tính bị chặn $P_j(t)$, $t \geq 0$, $j = 1, 2, 3$ trên X và các hằng số dương N, α, β với $\alpha < \beta$ thỏa mãn các điều kiện sau

- (i) $\sup_{t \geq 0} \|P_j(t)\| < \infty$ với $j = 1, 2, 3$.
- (ii) $P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = I$ với $t \geq 0$ và $P_j(t)P_i(t) = 0$ với $j \neq i$.
- (iii) $P_j(t)U(t, s) = U(t, s)P_j(s)$ với $t \geq s \geq 0$ và $j = 1, 2, 3$.
- (iv) $U(t, s)|_{\text{Im}P_j(s)}$ là đẳng cấu từ $\text{Im}P_j(s)$ lên $\text{Im}P_j(t)$ với $t \geq s \geq 0$ và $j = 2, 3$. Tương ứng, ta ký hiệu ánh xạ ngược của ánh xạ $U(t, s)|_{\text{Im}P_j(s)}$ là $U(s, t)|$.
- (v) Với mọi $t \geq s \geq 0$ và $x \in X$ ta có
$$\begin{aligned} \|U(t, s)P_1(s)x\| &\leq Ne^{-\beta(t-s)}\|P_1(s)x\| \\ \|U(s, t)|P_2(t)x\| &\leq Ne^{-\beta(t-s)}\|P_2(t)x\| \\ \|U(t, s)P_3(s)x\| &\leq Ne^{\alpha(t-s)}\|P_3(s)x\| \end{aligned}$$

Định lý 4.2. Cho họ tiến hóa $U(t, s)$ có tam phân mũ với các hằng số tam phân N, α, β và các họ toán tử chiếu tam phân $P_j(t)$, $j = 1, 2, 3$. Giả sử $f : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ là φ -Lipschitz trong đó $\varphi \in E$ là hàm không âm thỏa mãn $k := \frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < \frac{1}{N+1}$. Khi đó, với mỗi δ cố định sao cho $\delta > \alpha$ tồn tại đa tập tâm ổn định $S = (t, S_t) \subset \mathbb{R}_+ \times X$ cho các nghiệm của phương trình (26) trong đó $S_t = \text{graph}(g_t)$ với $g_t : \text{Im}(P_1(t) + P_3(t)) \rightarrow \text{Im}P_2(t)$ là các ánh xạ Lipschitz đều thỏa mãn $\text{Lip}(g_t) \leq k < 1$ và S_t có các tính chất sau

- (i) Mỗi $x_0 \in S_{t_0}$ có duy nhất nghiệm $u(t)$ của (26) trên $[t_0, \infty)$ thỏa mãn điều kiện $u(t_0) = x_0$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|e^{-\gamma t} u(t)\| < \infty$ trong đó $\gamma = \frac{\delta + \alpha}{2}$.
- (ii) S_t đồng phôi với $X_1(t) \oplus X_3(t)$ với $X_i(t) = P_i(t)X$.
- (iii) S là bất biến đối với phương trình (26) nếu u là nghiệm của phương trình (26) thỏa mãn $u(t_0) = x_0 \in S_{t_0}$ và $\text{ess sup}_{t \geq t_0} \|e^{-\gamma t} u(t)\| < \infty$ thì $u(s) \in S_s$ với mọi $s \geq t_0$.
- (iv) Với $x(\cdot), y(\cdot)$ là hai nghiệm bất kỳ trên đa tập S ta có

$$\|x(t) - y(t)\| \leq Ce^{\alpha(t-t_0)}\|x(t_0) - y(t_0)\| \quad \text{với mọi } t \geq t_0$$

trong đó C không phụ thuộc vào t_0 và hai nghiệm $x(\cdot)$, $y(\cdot)$.

Chứng minh: Đặt $P(t) = P_1(t) + P_3(t)$ và $Q(t) = P_2(t) = I - P(t)$. Vì $P_i(t)P_j(t) = 0$ nên $P(t)$, $Q(t)$ là các toán tử chiếu trên X . Với $t \geq s \geq 0$ ta xét họ tiến hóa điều chỉnh

$$\tilde{U}(t, s) = e^{-\gamma(t-s)}U(t, s)$$

Ta chứng minh họ tiến hóa $\tilde{U}(t, s)$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} P(t)\tilde{U}(t, s) &= e^{-\gamma(t-s)}(P_1(t) + P_3(t))U(t, s) \\ &= e^{-\gamma(t-s)}U(t, s)(P_1(s) + P_3(s)) = \tilde{U}(t, s)P(s) \end{aligned}$$

Vì $U(t, s)|_{\text{Im}P_2(s)}$ là đẳng cấu từ $\text{Im}P_2(s)$ lên $\text{Im}P_2(t)$ nên $\tilde{U}(t, s)|_{\text{Im}P_2(s)}$ cũng là đẳng cấu từ $\text{Im}P_2(s)$ lên $\text{Im}P_2(t)$. Ta có

$$\|\tilde{U}(s, t)Q(t)x\| \leq e^{-(\beta+\gamma)(t-s)}\|Q(t)x\| \quad \text{với } t \geq s \geq 0$$

Mặt khác, với $t \geq s \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}(t, s)P(s)x\| &= e^{-\gamma(t-s)}\|U(t, s)(P_1(s) + P_3(s))x\| \\ &\leq Ne^{-\gamma(t-s)}(e^{-\beta(t-s)}\|P_1(s)x\| + e^{\alpha(t-s)}\|P_3(s)x\|) \\ &= Ne^{-\gamma(t-s)}(e^{-\beta(t-s)}\|P_1(s)P(s)x\| + e^{\alpha(t-s)}\|P_3(s)P(s)x\|) \end{aligned}$$

Đặt $q = \sup\{\|P_j(t)\|, \quad t \geq 0, j = 1, 3\}$, ta có

$$\|\tilde{U}(t, s)P(s)x\| \leq 2Nqe^{-\frac{(\delta-\alpha)}{2}(t-s)}\|P(s)x\|$$

Vậy, $\tilde{U}(t, s)$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P(t)$ và các hằng số nhị phân $N_0 = \max\{N, 2Nq\}$ và $\nu = \frac{(\delta-\alpha)}{2}$.

Đặt $\tilde{x}(t) = e^{-\gamma t}x(t)$ và ta xác định $F : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ như sau

$$F(t, x) = e^{-\gamma t}f(t, e^{\gamma t}x)$$

Rõ ràng, F là φ -Lipschitz. Với phép đổi biến trên thì phương trình (26) có dạng là

$$\tilde{x}(t) = \tilde{U}(t, s)\tilde{x}(s) + \int_s^t \tilde{U}(t, \xi)F(\xi, \tilde{x}(\xi))d\xi \quad \text{với mọi } t \geq s \geq 0 \quad (27)$$

Vì vậy, theo định lý (2.2.7) nếu

$$k = \frac{(1+H)N_0}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty) < \frac{1}{N_0+1}$$

thì tồn tại đa tập ổn định bất biến S cho các nghiệm của phương trình (27). Qua phép đổi biến ngược lại $x(t) = e^{\gamma t} \tilde{x}(t)$ và kiểm tra trực tiếp các điều kiện từ (i) đến (iv) của định lý ta thấy đa tập S chính là đa tập tâm ổn định cho các nghiệm của phương trình (26). $\square$