

Chương 3. Áp dụng

Trong chương này ta đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả trong chương 2. Trong các ví dụ này để chỉ ra họ tiến hóa sinh bởi phần tuyến tính của bài toán ban đầu có nhị phân mũ ta cần các kết quả đã biết dưới đây.

3.1 Nhị phân mũ của $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm

Định nghĩa 1.1. Một họ các toán tử tuyến tính bị chặn $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ trên không gian Banach X được gọi là $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

- (a) $T(0) = I$
- (b) $T(t+s) = T(t)T(s)$ với mọi $t, s \geq 0$
- (c) $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.2. Một $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ được gọi là có nhị phân mũ nếu tồn tại phép chiếu P và các hằng số $K, \nu > 0$ sao cho

- (i) $PT(t) = T(t)P$ với mọi $t \geq 0$
- (ii) Hạn chế $T(t)|_{\text{Ker} P} : \text{Ker} P \rightarrow \text{Ker} P$ là đẳng cấu với mọi $t \geq 0$
- (iii) $\|T(t)x\| \leq Ke^{-\nu t}\|x\|$ với mọi $x \in \text{Im} P$ và $t \geq 0$
- (iv) $\|T(t)x\| \leq Ke^{-\nu t}\|x\|$ với mọi $x \in \text{Ker} P$ và $t \geq 0$

Nhận xét 1.3. Nếu $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ là $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm thì ta xác định họ tiến hóa tương ứng $\mathcal{U}_T = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ như sau

$$U(t, s) = T(t-s) \quad \text{với mọi } t \geq s \geq 0$$

Bổ đề 1.4. $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ có nhị phân mũ khi và chỉ khi họ tiến hóa $\mathcal{U}_T = U(t, s)_{t \geq s \geq 0}$ có nhị phân mũ.

Bổ đề 1.5. Cho $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ là một $\mathcal{C}_0$ -nửa nhóm trên X với toán tử sinh A . Nếu A thỏa mãn định lý ánh xạ phổ, tức là

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \setminus \{0\}$$

thì các khẳng định sau là tương đương

- (a) $(T(t))_{t \geq 0}$ có nhị phân mũ.
- (b) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Chú ý: Nếu A là toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X thì A thỏa mãn định lý ánh xạ phổ.

3.2 Phương trình vi phân thường

Ví dụ 2.1. Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t, x)$$

trong đó A là toán tử sinh của nửa nhóm $T(t)$ với $t \geq 0$ và $\sigma(A)$ được phân thành hai tập phổ $\{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ và $\{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Khi đó, $U(t, s) = T(t - s)$ với mọi $t \geq s \geq 0$ có nhị phân mũ. Bởi vậy, nếu f là φ -Lipschitz với hàm φ nào đó thuộc không gian hàm chấp nhận được E và thỏa mãn giả thiết của định lý (2.2.7) thì phương trình tích phân (6) ứng với phương trình trên có đa tập ổn định bất biến. Từ định lý (2.1.8) và định lý (2.2.7) ta thấy, nếu phương trình tích phân (6) có đa tập ổn định bất biến thì (6) có đa tập ổn định địa phương với bán kính ρ đủ nhỏ.

Nhận xét: Trong các định lý tồn tại đa tập tích phân thì hàm φ không âm và thỏa mãn $\frac{(1+H)N}{1-e^{-\nu}}(N_1\|\Lambda_1 T_1^+ \varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty)$ đủ nhỏ. Trong các ví dụ áp dụng để đơn giản ta xét điều kiện $\|\Lambda_1 \varphi\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \varphi(\tau) d\tau$ đủ nhỏ thay thế cho điều kiện trên.

Ví dụ 2.2. Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + be^{-\alpha t} \|x\|^2 f(t)$$

với A là toán tử sinh của nửa nhóm và $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Ánh xạ $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ là bị chặn, trong đó X là không gian Banach và $\alpha > 0$.

Đặt, $F(t, x) = \|x\|^2 f(t)$. Khi đó, F là φ -Lipschitz với $\varphi(t) = |b|e^{-\alpha t}$ trên mọi hình cầu B_ρ . Bởi vậy, nếu $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |b|e^{-\alpha \tau} d\tau \leq \frac{|b|}{\alpha}$ là đủ nhỏ thì phương trình trên có đa tập ổn định địa phương. Tuy nhiên, hàm F không φ -Lipschitz trên toàn không gian X . Do đó, phương trình trên có thể không có đa tập ổn định bất biến.

Nhận xét: Để thấy rõ điều kiện cho sự tồn tại các đa tập tích phân của các định lý trong chương 2 mạnh hơn tính Lipschitz đều. Ta xây dựng hàm $\varphi^*(t)$ có giá trị vô cùng lớn dưới đây.

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} |b|n & \text{với mọi } t \in (n - \frac{1}{n^3}; n + \frac{1}{n^3}), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

với $b \neq 0$. Tuy nhiên, ta có $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \varphi^*(\tau) d\tau < \infty$. Bởi vậy, khi chọn b đủ nhỏ ta sẽ thu được sự tồn tại của các đa tập tích phân trong các ví dụ với hàm phi tuyến thỏa mãn φ^* -Lipschitz.

Ví dụ 2.3. Trong không gian $\mathbb{R}^n$ xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \varphi^*(t) \cos(x(t))$$

trong đó A là ma trận hệ số hằng có các giá trị riêng với phần thực khác 0 và $\varphi^*(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Do vậy, phần tuyến tính của phương trình có nhị phân mũ và hàm phi tuyến $F(t, x) = \varphi^*(t) \cos(x)$ là φ^* -Lipschitz. Bởi vậy, phương trình trên có đa tập ổn định bất biến. Hơn nữa, nếu ta xét $t \in \mathbb{R}$ và mở rộng hàm φ^* với $n \in \mathbb{Z}^*$ thì phương trình trên sẽ tồn tại đa tập bất biến không ổn định với b đủ nhỏ.

Đối với phương trình trên ta xét bài toán nhiều

$$\frac{dx}{dt} = (A + B(t))x(t) + \varphi^*(t) \cos(x(t))$$

trong đó $B(t)$ là ma trận với các hệ số liên tục. Theo [4] bài toán nhiều có nhị phân mũ nếu $\sup_{t \geq 0} \|B(t)\| < \frac{\nu}{N(1+H)(2+NH)}$ trong đó N, ν và $H = \sup_{t \geq 0} \|P(t)\|$ là hằng số nhị phân và phép chiếu nhị phân tương ứng với ma trận hằng A . Bởi vậy, khi nhiều khá bé thì phương trình nhiều sẽ tồn tại các đa tập tích phân bất biến ổn định và không ổn định.

Ví dụ 2.4. Xét phương trình

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t, x)$$

trong đó A là toán tử sinh của nửa nhóm chỉnh hình $T(t)$ với $t \geq 0$ và $\sigma(A)$ được phân thành ba tập phổ $\{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, $\{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ và $\{\lambda \in \sigma(A) \mid \operatorname{Re} \lambda = 0\}$ sao cho $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ là hữu hạn điểm. Với mọi $t \geq s \geq 0$ ta định nghĩa họ tiến hóa $U(t, s) = T(t - s)$. Theo định lý ánh xạ phổ cho nửa nhóm chỉnh hình với t_0 cố định thì $\sigma(T(t_0))$ được phân thành ba tập rời nhau bao gồm nằm trong, trên và ngoài đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức. Các phép chiếu $P_j = P_j(t_0)$, $j = 1, 2, 3$ tương ứng là các phép chiếu phổ trên các tập phổ của toán tử $T(t_0)$. Khi đó, $U(t, s)$ có tam phân mũ. Bởi vậy, nếu f là φ -Lipschitz với hàm φ thỏa mãn $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \varphi(\tau) d\tau$ đủ nhỏ thì phương trình (26) có đa tập tâm ổn định.

3.3 Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Ví dụ 3.1. Xét phương trình Schrodinger dưới đây.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = i\Delta u(t, x) + \beta u(t, x) + be^{-\alpha t} \sin(|u(t, x)|) & \text{với } t \geq s \geq 0. \\ u(s, x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

trong đó hàm u nhận giá trị phức, $\beta \neq 0$, $\alpha > 0$ và $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn. Ta chọn không gian Hilbert $X = L_2(\Omega)$ và $D(\Delta) = W^{2,2}(\Omega) \subset X$. Khi đó, ta có bài toán Cauchy tổng quát

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \cdot) = Au(t, \cdot) + F(t, u(t, \cdot)) & \text{với } t \geq s \geq 0 \\ u(s, \cdot) = f \in X \end{cases}$$

trong đó $A = i\Delta + \beta I$ và $F : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ với $F(t, f)(x) = be^{-\alpha t} \sin(|f(x)|)$. Do toán tử Δ tự liên hợp nên $\sigma(\Delta) \subset \mathbb{R}$, suy ra $\sigma(A) = (i\sigma(\Delta) + \beta) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Do đó, A có nhị phân mũ với hằng số nhị phân N , ν và $\sup_{t \geq 0} \|P(t)\| \leq N$.

Ta có, F là φ -Lipschitz với $\varphi(t) = |b|e^{-\alpha t}$. Chọn $E = L_p(\mathbb{R}_+)$ với $1 \leq p \leq \infty$, khi đó các hằng số N_1, N_2 trong định nghĩa (1.2.4) bằng 1.

Ta có

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |b| e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{|b|(1 - e^{-\alpha})}{\alpha}$$

Bởi vậy, nếu b đủ nhỏ sẽ tồn tại đa tạp ổn định bất biến S cho nghiệm đủ tốt của bài toán trên.

Dưới đây là ví dụ minh họa cho định lý tồn tại đa tạp tâm ổn định đối với phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Ví dụ 3.2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, xét phương trình

$$\begin{aligned} w_t(t, x) &= w_{xx}(t, x) + n^2 w(t, x) + b e^{-ct} \cos(w(t, x)), \quad 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0. \\ w(t, 0) &= w(t, \pi) = 0 \end{aligned}$$

với $c > 0$. Ta xét $X = L_2[0, \pi]$ và $A : X \rightarrow X$ là $Ay = \ddot{y} + n^2 y$ với

$$D(A) = \{y \in X : y \text{ và } \ddot{y} \text{ liên tục tuyệt đối, } \ddot{y} \in X, y(0) = y(\pi) = 0\}$$

Phương trình trên có dạng là

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t, u) \quad \text{với } u(t) = w(t, \cdot)$$

trong đó $f(t, u) = b e^{-ct} \cos(u)$.

Theo [6] thì A là toán tử sinh của nửa nhóm chỉnh hình $T(t)$ với $t \geq 0$ và ta có

$$\sigma(A) = \{-1 + n^2, -4 + n^2, \dots, 0, \dots, -(1 + k)^2 + n^2, \dots\}$$

Rõ ràng, f là φ -Lipschitz với hàm $\varphi(t) = |b| e^{-ct} \in L_p[0, \pi]$. Do đó, nếu $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |b| e^{-c\tau} d\tau \leq \frac{|b|}{c}$ đủ nhỏ thì theo ví dụ 2.4 phương trình trên có đa tạp tâm ổn định.

Kết luận

Bài toán tồn tại của các đa tạp bất biến là bài toán thời sự và luôn thu hút sự quan tâm của các tác giả thuộc chuyên ngành phương trình vi phân vì nó mang lại bức tranh hình học tổng thể của các phương trình vi phân với nhiều phi tuyến. Điều kiện quen thuộc cho sự tồn tại của các đa tạp bất biến của phương trình vi phân nửa tuyến tính là phần tuyến tính có nhị phân mũ (hay tam phân mũ) và tính liên tục Lipschitz đều của phần phi tuyến với hệ số Lipschitz bé. Trong luận văn, tác giả đã giới thiệu một điều kiện tổng quát mới xuất hiện gần đây cho sự tồn tại của đa tạp bất biến của phương trình vi phân nửa tuyến tính. Dựa vào điều kiện tổng quát này, tác giả đã đưa ra điều kiện cho sự tồn tại của đa tạp bất biến không ổn định trong trường hợp phương trình xác định trên toàn trục và sự tồn tại của đa tạp tâm trong trường hợp phần tuyến tính có tam phân mũ. Bên cạnh đó, tác giả cũng cố gắng đưa ra các ví dụ minh họa cho sự tồn tại của các đa tạp bất biến và không ổn định của một số phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng khi áp dụng các kết quả trong luận văn.

Tuy nhiên, các vấn đề được đề cập trong luận văn là tương đối mới. Vì vậy luận văn không tránh khỏi những hạn chế. Tác giả luận văn mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo, các bạn đồng nghiệp và những người quan tâm để bổ sung hoàn thiện và tiếp tục phát triển đề tài.