

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán $\bar{\partial}$ là một bài toán cơ bản của giải tích phức, nó có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Việc tìm lời giải bài toán $\bar{\partial}$ đã được giải quyết gần như trọn vẹn trong $\mathbb{C}^n$. Tuy nhiên, việc cho công thức nghiệm hay việc đánh giá nghiệm của bài toán còn một số vấn đề mở.

Mục đích của luận văn này là dùng phương pháp biểu diễn tích phân để cho lời giải của bài toán $\bar{\partial}$ cũng như cho công thức nghiệm của bài toán và giới thiệu một số đánh giá nghiệm

Bản luận văn này gồm hai chương:

Chương 1. Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$ và đánh giá nghiệm

Trong chương này, tác giả dùng biểu diễn tích phân để giải bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$. Đồng thời cho hai kết quả đánh giá nghiệm của bài toán trong không gian $L^p(\Omega; \varphi)$

Chương 2. Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) và đánh giá nghiệm

Trong chương này, tác giả dùng biểu diễn tích phân để giải bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}^n$ cho một số trường hợp: vế phải là dạng khả vi liên tục đến cấp k và có giá compact, bài toán $\bar{\partial}$ trong đa đĩa cho dạng vi phân $f \in C_{p,q+1}^\infty(D)$, xây dựng công thức nghiệm theo nhân Koppelman cho miền lồi, chứng minh bài toán có nghiệm trong miền giả lồi. Cho một kết quả đánh giá nghiệm trong trường hợp vế phải thuộc không gian $L_{01}^2(\Omega; loc)$ khi Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$)

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với thầy PGS - TS: Nguyễn Đình Sang thuộc khoa: Toán - Cơ - Tin trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Nhân dịp này, tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy phản biện, những người đã đọc và đóng góp ý kiến để luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thành viên Xemina thuộc Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN đã phân tích, đóng góp rất nhiều ý kiến quý báu giúp tôi hoàn thành luận văn tốt hơn.

Cuối cùng, tôi cũng xin cảm ơn Cơ quan là trường Học viện Hậu cần đã cho tôi được đi học, cảm ơn các thầy cô trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã tận tình giảng dạy, cung cấp kiến thức để tôi ngày một hoàn thiện hơn về chuyên môn.

Do thời gian và kiến thức có hạn nên bản luận văn của tôi chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Do đó, tôi rất mong có được sự đóng góp của thầy cô và các bạn để bản luận văn của tôi được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà nội, ngày 10 tháng 12 năm 2010

Học viên

Nguyễn Văn Huynh

Mục lục

Lời nói đầu

Chương 1.	BÀI TOÁN $\bar{\partial}$ TRONG $\mathbb{C}$ VÀ ĐÁNH GIÁ NGHIỆM.....	5
1.1	Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$	5
1.1.1	Hàm chỉnh hình một biến phức.....	5
1.1.2	Công thức tích phân Cauchy và lời giải bài toán $\bar{\partial}$	5
1.2	Đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$	9
1.2.1	Không gian $L^p(\Omega)$ và $L^p(\Omega; \varphi)$	9
1.2.2	Hàm điều hòa và điều hòa dưới.....	10
1.2.3	Hàm Green.....	11
1.2.4	Các toán tử cơ bản.....	12
1.2.5	Đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$	16
Chương 2.	BÀI TOÁN $\bar{\partial}$ TRONG $\mathbb{C}^n$ VÀ ĐÁNH GIÁ NGHIỆM	23
2.1	Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}^n$	23
2.1.1	Hàm chỉnh hình nhiều biến phức.....	23
2.1.2	Công thức tích phân Cauchy trên đa đĩa trong $\mathbb{C}^n$	23
2.1.3	Ứng dụng biểu diễn tích phân giải bài toán $\bar{\partial}$	24
2.2	Bài toán $\bar{\partial}$ trong miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n (n > 1)$	35
2.2.1	Một số tính chất của toán tử xác định trừ mật trong không gian Hilbert.....	35
2.2.2	Hàm đa điều hòa dưới và một số tính chất.....	36
2.2.3	Toán tử $\bar{\partial}$ cho dạng vi phân.....	38
2.2.4	Bài toán $\bar{\partial}$ trong miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ và đánh giá nghiệm	42

CÁC KÍ HIỆU

- $A(\Omega)$: tập các hàm chỉnh hình trong Ω
- $\partial\Omega$: biên của tập Ω
- $C^k(\Omega)$: tập các hàm khả vi theo nghĩa thực cấp k trên Ω
- $C_0^k(\Omega)$: tập các hàm khả vi theo nghĩa thực cấp k trên Ω và có giá compact trên Ω
- $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f trên Ω sao cho $\int_{\Omega} |f|^p d\lambda < \infty$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue
- $L^p(\Omega, \varphi)$ là lớp các hàm đo được f trên Ω sao cho $\int_{\Omega} |f|^p e^{-\varphi} d\lambda < \infty$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue.
- $SH(\Omega)$: tập hợp các hàm điều hòa dưới trong Ω
- $B(z, R)$: Hình cầu tâm z có bán kính bằng R
- $C_{p,q}^k(\Omega)$: Dạng vi phân (p,q) có hệ số trong $C^k(\Omega)$
- $L^2(\Omega; \varphi)$: không gian các hàm trong Ω bình phương khả tích theo độ đo $e^{-\varphi} d\lambda$, trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue
- $L^2(\Omega; loc)$: không gian các hàm bình phương khả tích địa phương theo độ đo lebesgue
- $L_{p,q}^2(\Omega; \varphi)$: không gian các dạng vi phân (p,q) với hệ số trong $L^2(\Omega; \varphi)$
- $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$: không gian các hàm xác định trong Ω khả vi vô hạn và nhận giá trị thực
- $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$: không gian các hàm xác định trên Ω khả vi vô hạn và có giá compact
- $D_{p,q}(\Omega)$: không gian các dạng vi phân (p,q) với hệ số trong $D(\Omega)$

Chương 1. BÀI TOÁN $\bar{\partial}$ TRONG $\mathbb{C}$ VÀ ĐÁNH GIÁ NGHIỆM

1.1 Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$

1.1.1 Hàm chỉnh hình một biến phức

Giả thiết Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}$ mà ta đồng nhất $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Cho u là một hàm biến phức xác định trong Ω . $z \in \Omega, z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto u(z) = u(x, y) \end{aligned}$$

Ta giả thiết thêm là $u \in C^1(\Omega)$ theo nghĩa thực. Khi đó

$$dz = dx + idy; \quad d\bar{z} = dx - idy \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}); \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

Vì $u \in C^1(\Omega)$ ta suy ra

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \Rightarrow du = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

$$\text{Đặt} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad \bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$$\text{Khi đó} \quad du = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \partial u + \bar{\partial} u$$

Định nghĩa 1.1.1.

Giả thiết Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}$, u là một hàm biến phức xác định trong Ω và $u \in C^1(\Omega)$. Nếu $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \forall z \in \Omega$ thì ta nói hàm u chỉnh hình trong Ω . Kí hiệu tập các hàm chỉnh hình trong Ω là $A(\Omega)$

Cho K là tập compact trong Ω , ta nói hàm u chỉnh hình trên K nếu tồn tại một tập mở U chứa K sao cho $u \in A(U)$

1.1.2 Công thức tích phân Cauchy và lời giải bài toán $\bar{\partial}$

Giả thiết Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}$ có biên $\partial\Omega$ trơn hay trơn từng khúc. Khi đó, nếu hàm $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ ta có công thức Stokes

$$\int_{\partial\Omega} u dz = \iint_{\Omega} du \wedge dz$$

Với $du = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ ta có:

$$\int_{\partial\Omega} u dz = \iint_{\Omega} du \wedge dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \quad (1.1)$$

Định lý 1.1.2. (Công thức tích phân Cauchy)

Giả thiết Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}$ có biên $\partial\Omega$ trơn hay trơn từng khúc. Khi đó, nếu hàm $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ta có

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz + \iint_{\Omega} \frac{\partial u / \partial \bar{z}}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z} \right\}, \quad \zeta \in \Omega \quad (1.2)$$

Chứng minh

Cho $\zeta \in \Omega$ tùy ý, đặt $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : |z - \zeta| \geq \varepsilon\}$ với ε là một số dương đủ bé sao cho $0 < \varepsilon < d(\zeta; C\Omega)$ trong đó $d(\zeta; C\Omega)$ là khoảng cách từ ζ đến phần bù của tập Ω trong $\mathbb{C}$. Khi đó tập biên $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$ trong đó S_ε là mặt cầu tâm ζ bán kính bằng ε

Hàm $u \in C^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow \frac{u(z)}{z - \zeta} \in C^1(\bar{\Omega})$ và hơn nữa $\frac{1}{z - \zeta} \in A(\Omega_\varepsilon)$ nên ta có:

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u(z)}{z - \zeta} \right) d\bar{z} \wedge dz = \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\bar{z} \wedge dz \quad (1.3)$$

Áp dụng (1.1) ta có

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u(z)}{z - \zeta} \right) d\bar{z} \wedge dz &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz - \int_{S_\varepsilon} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz - \int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$ ta được

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u(z)}{z - \zeta} \right) d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z - \zeta} dz - 2\pi i u(\zeta) \quad (1.4)$$

Kết hợp (1.3), (1.4) ta có điều phải chứng minh.

Định lý 1.1.3. Giả thiết Ω là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{C}$ có biên $\partial\Omega$ trơn hay trơn từng khúc. Giả thiết f một hàm phức xác định trong Ω và hàm $f \in C_0^k(\Omega)$ ($k \geq 1$). Khi đó

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}, \quad \zeta \in \Omega \quad (1.5)$$

Xác định một hàm chỉnh hình bên ngoài giá của f , hơn nữa $u \in C^k(\Omega)$ và

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f \text{ trên } \Omega$$

Chứng minh

Gọi $K = \text{supp } f$, hiển nhiên $\frac{1}{z - \zeta}$ chỉnh hình với mọi $z \in K, \zeta \in CK$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z - \zeta} \right) = 0 \quad \forall z \in K, \zeta \in CK \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = 0 \quad \forall \zeta \in CK$$

Vậy $u(\zeta)$ là một hàm chỉnh hình bên ngoài giá của f

Trường hợp $\Omega = \mathbb{C}$, từ (1.5) bằng phép đổi biến $z := z - \zeta$ ta có

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f(z - \zeta)}{z} dz \wedge d\bar{z}$$

Suy ra, nếu $f \in C_0^k(\Omega)$ thì $u \in C^k(\Omega)$ và

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\partial f(z - \zeta)/\partial \bar{\zeta}}{z} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\partial f(z)/\partial \bar{z}}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}$$

Áp dụng (1.2) với hàm u thay bằng hàm f ta có $\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = f(\zeta), \zeta \in \Omega$

Trường hợp Ω bất kỳ, với mỗi $z_0 \in \Omega$ ta lấy một lân cận mở V của z_0 trong Ω và chọn hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\begin{cases} \varphi|_{\bar{V}} \equiv 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 1, \text{ trên } \Omega \setminus U \text{ với } U \text{ là một tập mở trong } \Omega \text{ chứa } \bar{V} \\ \varphi|_{\Omega \setminus U} \equiv 0 \end{cases}$$

Đặt $f_1 = f\varphi; f_2 = f(1 - \varphi)$ thì $f_1, f_2 \in C_0^k(\Omega)$

Đặt $u_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f_1(z-\zeta)}{z} dz \wedge d\bar{z}$; $u_2(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{f_2(z-\zeta)}{z} dz \wedge d\bar{z}$

Thì $u(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta)$. Và trong V : $f_1 \equiv f$, $f_2 \equiv 0$ nên suy ra

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = f_1(\zeta) = f(\zeta) \text{ trong } V$$

Định nghĩa 1.1.4. (Bao lồi chỉnh hình)

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}$, K là một tập con compact trong Ω .

Bao lồi chỉnh hình của K trong Ω kí hiệu $\hat{K}$ và được xác định bởi

$$\hat{K} = \left\{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in A(\Omega) \right\}$$

Tập K compact được gọi là compact lồi chỉnh hình nếu $\hat{K} = K$

Tập Ω được gọi là lồi chỉnh hình nếu $\hat{K} = K$ với mọi tập K compact trong Ω

Mệnh đề 1.1.5. $\hat{K}$ là hợp của K với các thành phần compact tương đối của $\Omega \setminus K$ trong Ω

Định lý 1.1.6. Với mọi hàm $f \in C^\infty(\Omega)$ thì phương trình $\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} = f$ có nghiệm

$$u \in C^\infty(\Omega)$$

Chứng minh

Trường hợp $f \in C_0^\infty(\Omega)$ theo định lý 1.1.3 ta có điều phải chứng minh

Trường hợp hàm f không có giá compact trong Ω . Chọn một dãy tăng các tập con compact véc cạn trong Ω : $K_j \subset \Omega$, $K_j \subset K_{j+1} \forall j$, $\bigcup_1^\infty K_j = \Omega$ và lồi

chỉnh hình trong Ω tức là $\hat{K}_j = K_j \forall j$ sao cho mọi tập con compact của Ω đều được chứa trong một tập K_j nào đó.

Với mỗi K_j , tồn tại $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ sao cho $\psi_j \equiv 1$ trong K_j .

Đặt: $\varphi_1 = \psi_1$; $\varphi_j = \psi_j - \psi_{j-1} \forall j \geq 2$, khi đó $\varphi_j \equiv 0$ trong $K_{j-1} \forall j \geq 2$ và

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi_j = 1 \text{ trong } \Omega.$$

Áp dụng định lý 1.1.3 cho hàm $\varphi_j f$ thì phương trình $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi_j f$ có một nghiệm $u_j \in C^\infty(\mathbb{C})$ và vì $\varphi_j \equiv 0$ trong K_{j-1} nên u_j là một hàm chỉnh hình trong $K_{j-1} \quad \forall j \geq 2$.

Theo định lý Runge, với mỗi u_j là một hàm chỉnh hình trong $K_{j-1} \quad \forall j \geq 2$ ta có thể tìm được một hàm v_j chỉnh hình trong Ω sao cho u_j được xấp xỉ đều trên K_{j-1} bởi v_j , do vậy tồn tại $v_j \in A(\Omega)$ sao cho $|u_j - v_j| < 2^{-j}$ trong K_{j-1} .

Lập tổng $u = u_1 + \sum_{j=2}^{\infty} (u_j - v_j)$, tổng này hội tụ đều trên mọi tập compact trong Ω . Kể từ số hạng thứ $l+1$ đến ∞ là những hàm chỉnh hình trong lân cận của K_l và tổng này hội tụ đều đến một hàm chỉnh hình trong phần trong của K_l . Do đó u là một hàm khả vi vô hạn trong Ω và có thể lấy đạo hàm từng số hạng qua tổng.

$$\text{Suy ra, } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial(u_j - v_j)}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j f = f \quad (\text{đpcm})$$

1.2 Đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$

1.2.1 Không gian $L^p(\Omega)$ và $L^p(\Omega; \varphi)$

Định nghĩa 1.2.1. Giả thiết Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. Ký hiệu $L^p(\Omega)$ là lớp các hàm đo được f trên Ω sao cho $\int_{\Omega} |f|^p d\lambda < \infty$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue

$$\text{Trong } L^p(\Omega), \text{ đặt } \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \text{ với } f \in L^p(\Omega) \quad (1.6)$$

Định nghĩa 1.2.2. Giả thiết Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, φ là một hàm liên tục trong Ω , Ký hiệu, $L^p(\Omega, \varphi)$ là lớp các hàm đo được f trên Ω sao cho $\int_{\Omega} |f|^p e^{-\varphi} d\lambda < \infty$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue.

$L^p(\Omega, \text{loc})$ là lớp các hàm đo được f trên Ω sao cho $\int_K |f|^p e^{-\varphi} d\lambda < \infty$

với mọi tập K compact trong Ω , trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue.

$$\text{Trong } L^p(\Omega, \varphi), \text{ đặt } \|f\|_{p, \varphi} = \left(\int_{\Omega} |f|^p e^{-\varphi} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \text{ với } f \in L^p(\Omega, \varphi) \quad (1.7)$$

Mệnh đề 1.2.3.

1. $L^p(\Omega)$ và $L^p(\Omega; \varphi)$ là các không gian Banach với chuẩn tương ứng được xác định ở (1.6), (1.7)

$$2. L^p(\Omega, \text{loc}) = \bigcup_{\varphi \in C^0(\Omega)} L^p(\Omega, \varphi) = \bigcup_{\varphi \in C^\infty(\Omega)} L^p(\Omega, \varphi)$$

1.2.2 Hàm điều hòa và điều hòa dưới

Định nghĩa 1.2.4. (hàm điều hòa)

Giả thiết Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, hàm u xác định trong Ω , nhận giá trị thực và thuộc lớp $C^2(\Omega)$ được gọi là hàm điều hòa nếu $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ trong Ω

Định nghĩa 1.2.5. (hàm điều hòa dưới)

Một hàm u xác định trên một tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}$ và nhận giá trị trong $[-\infty; \infty)$ được gọi là điều hòa dưới nếu thỏa mãn:

1. u là liên tục trên, tức là tập $\{z \in \Omega : u(z) < s\}$ là tập mở với mọi $s \in \mathbb{R}$
2. Với mọi tập compact $K \subset \Omega$ và mọi hàm liên tục h trên K và điều hòa trong phần trong của K và $h \geq u$ trên biên của K thì $h \geq u$ trong K

Tập hợp các hàm điều hòa dưới trong Ω kí hiệu $SH(\Omega)$

Chú ý. Điều kiện (2) trong định nghĩa 1.2.5 tương đương với điều kiện (2') sau:

(2'). Với mọi $z \in \Omega$, tồn tại $R > 0$ sao cho $B(z, R) \subset \Omega$ và hàm u thỏa mãn

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt; 0 \leq r < R$$

Mệnh đề 1.2.6. (Xấp xỉ hàm điều hòa dưới bằng một dãy các hàm điều hòa dưới tron)

Cho $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi(z) = 0$ khi $|z| > 1$ và giả thiết $\int \varphi d\lambda = 1$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue trong $\mathbb{C}$. Với mỗi $\varepsilon > 0$, đặt $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z; \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Nếu u không đồng nhất bằng $-\infty$ và u là hàm điều hòa dưới trong Ω thì khi đó:

$$u_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon\zeta) \varphi(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

Là hàm điều hòa dưới trên Ω_ε và $u_\varepsilon \searrow u$ khi $\varepsilon \searrow 0$

1.2.3 Hàm Green

Định nghĩa 1.2.7. (hàm có cực logarit tại một điểm)

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}$. Với mỗi $a \in \Omega, \exists r > 0$ sao cho $B(a; r) \subset \Omega$. Giả thiết $u \in SH(B(a; r))$ ta nói u có cực logarit tại a nếu

$$u(z) - \log|z - a| < O(1) \text{ khi } z \rightarrow a \text{ tức là}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} [u(z) - \log|z - a|] < \infty$$

Định nghĩa 1.2.8. (hàm Green)

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}$ và $a \in \Omega$, đặt

$$G(z; a) = \sup \{u(z) : u \in SH(\Omega), u < 0, u(z) - \log|z - a| < O(1) \text{ khi } z \rightarrow a\}$$

Khi đó, hàm $G(z, a)$ được gọi là hàm Green trên Ω có cực tại a

Mệnh đề 1.2.9.

1. $\Delta G = -\delta_a$ với G là hàm Green có cực tại a , δ_a là hàm δ -Dirac
2. $G(z, a)$ là hàm điều hòa dưới, nhận giá trị âm và có cực logarit tại a

1.2.4. Các toán tử cơ bản

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, $\varphi \in C^2(\Omega)$ và là hàm điều hòa dưới trên Ω . Trong không gian $L^2(\Omega, \varphi)$, toán tử liên hợp của toán tử $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ với tích vô hướng trong $L^2(\Omega, \varphi)$ được định nghĩa:

$$\theta\alpha = -e^\varphi \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{-\varphi}\alpha) \quad (1.8)$$

Tính chất của $\theta\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_{\Omega} u \overline{\theta\alpha} e^{-\varphi} d\lambda &= - \int_{\Omega} u e^\varphi \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{-\varphi}\alpha)} e^{-\varphi} d\lambda \\ &= - \int_{\Omega} u e^\varphi \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{-\varphi} \overline{\alpha}) e^{-\varphi} d\lambda = - \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{-\varphi} \overline{\alpha}) d\lambda \\ &= \int_{\Omega} \overline{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} e^{-\varphi} d\lambda \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy, } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \Leftrightarrow \int_{\Omega} u \overline{\theta\alpha} e^{-\varphi} d\lambda = \int_{\Omega} \overline{\alpha} f e^{-\varphi} d\lambda \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.9)$$

Ta định nghĩa toán tử Laplacian phức trong $L^2(\Omega; \varphi)$:

$$\square\alpha = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\theta\alpha) \quad (1.10)$$

Khi đó, với $\alpha \in C^2(\Omega)$ thì $\square\alpha$ có một số tính chất:

Tính chất 1.

$$\text{Kí hiệu } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \text{ ta có: } \square\alpha = \Delta\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} - \alpha \cdot \Delta\varphi \quad (1.11)$$

Chứng minh

$$\begin{aligned}
\Box\alpha &= -\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\theta\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[-e^\varphi\frac{\partial}{\partial z}(e^{-\varphi}\alpha)\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[e^\varphi\cdot e^{-\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\alpha - e^\varphi\cdot e^{-\varphi}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right] \\
&= \Delta\alpha - \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\alpha\right) = \Delta\alpha - \alpha\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}
\end{aligned}$$

Tính chất 2.

$$-\theta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) = \Box\alpha + \Delta\varphi\cdot\alpha \quad (1.12)$$

Chứng minh

Theo (1.11) ta suy ra

$$\Box\alpha + \Delta\varphi\cdot\alpha = \Delta\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial z\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}$$

$$\text{Mặt khác } -\theta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) = e^\varphi\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\varphi}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right) = \Delta\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bổ đề 1.2.10.

$$\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) = 2\operatorname{Re}(\Box\alpha\cdot\bar{\alpha})\cdot e^{-\varphi} + |\theta\alpha|^2 e^{-\varphi} + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}\right|^2 e^{-\varphi} + \Delta\varphi\cdot|\alpha|^2 e^{-\varphi} \quad (1.13)$$

Chứng minh

Với $\alpha, \beta \in C_0^2(\Omega)$ thì

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\alpha\cdot\bar{\beta}e^{-\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial\bar{z}}((\alpha e^{-\varphi})\cdot\bar{\beta}) = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\alpha e^{-\varphi})\cdot\bar{\beta} + \alpha e^{-\varphi}\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{z}} \\
&= -\left[-e^\varphi\frac{\partial}{\partial z}(\alpha e^{-\varphi})\right]e^{-\varphi}\cdot\bar{\beta} + \alpha e^{-\varphi}\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{z}} \\
&= -\theta(\alpha)\cdot\bar{\beta}e^{-\varphi} + \alpha\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{z}}e^{-\varphi} \quad (*)
\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\alpha\cdot\bar{\beta}e^{-\varphi}) = -\overline{\theta(\beta)}\cdot\alpha e^{-\varphi} + \bar{\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}e^{-\varphi} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra

$$\begin{aligned}
\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\alpha \bar{\alpha} e^{-\varphi}) \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\overline{\theta(\alpha)} \alpha e^{-\varphi} + \bar{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} e^{-\varphi} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\theta(\alpha)} \alpha e^{-\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} e^{-\varphi} \right) \\
&= \theta(\alpha) \overline{\theta(\alpha)} e^{-\varphi} - \alpha \frac{\partial(\overline{\theta \alpha})}{\partial \bar{z}} e^{-\varphi} - \theta \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right) \bar{\alpha} e^{-\varphi} + \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} e^{-\varphi}
\end{aligned}$$

Áp dụng (1.12) ta có

$$\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) = |\theta(\alpha)|^2 e^{-\varphi} - \alpha \frac{\partial(\overline{\theta \alpha})}{\partial \bar{z}} e^{-\varphi} + [\square \alpha + \Delta \varphi \cdot \alpha] \bar{\alpha} e^{-\varphi} + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right|^2 e^{-\varphi}$$

Áp dụng (1.10) ta có

$$\begin{aligned}
\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) &= |\theta(\alpha)|^2 e^{-\varphi} - \alpha \square \bar{\alpha} e^{-\varphi} + \square \alpha \bar{\alpha} e^{-\varphi} + \Delta \varphi \cdot \alpha \bar{\alpha} e^{-\varphi} + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right|^2 e^{-\varphi} \\
&= 2 \operatorname{Re}(\square \alpha \bar{\alpha}) e^{-\varphi} + |\theta \alpha|^2 e^{-\varphi} + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right|^2 e^{-\varphi} + \Delta \varphi \cdot |\alpha|^2 e^{-\varphi}
\end{aligned}$$

(đpcm)

Hệ quả 1.2.11.

Nếu $\square \alpha = 0$ thì

1. Với $u = |\alpha|^2 e^{-\varphi}$ thì ta có $u \Delta \varphi \leq \Delta u$

2. Với $v = |\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}}$ thì ta có $\frac{1}{2} v \Delta \varphi \leq \Delta v$

Chứng minh

1. Với $u = |\alpha|^2 e^{-\varphi}$ và $\square \alpha = 0$. Áp dụng (1.13) ta có

$$\Delta(u) = |\theta \alpha|^2 e^{-\varphi} + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \right|^2 e^{-\varphi} + \Delta \varphi \cdot u$$

Suy ra $u \Delta \varphi \leq \Delta u$

2. Với $v = |\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}}$ ta có

$$\Delta v = \Delta u^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(u^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \Delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \Delta u - \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \left(\Delta u - \frac{1}{2} u^{-1} \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right)
\end{aligned}$$

Suy ra $\Delta v \geq \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \Delta u \geq \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} \Delta \varphi = \frac{1}{2} v \Delta \varphi$ (đpcm)

Hệ quả 1.2.12.

Với $\varepsilon > 0$, đặt $v_\varepsilon = \left(|\alpha|^2 e^{-\varphi} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}$ thì $\Delta v_\varepsilon \geq -|\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}}$

Chứng minh (làm tương tự hệ quả 1.2.11)

Mệnh đề 1.2.13. Nếu α là nghiệm của bài toán $\square \alpha = f$ (1.14) trong miền Ω và $\alpha = 0$ trên biên $\partial \Omega$ thì $u = -\theta \alpha$ là nghiệm trong $L^2(\Omega, \varphi)$ của bài toán $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$

Chứng minh

Theo giả thiết α là nghiệm của bài toán $\square \alpha = f$ nên ta có $\square \alpha = f$ (*)

Từ (1.10) thay vào (*) ta có: $-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\theta \alpha) = f \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(-\theta \alpha) = f$

Thay $u = -\theta \alpha$ ta được $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u) = f$

Vậy $u = -\theta \alpha$ là nghiệm trong $L^2(\Omega, \varphi)$ của bài toán $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$

Định lý 1.2.14. Bài toán (1.14) có nghiệm theo bài toán $\bar{\partial}$ – Neumann là:

$$\alpha(z) = \int_{\Omega} f(\zeta) \overline{N(z, \zeta)} e^{-\varphi(\zeta)} d\lambda(\zeta) \quad (1.15)$$

Trong đó $N(z; \zeta)$ được gọi là nhân Neumann của bài toán $\bar{\partial}$ – Neumann với các tính chất:

1. $\alpha(z) = \int_{\Omega} \square \alpha(\zeta) N(z; \zeta) e^{-\varphi(\zeta)} d\lambda(\zeta)$

2. $N(z; \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in \partial \Omega$ và $\square_{\zeta} N(z; \zeta) = e^{\varphi(z)} \delta_{(z)}$ ($\delta_{(z)}$ là hàm δ – Dirac)

3. $\overline{N(z; \zeta)} = 0 \quad \forall z \in \partial\Omega$ và $\square_{\zeta} \overline{N(z; \zeta)} = e^{\varphi(\zeta)} \delta_{(\zeta)}$ ($\delta_{(\zeta)}$ là hàm δ -Dirac)

4. $N(z; \zeta) = \overline{N(\zeta; z)}$ trong $\Omega \times \Omega$

1.2.5 Đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$

Bài toán: Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, f là hàm đo được trong Ω , φ là một hàm điều hòa dưới trong Ω . Hãy đánh giá nghiệm của bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \quad \text{trong } L^p(\Omega, \varphi) \quad (1.16)$$

Định lý 1.2.15. Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, f là hàm đo được trong Ω , φ là một hàm điều hòa dưới trong Ω , giả thiết $1 \leq p < 2$; $\text{diam}\Omega \leq 1$. Khi đó (1.16) có một nghiệm u thỏa mãn:

$$\left(\int_{\Omega} (|u| e^{-\varphi})^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi} d\lambda \quad (1.17)$$

Trong đó C_p là một hằng số dương chỉ phụ thuộc p

Để chứng minh định lý này ta cần hai bổ đề sau, với giả thiết $\varphi \in C^2(\Omega)$

Bổ đề 1.2.16. Giả thiết $1 \leq q \leq \infty$ và $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\sup_{\Omega} |\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}} \leq C_q \left(\int_{\Omega} \left(|\theta \alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}} \right)^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.18)$$

Khi đó, với mỗi f đo được trong Ω thì phương trình (1.16) có một nghiệm u thỏa mãn

$$\left\| u e^{-\frac{\varphi}{2}} \right\|_p \leq C_q \int_{\Omega} |f| e^{-\frac{\varphi}{2}} d\lambda \quad (1.19)$$

Với điều kiện về phải của (1.18) hữu hạn, ở đây p thỏa mãn: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Chứng minh

* Trường hợp $q < \infty$

Gọi F là không gian con của $L^q(\Omega)$ gồm các hàm v có dạng

$$v = (\theta\alpha)e^{-\frac{\varphi}{2}}; \alpha \in C_0^\infty(\Omega)$$

Ta định nghĩa một phiếm hàm phản tuyến tính trên F bởi

$$T((\theta\alpha)e^{-\varphi/2}) = \int_{\Omega} f \bar{\alpha} e^{-\varphi} d\lambda$$

Với điều kiện (1.18) thì phiếm hàm này có chuẩn nhỏ hơn

$$A := C_q \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi/2} d\lambda$$

Theo định lý Hahn-Banach, chúng ta có thể mở rộng phiếm hàm này thành một phiếm hàm trong $L^q(\Omega)$ bảo toàn chuẩn. Do đó, có một hàm $g \in L^p(\Omega)$ sao cho

$$T(v) = \int_{\Omega} g \bar{v} d\lambda \text{ với mọi } v \in L^q(\Omega)$$

$$\text{Và } \left(\int_{\Omega} |g|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq A$$

Lấy $g = ue^{-\varphi/2}$, và chọn trường hợp $v = (\theta\alpha)e^{-\frac{\varphi}{2}}; \alpha \in C_0^\infty(\Omega)$, khi đó

$$T(v) = \int_{\Omega} g \bar{v} d\lambda \Leftrightarrow \int_{\Omega} f \bar{\alpha} e^{-\varphi} d\lambda = \int_{\Omega} u \bar{\theta\alpha} e^{-\varphi} d\lambda$$

Theo tính chất của toán tử θ (1.9) thì $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ hay u là một nghiệm của (1.16) và

$$\|g\|_p \leq A \Leftrightarrow \|ue^{-\varphi/2}\|_p \leq C_q \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi/2} d\lambda$$

Trường hợp $q = \infty$, ta thay không gian $L^\infty(\Omega)$ bởi không gian $C_0(\Omega)$. Bằng cách chứng minh tương tự khi $q < \infty$ ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 1.2.17. Giả thiết $\text{diam}\Omega \leq 1$ và $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$. Khi đó với mọi $2 < q \leq \infty$ có một hằng số dương C_q chỉ phụ thuộc vào q thỏa mãn

$$\sup_{\Omega} |\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}} \leq C_q \left(\int_{\Omega} \left(|\theta\alpha| e^{-\frac{\varphi}{2}} \right)^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.20)$$

Chứng minh

Với φ là một hàm điều hòa dưới thì $\Delta\varphi \geq 0$

Theo bổ đề 1.2.10 với $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ thì:

$$\begin{aligned} \Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) &= 2 \operatorname{Re}(\square\alpha.\bar{\alpha}).e^{-\varphi} + |\theta\alpha|^2 e^{-\varphi} + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right|^2 e^{-\varphi} + \Delta\varphi.|\alpha|^2 e^{-\varphi} \\ \Rightarrow \Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi}) &\geq 2 \operatorname{Re}(\square\alpha.\bar{\alpha}).e^{-\varphi} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Với giả thiết $\operatorname{diam}\Omega \leq 1$, xét hàm $E = E(a) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{|z-a|}$; $a \in \Omega$, tính toán

trực tiếp theo đạo hàm suy rộng ta được: $\Delta E = -\delta_{(a)}$ và với $z \in \Omega$ thì $E \geq 0$

Nhân hai vế của (1.21) với $E \geq 0$ sau đó lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_{\Omega} E.\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi})d\lambda \geq 2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} E.(\square\alpha.\bar{\alpha}).e^{-\varphi}d\lambda$$

$$\text{Vì } \alpha \in C_0^\infty(\Omega) \text{ nên } \int_{\Omega} E.\Delta(|\alpha|^2 e^{-\varphi})d\lambda = -|\alpha|^2 e^{-\varphi(a)} \quad (1.22)$$

Tích phân từng phần vế phải ta được

$$2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} E.(\square\alpha.\bar{\alpha}).e^{-\varphi}d\lambda = -2 \int_{\Omega} E.|\theta\alpha|^2.e^{-\varphi}d\lambda + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \frac{1}{z-a}(\theta\alpha)\bar{\alpha}e^{-\varphi}d\lambda \quad (1.23)$$

Đặt $M = \sup_{\Omega} |\alpha| e^{-\varphi/2}$; $N_q = \|(\theta\alpha)e^{-\varphi/2}\|_q$ với $2 < q \leq \infty$

Kết hợp (1.21), (1.22), (1.23) ta được

$$M^2 \leq 2N_q^2 A + BN_q M \quad (1.24)$$

$$\text{Ở đây } A = \sup_{a \in \Omega} \left(\int_{\Omega} (E(a))^r d\lambda \right)^{\frac{1}{r}} \text{ với } \frac{1}{r} + \frac{2}{q} = 1$$

$$B = \sup_{a \in \Omega} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{|z-a|^p} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \text{ với } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Khi đó A, B là hữu hạn và thậm chí độc lập với Ω với điều kiện $\operatorname{diam}\Omega \leq 1$

Từ (1.24) ta suy ra $M \leq C_q N_q$ (*đpcm*)

Chứng minh định lý 1.2.15.

Với $2 < q \leq \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, khi đó $1 \leq p < 2$. Với $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$, φ là một hàm

trơn trên Ω thì phương trình $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ theo các bổ đề 1.2.16 và 1.2.17 và bằng

$$\text{cách thay } \varphi := \frac{\varphi}{2} \text{ có nghiệm } u \text{ thỏa mãn } \|ue^{-\varphi}\|_p \leq C_q \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi} d\lambda$$

Trường hợp φ là một hàm điều hòa dưới, theo mệnh đề 1.2.6 tồn tại dãy các hàm điều hòa dưới trơn φ_ε xác định như sau : $\varphi_\varepsilon(z) = \int \varphi(z - \varepsilon\zeta) \psi(\zeta) d\lambda(\zeta)$

Trong đó: $0 \leq \psi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, $\psi(z) = 0$ khi $|z| > 1$ và giả thiết $\int \psi d\lambda = 1$ trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue trong $\mathbb{C}$. Với mỗi $\varepsilon > 0$, đặt $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega : d(z; C\Omega) > \varepsilon\}$.

Thì φ_ε là hàm điều hòa dưới trên Ω_ε và $\varphi_\varepsilon \searrow \varphi$ khi $\varepsilon \searrow 0$

$$\text{Khi đó } \|ue^{-\varphi_\varepsilon}\|_p \leq C_p \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi_\varepsilon} d\lambda$$

$$\text{Cho } \varepsilon \searrow 0 \text{ ta được } \|ue^{-\varphi}\|_p \leq C_p \int_{\Omega} |f| e^{-\varphi} d\lambda$$

Từ hai kết quả trên ta suy ra định lý 1.2.15 được chứng minh

Nhận xét: định lý 1.2.15 cho ta một đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ trong $L^p(\Omega, \varphi)$ với $1 \leq p < 2$ bằng một đánh giá của hàm f ở trong $L^1(\Omega, \varphi)$

Bằng độ đo Dirac, Bo Berndtsson đã chỉ ra là đánh giá trong định lý 1.2.15 là sai trong $L^2(\Omega, \varphi)$. Do vậy trong trường hợp $L^2(\Omega, \varphi)$ thì Bo Berndtsson đã đưa ra một đánh giá khác như sau

Định lý 1.2.18. Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}$, f là hàm đo được trong Ω , φ là một hàm điều hòa dưới trong Ω và giả thiết $\text{diam}\Omega < \infty$. Khi đó (1.16) có một nghiệm u thỏa mãn:

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-2\varphi} d\lambda \leq - \iint_{\Omega \times \Omega} G(\zeta; z) |f(\zeta)| |f(z)| e^{-\varphi(\zeta) - \varphi(z)} d\lambda(\zeta) d\lambda(z) \quad (1.25)$$

Trong đó, $G(\zeta; z)$ là hàm Green đối với miền Ω có cực tại $z \in \Omega$.

Để chứng minh định lý ta cần hai bổ đề sau

Bổ đề 1.2.19. Với u là một nghiệm của bài toán 1.2.16 và $N(z; \zeta)$ là nhân Neumann của bài toán $\bar{\partial}$ – Neumann thì ta có :

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \iint_{\Omega \times \Omega} |N(\zeta; z)| |f(\zeta)| |f(z)| e^{-\varphi(\zeta) - \varphi(z)} d\lambda(\zeta) d\lambda(z) \quad (1.26)$$

Chứng minh

Áp dụng mệnh đề 1.2.13 và định lý 1.2.14 ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda &= \int_{\Omega} (\theta\alpha) \cdot (\overline{\theta\alpha}) e^{-\varphi} d\lambda = - \int_{\Omega} e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z} (e^{-\varphi} \varepsilon) \cdot (\overline{\theta\alpha}) e^{-\varphi} d\lambda \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} (e^{-\varphi} \alpha) \cdot (\overline{\theta\alpha}) d\lambda = \int_{\Omega} e^{-\varphi} \alpha \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\theta\alpha}) d\lambda \\ &= - \int_{\Omega} \square \alpha \cdot \alpha \cdot e^{-\varphi} d\lambda \end{aligned}$$

Thay (1.14) và (1.15) vào ta được

$$= - \iint_{\Omega \times \Omega} \overline{f(\zeta)} f(z) \overline{N(z; \zeta)} e^{-\varphi(z) - \varphi(\zeta)} d\lambda(z) d\lambda(\zeta)$$

$$\text{Suy ra } \int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \iint_{\Omega \times \Omega} |N(\zeta; z)| |f(\zeta)| |f(z)| e^{-\varphi(\zeta) - \varphi(z)} d\lambda(\zeta) d\lambda(z) \quad (\text{đpcm})$$

Bổ đề 1.2.20. Cho $G(\zeta; z)$ là một hàm Green trong Ω với cực tại z .

$$\text{Khi đó ta có : } |N(z; \zeta)| e^{-\frac{1}{2}[\varphi(z) + \varphi(\zeta)]} \leq -G(z; \zeta) \quad (1.27)$$

Chứng minh

Với $\alpha \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ và $\varepsilon > 0$, theo hệ quả 1.2.12 thì

$$\Delta \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \geq -|\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} \quad (1.28)$$

Nhân hai vế của (1.28) với $-G(\zeta; a) > 0$, $a \in \Omega$ ta được

$$-G(\zeta; a) \Delta \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \geq G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} \quad (1.29)$$

Lấy tích phân hai vế theo biến ζ của (1.29) với giả thiết $\alpha|_{\partial\Omega} = 0$ ta có

$$\int_{\Omega} -G(\zeta; a) \Delta \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(\zeta) \geq \int_{\Omega} G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta) \quad (1.30)$$

Tích phân từng phần về trái của (1.30) ta được

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} -G(\zeta; a) \Delta \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\Omega} G(\zeta; a) \frac{\partial^2}{\partial \zeta \cdot \partial \bar{\zeta}} \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[G(\zeta; a) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \right] d\lambda(\zeta) \\
&= \int_{\Omega} \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \Delta_{\zeta} [G(\zeta; a)] d\lambda(\zeta)
\end{aligned}$$

Theo mệnh đề 1.2.9 ta có

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \delta_{(a)} d\lambda(\zeta) \\
&= - \left\langle \delta_{(a)}; \left(|\alpha(\zeta)|^2 e^{-\varphi(\zeta)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \right\rangle \\
&= - \left(|\alpha(a)|^2 e^{-\varphi(a)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Thay vào (1.30) ta được

$$\begin{aligned}
& - \left(|\alpha(a)|^2 e^{-\varphi(a)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \geq \int_{\Omega} G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta) \\
& \Leftrightarrow \left(|\alpha(a)|^2 e^{-\varphi(a)} + \varepsilon \right)^{\frac{1}{2}} \leq - \int_{\Omega} G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta)
\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$ ta được

$$|\alpha(a)| e^{-\varphi(a)/2} \leq - \int_{\Omega} G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta) \quad (1.31)$$

Chọn $\alpha(\zeta) = N(z; \zeta)$ theo định lý 1.2.14 thì $\square \alpha = \square N(z; \zeta) = e^{\varphi(z)} \delta(z)$

Thay vào vế phải và biến đổi ta có

$$\int_{\Omega} G(\zeta; a) |\square \alpha(\zeta)| \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta) = \int_{\Omega} G(\zeta; a) e^{\varphi(z)} \delta(z) \cdot e^{-\frac{\varphi(\zeta)}{2}} d\lambda(\zeta)$$

$$= e^{\varphi(z)} \left\langle G(\zeta; a) e^{-\varphi(\zeta)/2}; \delta(z) \right\rangle = e^{\varphi(z)} G(z; a) e^{-\varphi(z)/2} \quad (1.32)$$

Từ (1.31) và (1.32) và thay $a = \zeta$, $\alpha(\zeta) = N(z; \zeta)$ ta có

$$\begin{aligned} |N(z; \zeta)| e^{-\varphi(\zeta)/2} &\leq -e^{\varphi(z)} G(z; \zeta) e^{-\varphi(z)/2} \\ \Leftrightarrow |N(z; \zeta)| e^{-\frac{1}{2}[\varphi(z) + \varphi(\zeta)]} &\leq -G(z; \zeta) \end{aligned} \quad (\text{đpcm})$$

Chứng minh định lý 1.2.18.

Áp dụng liên tiếp hai bổ đề 1.2.19 và 1.2.20 và thay $\varphi := \varphi / 2$ ta có

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-2\varphi} d\lambda \leq \iint_{\Omega \times \Omega} |N(\zeta; z)| |f(\zeta)| |f(z)| e^{-2\varphi(\zeta) - 2\varphi(z)} d\lambda(\zeta) d\lambda(z) \quad (\text{bổ đề 2.19})$$

$$\leq - \iint_{\Omega \times \Omega} G(\zeta; z) |f(\zeta)| |f(z)| e^{-\varphi(\zeta) - \varphi(z)} d\lambda(\zeta) d\lambda(z) \quad (\text{bổ đề 2.20})$$

(đpcm)

Chương 2. BÀI TOÁN $\bar{\partial}$ TRONG $\mathbb{C}^n$ VÀ ĐÁNH GIÁ NGHIỆM

2.1 Bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}^n$

2.1.1 Hàm chỉnh hình nhiều biến phức

Giả thiết Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Cho u là hàm biến phức xác định trong Ω . $z \in \Omega$; $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$; $z_j = x_j + iy_j$; $x_j, y_j \in \mathbb{R} \forall j = \overline{1; n}$; $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ và $u \in C^1(\Omega)$ theo nghĩa thực. Khi đó

$$du = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

$$\text{Với } \frac{\partial u}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right); \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \quad \forall j = \overline{1; n}$$

$$\text{Đặt } \partial u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j; \quad \bar{\partial} u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

$$\text{Khi đó } du = \partial u + \bar{\partial} u$$

Định nghĩa 2.1.1. Giả thiết Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, u là hàm biến phức xác định trong Ω và $u \in C^1(\Omega)$. Nếu $\bar{\partial} u = 0$ trên Ω thì ta nói hàm u chỉnh hình trong Ω . Kí hiệu tập các hàm chỉnh hình trong Ω là $A(\Omega)$

Cho K là tập compact trong Ω , ta nói hàm u chỉnh hình trong K nếu tồn tại một lân cận mở U của K trong Ω sao cho $u \in A(U)$

2.1.2 Công thức tích phân Cauchy trên đa đĩa trong $\mathbb{C}^n$

Định nghĩa 2.1.2. (Dạng vi phân $C_{p,q}^k(\Omega)$, $p, q, k \in \mathbb{N}; 0 \leq p, q \leq n$)

Dạng $\omega \in C_{p,q}^k(\Omega)$ nếu ω là dạng vi phân song bậc có dạng

$$\omega = \sum' f_{\mathbf{I}} dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad (*)$$

Trong đó: $\mathbf{I} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$; $\mathbf{J} = (j_1, j_2, \dots, j_q)$

$\sum'$ là tổng lấy theo chỉ số tăng

$$f_{\mathbf{I}} \in C^k(\Omega)$$

Đôi khi ta kí hiệu cho $\omega \in C_{p,q}^k(\Omega)$ là: $\omega = \sum' g_{\mathbf{I}} dz_{\mathbf{I}} \wedge d\bar{z}_{\mathbf{J}}$

Dạng vi phân xác định theo (*) còn được gọi tắt là dạng (p, q)

Định nghĩa 2.1.3. (Đa đĩa)

1. Một tập $D \subset \mathbb{C}^n$ có dạng

$$D = \prod_{j=1}^n D_j = \left\{ z = (z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n) : z_j \in D_j \quad \forall j = \overline{1; n} \right\}$$

trong đó: D_j là các hình tròn trong $\mathbb{C}$ “ D_j được gọi là đĩa trong $\mathbb{C}$ ” thì D được gọi là đa đĩa trong $\mathbb{C}^n$

2. Tập $\prod_{j=1}^n \partial D_j$ được gọi là khung của đa đĩa D và được ký hiệu là $\partial_0 D$

Định lý 2.1.4. (Công thức tích phân Cauchy trên đa đĩa)

Giả thiết D là một đa đĩa mở trong $\mathbb{C}^n$ và u là hàm biến phức chỉnh hình theo các biến tách biệt $z_j, \forall j = \overline{1; n}$ tại mọi điểm $z \in D$. Khi đó, nếu hàm $u \in C^1(\overline{D})$ ta có

$$u(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 D} \frac{1}{z_1 - \zeta_1} \cdot \frac{1}{z_2 - \zeta_2} \cdots \frac{1}{z_n - \zeta_n} u(z) dz_1 dz_2 \cdots dz_n, \quad \zeta \in \Omega \quad (2.1)$$

Chứng minh

Cho $\zeta \in \Omega$ tùy ý, vì u là hàm biến phức chỉnh hình theo các biến tách biệt $z_j, \forall j = \overline{1; n}$ tại mọi điểm $z \in D$ hơn nữa hàm $u \in C^1(\overline{D})$ nên liên tục trong $\overline{D_j} \quad \forall j = \overline{1; n}$

Áp dụng công thức Fubini và định lý 1.1.2 ta có

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \cdots \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_n} \frac{u(z_1, z_2, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \quad (\text{đpcm})$$

2.1.3. Ứng dụng biểu diễn tích phân giải bài toán $\bar{\partial}$

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, xét bài phương trình $\bar{\partial} u = f \quad (2.2)$

Trong đó $f = \sum_{j=1}^n f_j d\bar{z}_j \in C_{0,1}^k(\Omega)$, $u \in C^k(\Omega)$ là hàm cần tìm

Ta thấy (2.2) tương đương với hệ phương trình sau

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = f_j \quad \forall j = \overline{1; n}$$

Nếu (2.2) có nghiệm $u \in C^k(\Omega)$ thì $\bar{\partial}\bar{\partial}u = \bar{\partial}f = 0$ điều này tương đương với

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} = \frac{\partial f_k}{\partial z_j} \quad \forall j, k = \overline{1; n}$$

Do đó, hệ (2.2) có nghiệm thì điều kiện cần là $\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = \frac{\partial f_k}{\partial z_j} \quad \forall j, k = \overline{1; n}$ (2.3)

Định lý 2.1.5. (Bài toán $\bar{\partial}$ với hàm $f \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$)

Giả thiết $f_j \in C_0^k(\mathbb{C}^n) \quad \forall j = \overline{1; n}$ và thỏa mãn (2.3). Khi đó, (2.1) có nghiệm $u \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$.

Chứng minh

Vì $f_1 \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$ nên tồn tại hàm

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t - z_1} f_1(t; z_2, z_3, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t} \quad (2.4)$$

Đổi biến $t := t - z$ suy ra

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t} f_1(z_1 - t; z_2, z_3, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t} \quad (2.5)$$

Từ điều kiện $f_1 \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$ kết hợp với suy ra $u \in C^k(\mathbb{C}^n)$

Khi $|z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|$ đủ lớn thì $f_1(z_1 - t; z_2, z_3, \dots, z_n) = 0$. Do đó $u \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$

Theo định lý 1.1.2 thì $\frac{\partial u}{\partial z_1} = f_1$

Với $j > 1$, từ (2.5) ta có

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z_j} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial z_j} f_1(z_1 - t; z_2, z_3, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t}$$

Sử dụng điều kiện (2.3) ta có

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z_j} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial z_1} f_j(z_1 - t; z_2, z_3, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t}$$

Theo định lý 1.1.2 suy ra $\frac{\partial u}{\partial z_j} = f_j \quad \forall j = \overline{2; n}$

Vậy hàm u xác định bởi (2.4) cho ta nghiệm của phương trình (2.2)

Định lý 2.1.6. (Bài toán $\bar{\partial}$ trên đa đĩa)

Cho D là một đa đĩa mở trong $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) và $f \in C_{p,q+1}^\infty(D)$ thỏa mãn điều kiện $\bar{\partial}f = 0$ trong D . Nếu D' là tập con compact tương đối trong D thì tồn tại $u \in C_{p,q}^\infty(D')$ sao cho $\bar{\partial}u = f$ trong D'

Chứng minh

Ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp về sự tồn tại nghiệm u theo sự không có mặt của $d\bar{z}_{k+1}; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$ ($0 \leq k \leq n$) trong f

Với $k = 0$ thì f không có mặt $d\bar{z}_1; d\bar{z}_2; \dots; d\bar{z}_n$, mà $f \in C_{p,q+1}^\infty(D)$ nên $f \equiv 0$ suy ra nghiệm $u = 0$

Giả thiết định lý đúng với f là dạng không chứa: $d\bar{z}_k; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$ ($0 \leq k \leq n$)

Ta chứng minh định lý cũng đúng với f là dạng không chứa $d\bar{z}_{k+1}; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$

Vì f là dạng không chứa $d\bar{z}_{k+1}; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$ nên ta có thể biểu diễn f dưới dạng sau:

$$f = g \wedge d\bar{z}_k + h \quad (2.6)$$

Trong đó $g \in C_{p,q}^\infty(D)$, $h \in C_{p,q+1}^\infty(D)$ không chứa $d\bar{z}_k; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$

Với $g \in C_{p,q}^\infty(D)$ ta có biểu diễn

$$g = \sum' g_{\bar{I}} dz_{\bar{I}} \wedge d\bar{z}_j \quad (2.7)$$

$$\text{Suy ra} \quad \bar{\partial}g = \sum_{j=1}^n \sum' \frac{\partial g_{\bar{I}}}{\partial z_j} d\bar{z}_j \wedge dz_{\bar{I}} \wedge d\bar{z}_j$$

$$\text{Suy ra} \quad \bar{\partial}f = \left(\sum_{j=1}^n \sum' \frac{\partial g_{\bar{I}}}{\partial z_j} d\bar{z}_j \wedge dz_{\bar{I}} \wedge d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_k + \bar{\partial}h$$

Vì $\bar{\partial}f = 0$ suy ra

$$\left(\sum_{j=1}^n \sum' \frac{\partial g_{\bar{I}}}{\partial z_j} d\bar{z}_j \wedge dz_{\bar{I}} \wedge d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_k + \bar{\partial}h = 0 \quad (2.8)$$

Với $j > k$ từ (2.7) và do g và h độc lập với $d\bar{z}_k; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$ nên suy ra

$$\frac{\partial g_{\mathbb{U}}}{\partial z_j} = 0 \quad \forall j > k \quad (2.9)$$

Vậy $g_{\mathbb{U}}$ là các hàm chỉnh hình theo các biến $z_j \quad \forall j > k$

Bây giờ ta chọn hàm $G_{\mathbb{U}}$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial G_{\mathbb{U}}}{\partial z_k} = g_{\mathbb{U}} \quad (2.10)$$

Để giải (2.10) ta chọn hàm $\psi \in C_0^\infty(D_k)$ sao cho $\psi(z_k) = 1$ trong một lân cận của $\overline{D'}$ trong D và đặt

$$G_{\mathbb{U}}(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_k} \frac{1}{t - z_k} \psi(z_k) g_{\mathbb{U}}(z_1, \dots, z_{k-1}, t, z_{k+1}, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t}$$

Suy ra

$$G_{\mathbb{U}}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{D_k} \frac{1}{t} \psi(z_k - t) g_{\mathbb{U}}(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k - t, z_{k+1}, \dots, z_n) dt \wedge d\bar{t} \quad (2.11)$$

Thì $G_{\mathbb{U}} \in C^\infty(D)$ và là nghiệm của (2.10) trong D

$$\text{Từ (2.9) và (2.11) ta suy ra } \frac{\partial G_{\mathbb{U}}}{\partial z_j} = 0 \quad \forall j > k \quad (2.12)$$

$$\text{Đặt} \quad G = \sum' G_{\mathbb{U}} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\text{Trong } D \text{ ta có} \quad \bar{\partial}G = \sum_{j=1}^n \sum' \frac{\partial G_{\mathbb{U}}}{\partial z_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (2.13)$$

Kết hợp (2.10), (2.12) và (2.13) ta có

$$\bar{\partial}G = \sum_{j=1}^k \sum' \frac{\partial G_{\mathbb{U}}}{\partial z_j} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = g \wedge d\bar{z}_k + h_1 \quad (2.14)$$

Trong đó $h_1 \in C_{p,q+1}^\infty(D)$ và là dạng không chứa $d\bar{z}_k; d\bar{z}_{k+2}; \dots; d\bar{z}_n$

Kết hợp (2.6) và (2.14) ta có

$$\bar{\partial}G - h_1 = f - h$$

$$\text{Suy ra} \quad h - h_1 = f - \bar{\partial}G \quad (2.15)$$

$$\text{Suy ra} \quad \bar{\partial}(h - h_1) = \bar{\partial}f - \bar{\partial}\bar{\partial}G = 0$$

$$\text{Theo quy nạp tồn tại dạng vi phân } v \text{ thỏa mãn } \bar{\partial}v = h - h_1 \quad (2.16)$$

Từ (2.15), (2.16) ta có $\bar{\partial}v = f - \bar{\partial}G$

Tương đương với $\bar{\partial}(v + G) = f$

Đặt $u = v + G$ thì $\bar{\partial}u = f$ (đpcm)

* Trong không gian $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, xét các dạng vi phân

$$\omega(z) = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$$

$$\omega^*(\zeta) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_{j-1} \wedge d\zeta_{j+1} \wedge \dots \wedge d\zeta_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j \bigwedge_{k \neq j} d\zeta_k$$

$$\mu = \frac{1}{\langle \zeta, z \rangle^n} \omega^*(\zeta) \wedge \omega(z)$$

Mệnh đề 2.1.7. $d\mu = 0$

Chứng minh

$$\begin{aligned} d\mu &= d \left\{ \frac{1}{\langle \zeta; z \rangle^n} \right\} \omega^*(\zeta) \wedge \omega(z) + \frac{1}{\langle \zeta; z \rangle^n} d(\omega^*(\zeta) \wedge \omega(z)) \\ &= -n \frac{\sum_{j=1}^n (\zeta_j dz_j + z_j d\zeta_j)}{\langle \zeta; z \rangle^{n+1}} \wedge \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j \bigwedge_{k \neq j} d\zeta_k \wedge \omega(z) + \frac{1}{\langle \zeta; z \rangle^n} n \omega(\zeta) \wedge \omega(z) \\ &= -n \frac{1}{\langle \zeta; z \rangle^n} \omega(\zeta) \wedge \omega(z) + n \frac{1}{\langle \zeta; z \rangle^n} \omega(\zeta) \wedge \omega(z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{đpcm})$$

Giả thiết Ω là một miền lồi trong $\mathbb{C}^n$. Xét ánh xạ $s: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n$ với giả thiết hàm s thỏa mãn hai điều kiện:

$$1. s \in C^1(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \text{ và } \langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle \neq 0 \quad \forall (\zeta; z) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}; \zeta \neq z$$

$$|s(\zeta; z)| \leq C|\zeta - z|; \quad |\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle| \geq C|\zeta - z|^2 \quad (2.17)$$

Đối với $\zeta \in \bar{\Omega}$; z thuộc tập con compact bất kỳ của Ω , ở đây C là một hằng số dương

$$2. \text{ Với mỗi } \zeta \in \partial\Omega: s(\zeta; \cdot) \text{ là hàm chỉnh hình trong } \Omega \quad (2.18)$$

Nhận xét. Khi Ω là một miền lồi, ta sẽ chứng minh được tồn tại hàm $s(\zeta; z)$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Thật vậy, Ω là một miền lồi thì tồn tại một hàm lồi $\rho \in C^2(\overline{\Omega})$ xác định trên $\mathbb{C}^n$ sao cho Ω được xác định bởi:

$$\Omega = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^n : \rho(\zeta) \leq 0 : \rho(\zeta) = 0 \text{ trên } \partial\Omega \right\}.$$

$$\text{Lấy ma trận } A = A(\zeta) = -\rho(\zeta)I + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k} \right)_{n \times n} = (A_{jk}(\zeta))_{n \times n}$$

Do ρ là một hàm lồi xác định âm trên Ω nên ma trận A có dạng ma trận Hermitian xác định dương.

$$\text{Xây dựng hàm } s : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ với } s_j(\zeta; z) = \sum_{k=1}^n A_{jk}(\zeta) \cdot (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \forall j = \overline{1, n}$$

Ta kiểm tra hàm s thỏa mãn các điều kiện trên:

* Hiển nhiên $s \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ và $\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle \neq 0 \forall (\zeta; z) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}; \zeta \neq z$

$$* \text{ Ta có: } |s(\zeta; z)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n s_j(\zeta; z) \bar{s}_j(\zeta; z)}$$

$$\text{Trong đó } s_j(\zeta; z) = \sum_{k=1}^n A_{jk}(\zeta) \cdot (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \forall j = \overline{1, n}$$

Giả sử $\zeta_k = u_k + iv_k; z_k = x_k + iy_k$ thì

$$s_j(\zeta; z) = \sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (u_k - x_k) + i \sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (v_k - y_k) \forall j = \overline{1, n}$$

$$\bar{s}_j(\zeta; z) = \sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (u_k - x_k) - i \sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (v_k - y_k) \forall j = \overline{1, n}$$

$$\text{Do đó } |s(\zeta; z)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left\{ \left(\sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (u_k - x_k) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n A_{jk}(\cdot) \cdot (v_k - y_k) \right)^2 \right\}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{jk}^2(\cdot) \right) \cdot \sum_{k=1}^n \left[(u_k - x_k)^2 + (v_k - y_k)^2 \right]} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{jk}^2(\cdot) \right) \cdot \sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } |s(\zeta; z)| \leq C |\zeta - z|$$

Hoàn toàn tương tự ta có ; $|\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle| \geq C|\zeta - z|^2$

Vậy (2.17) được thỏa mãn.

Ta chứng minh hàm s thỏa mãn điều kiện (2.18).

Theo định nghĩa của hàm s , với $\zeta \in \partial\Omega$ ta có:

$$\frac{\partial s_j(\zeta; z)}{\partial \bar{z}_k} = -A_{jk}(\zeta) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_k} = 0 \quad \text{ khi } k \neq j$$

$$\text{Và} \quad \frac{\partial s_j(\zeta; z)}{\partial \bar{z}_j} = -A_{jj}(\zeta) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \bar{\zeta}_j} + \rho(\zeta) = 0 \quad \forall j = \overline{1; n}.$$

Do đó, với mỗi $\zeta \in \partial\Omega$ thì $s(\zeta; z)$ là hàm chỉnh hình trong Ω theo biến z .

Nhận xét. Khi Ω là miền lồi, tồn tại hàm s thỏa mãn các điều kiện trên. Trên cơ sở đó, Koppelman xây dựng nhân Koppelman có trọng và không có trọng, từ đó xây dựng công thức nghiệm cho bài toán $\bar{\partial}$ trong miền lồi Ω .

Xét nhân Koppelman không có trọng

$$K = \frac{1}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n} \omega^*(s(\zeta; z)) \wedge \omega(\zeta - z) \quad (2.19)$$

Nhận xét: Nhân K được định nghĩa theo (2.19) là nhân chỉnh hình với hàm s thỏa mãn các điều kiện (2.17) và (2.18)

Gọi $K_{p,q}$ là thành phần của K song bậc p, q đối với biến z và song bậc $(n-p; n-q-1)$ đối với biến ζ .

Xét nhân Koppelman có trọng:

$$\text{Xét dạng vi phân} \quad A(\zeta; z) = e^{\langle \zeta; z \rangle} \omega^*(\zeta) \wedge \omega(z)$$

Xét ánh xạ $Q: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n$ thỏa mãn điều kiện, với mỗi $\zeta \in \partial\Omega$ cố định thì ánh xạ $Q(\zeta; \cdot)$ là một hàm chỉnh hình trong Ω .

Xét ánh xạ $s: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n$ thỏa mãn các điều kiện nêu trên và $t \in \mathbb{R}^+$ xét

$$N = A(Q + t.s; \zeta - z) = e^{\langle Q + t.s; \zeta - z \rangle} \omega^*(Q + t.s) \wedge \omega(\zeta - z)$$

Ta có thể tách $N = N_t + N'$ với N_t là thành phần của N chứa dt , N' là thành phần của N không chứa dt

Bằng tính toán trực tiếp ta được

$$N_t = -e^{\langle Q; \zeta - z \rangle + t \langle s; \zeta - z \rangle} \left(t^{n-1} \omega^*(s) \wedge \omega(\zeta - z) \wedge dt + \sum_{k=0}^{n-2} t^k a_k \wedge dt \right) \quad (2.20)$$

Với a_k là dạng không chứa t

Mệnh đề 2.1.8.

$$1. dN = 0$$

$$2. d_{\zeta, z} N_t = -d_t N'$$

Ta định nghĩa nhân có trọng

$$K = \int_0^{+\infty} N_t \text{ với giả thiết } \operatorname{Re}(s; \zeta - z) < 0 \quad \forall \zeta \neq z \quad (2.21)$$

$$\text{Suy ra } d_{\zeta, z} K = \int_0^{\infty} d_{\zeta, z} N_t = - \int_0^{\infty} d_t N' = -N' \Big|_0^{\infty} = e^{\langle Q; \zeta - z \rangle} \omega^*(Q) \wedge \omega(\zeta - z)$$

$$\text{Đặt } P_{\zeta, z} = e^{\langle Q; \zeta - z \rangle} \omega^*(Q) \wedge \omega(\zeta - z) \quad (2.22)$$

thì $d_{\zeta, z} K = P_{\zeta, z}$ và $P_{\zeta, z}$ không chứa s

$$\text{Nếu } Q \equiv 0 \text{ thì } N = A(t, s; \zeta - z) = e^{\langle ts; \zeta - z \rangle} \omega^*(ts) \wedge \omega(\zeta - z)$$

$$\text{Khi đó } N_t = -e^{t \langle s; \zeta - z \rangle} t^{n-1} \omega^*(s) \wedge \omega(\zeta - z) \wedge dt$$

Do đó bằng tính toán trực tiếp theo tích phân từng phần ta được

$$K = \int_0^{\infty} N_t = \frac{1}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n} \omega^*(s) \wedge \omega(\zeta - z)$$

là trường hợp nhân Koppelman không có trọng

Định lý 2.1.9. (Công thức Koppelman)

$$\text{Giả thiết } f \in C_{p, q}^1(\overline{\Omega})$$

Khi đó: với $q > 0$ ta có

$$f(\zeta) = C_{p, q, n} \left\{ \int_{\partial \Omega} f(\cdot) \wedge K_{p, q}(\zeta; \cdot) + (-1)^{p+q+1} \left(\int_{\Omega} \bar{\partial} f \wedge K_{p, q}(\zeta; \cdot) - \bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega} f \wedge K_{p, q-1}(\zeta; \cdot) \right) \right\} \quad (2.23)$$

với $q = 0$ ta có

$$f(\zeta) = C_{p,n} \left\{ \int_{\partial\Omega} f(\cdot) \wedge K_{p,0}(\zeta; \cdot) + (-1)^{p+1} \left(\int_{\Omega} \bar{\partial} f(\cdot) \wedge K_{p,0}(\zeta; \cdot) - \bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega} f(\cdot) \wedge P_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \right) \right\} \quad (2.24)$$

Trong đó :

Gọi $K_{p,q}$ là thành phần của K song bậc p,q đối với biến z và song bậc $(n-p;n-q-1)$ đối với biến ζ .

Gọi $P_{p,q}$ là thành phần của P song bậc p,q đối với biến z và song bậc $(n-p;n-q-1)$ đối với biến ζ .

Trong đó K, P được định nghĩa như trong (2.21), (2.22)

Chứng minh

a. Chứng minh trường hợp $q > 0$, giả thiết ϕ là dạng (p,q) trơn với giá compact trong Ω , ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(\zeta) \wedge f(\zeta) &= C_{p,q,n} \left\{ \int_{\partial\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge f(\cdot) \wedge K_{p,q}(\zeta; \cdot) + (-1)^{p+q+1} \left(\int_{\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge \bar{\partial} f(\cdot) \wedge K_{p,q}(\zeta; \cdot) - \int_{\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge \bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega \times \Omega} f(\cdot) \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \right) \right\} \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi(\zeta) \wedge f(\zeta) = C_{p,q,n} \left\{ \int_{\partial\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge f(\cdot) \wedge K(\zeta; \cdot) + (-1)^{p+q+1} \left(\int_{\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge \bar{\partial} f(\cdot) \wedge K(\zeta; \cdot) - \int_{\Omega \times \Omega} \phi(\zeta) \wedge \bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega \times \Omega} f(\cdot) \wedge K(\zeta; \cdot) \right) \right\} \end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, đặt $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \times \Omega \setminus \{(\zeta; z) \in \Omega \times \Omega : |\zeta - z| < \varepsilon\}$

$$\text{Xét } I = \int_{\partial(\Omega \times \Omega)} \phi(\zeta) \wedge f(z) \wedge K_{p,q}(\zeta; z) \quad (2.25)$$

Theo công thức Stokes và với ε dương đủ nhỏ sao cho $0 < \varepsilon < d(\text{supp } \phi; \partial\Omega)$ ta có

$$I = \int_{\Omega_{\varepsilon}} d\phi \wedge f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \phi \wedge df \wedge K + \int_{\Omega_{\varepsilon}} \phi \wedge f \wedge dK + \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \phi \wedge f \wedge K$$

Từ (2.21) ta có

$$I = \int_{\Omega_\varepsilon} d\phi \wedge f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega_\varepsilon} \phi \wedge df \wedge K + \int_{\Omega_\varepsilon} \phi \wedge f \wedge P + \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \phi \wedge f \wedge K \quad (2.26)$$

Với các điều kiện (2.17), (2.18) và công thức (2.21) ta có:

$$O(s) = O(|\zeta - z|) \quad (\text{vì } |s(\zeta; z)| \leq C|\zeta - z|)$$

$$K = O\left(\frac{|s(\zeta; z)|}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n}\right) = O\left(\frac{1}{|\zeta - z|^{2n-1}}\right)$$

$$(\text{vì } |\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle| \geq C|\zeta - z|^2)$$

Vì vậy ba tích phân đầu trong (2.26) hội tụ đều khi $\varepsilon \searrow 0$ (2.27)

$$\text{Xét } K = \int_0^\infty N_t = \int_0^\infty -e^{\langle Q; \zeta - z \rangle + t \langle s; \zeta - z \rangle} \left(t^{n-1} \omega^*(s) \wedge \omega(\zeta - z) \wedge dt + \sum_{k=0}^{n-2} t^k a_k \wedge dt \right)$$

Tính trực tiếp theo phương pháp tích phân từng phần ta thu được

$$K = -\frac{(n-1)!e^{\langle Q, \zeta - z \rangle}}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n} \omega^*(s(\zeta; z)) \wedge \omega(\zeta - z) + T_1 \text{ với } T_1 = O(|\zeta - z|^{2-2n})$$

Sử dụng khai triển đa thức Mac-Laurin cho hàm $e^{\langle Q(\zeta; z); \zeta - z \rangle}$ ta thu được

$$K = -\frac{(n-1)!}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n} \omega^*(s(\zeta; z)) \wedge \omega(\zeta - z) + T_1 - T_2 \text{ với } T_2 = O(|\zeta - z|^{2-2n})$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \phi \wedge f \wedge K &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \phi \wedge f \wedge -\frac{(n-1)!}{\langle s(\zeta; z); \zeta - z \rangle^n} \omega^*(s(\zeta; z)) \wedge \omega(\zeta - z) \\ &= C_{p,q,n} \cdot \int_{\Omega} \phi \wedge f \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cho $\varepsilon \searrow 0$, từ (2.25), (2.26), (2.27) và (2.28) ta suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\partial\Omega} f \wedge K &= \int_{\Omega \times \Omega} \phi \wedge f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega \times \Omega} \phi \wedge df \wedge K \\ &\quad + \int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\Omega} f \wedge P + C_{p,q,n} \int_{\Omega} \phi \wedge f \\ &= (-1)^{p+q+1} \int_{\Omega} \phi \wedge d_z \int_{\Omega} f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega \times \Omega} \phi \wedge df \wedge K \end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\Omega} f \wedge P + C_{p,q,n} \int_{\Omega} \phi \wedge f$$

Với $q > 0$ thì $P_{p,q} = 0$ nên ta suy ra

$$\int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\partial\Omega} f \wedge K = (-1)^{p+q+1} \int_{\Omega} \phi \wedge d_z \int_{\Omega} f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\Omega} df \wedge K + C_{p,q,n} \int_{\Omega} \phi \wedge f$$

$$= (-1)^{p+q+1} \int_{\Omega} \phi \wedge d_z \int_{\Omega} f \wedge K + (-1)^{p+q} \int_{\Omega} \phi \wedge \int_{\Omega} f \wedge K + C_{p,q,n} \int_{\Omega} \phi \wedge f$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi \wedge \left\{ \int_{\partial\Omega} f \wedge K + (-1)^{p+q} d_z \int_{\Omega} f \wedge K + (-1)^{p+q+1} \int_{\Omega} df \wedge K \right\} = C_{p,q,n} \int_{\Omega} \phi \wedge f$$

$$\Leftrightarrow f(\zeta) = C_{p,q,n} \left\{ \int_{\partial\Omega} f(\cdot) \wedge K_{p,q}(\zeta; \cdot) + \right. \\ \left. + (-1)^{p+q+1} \left(\int_{\Omega} \bar{\partial} f \wedge K_{p,q}(\zeta; \cdot) - \bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega} f \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \right) \right\} \quad (\bar{\partial}pcm)$$

Trường hợp $q = 0$, làm tương tự ta có điều phải chứng minh.

Định lý 2.1.20. Giả sử Ω là một miền lồi, hàm $s: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^n$ là hàm thỏa mãn các điều kiện (2.17), (2.18) và $f \in C_{p,q}^1(\bar{\Omega})$ ($q > 1$) thỏa mãn $\bar{\partial} f = 0$.

Khi đó phương trình (2.2) có nghiệm

$$u(\zeta) = (-1)^{p+q} C_{p,q,n} \int_{\Omega} f(\cdot) \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \quad (2.29)$$

Chứng minh

Với điều kiện (2.18) với mỗi $\zeta \in \partial\Omega$ thì $s(\zeta; \cdot)$ là một hàm chỉnh hình trong

Ω nên với mỗi $\zeta \in \partial\Omega$ thì $K_{p,q}(\zeta; z) = 0 \forall q \geq 1$ và theo giả thiết $\bar{\partial} f = 0$

nên theo (2.23) ta có

$$f(\zeta) = (-1)^{p+q+n} C_{p,q,n} \left(-\bar{\partial}_{\zeta} \int_{\Omega} f \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \right) \\ = \bar{\partial} \left((-1)^{p+q} C_{p,q,n} \int_{\Omega} f \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot) \right)$$

Hay $u(\zeta) = (-1)^{p+q} C_{p,q,n} \int_{\Omega} f(\cdot) \wedge K_{p,q-1}(\zeta; \cdot)$ là nghiệm bài toán (2.2) ($\bar{\partial}pcm$)

Hệ quả 2.1.21. Bài toán $\bar{\partial}$ trong miền lồi luôn có nghiệm và công thức nghiệm được cho bởi (2.29)

2.2 Bài toán $\bar{\partial}$ trong miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n (n > 1)$

2.2.1 Một số tính chất của toán tử xác định trừ mật trong không gian Hilbert

Định nghĩa 2.2.1. Cho E, F là hai không gian Hilbert, $A: D_A \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính, với miền xác định D_A là không gian con của E . Kí hiệu N_A là nhân của toán tử A , R_A là ảnh của toán tử A và G_A là đồ thị của toán tử A . Khi đó: toán tử A được gọi là xác định trừ mật nếu D_A trừ mật trong E , toán tử A được gọi là đóng nếu đồ thị G_A là đóng trong $E \times F$

Định nghĩa 2.2.2. Cho E, F là hai không gian Hilbert, $A: D_A \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính xác định trừ mật từ E vào F . Gọi D_{A^*} là tập gồm tất cả các phần tử $y \in F$ sao cho tồn tại $y^* \in E$ thỏa mãn $(Ax, y) = (x, y^*) \forall x \in D_A$. Do D_A trừ mật trong E nên nếu y^* tồn tại thì nó là duy nhất.

Khi đó, toán tử $A^*: D_{A^*} \rightarrow E$ xác định bởi $A^*y = y^*$ được gọi là toán tử liên hợp của toán tử A

Mệnh đề 2.2.3. Cho E, F là hai không gian Hilbert, $A: D_A \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính đóng, xác định trừ mật từ E vào F . Khi đó ta có các tính chất sau

1. A^* là toán tử đóng xác định trừ mật từ F vào E và $(A^*)^* = A$
2. $N_{A^*} = (R_A)^\perp$, $(N_{A^*})^\perp = \overline{R_A}$ ($\overline{R_A}$ là bao đóng của R_A)
3. $N_A = (R_{A^*})^\perp$, $(N_A)^\perp = \overline{R_{A^*}}$ ($\overline{R_{A^*}}$ là bao đóng của R_{A^*})
4. A là toàn ánh nếu và chỉ nếu A^* có nghịch đảo liên tục. Trong trường hợp này thì R_{A^*} là đóng trong E
5. Giả thiết F_0 là không gian con đóng của F thỏa mãn $R_A \subset F_0$. Khi đó, $R_A = F_0$ nếu và chỉ nếu tồn tại một hằng số dương c sao cho:

$$\|y\| \leq c \|A^* y\|, \forall y \in D_{A^*} \cap F_0$$

Trong trường hợp này, mỗi $y \in F_0$, tồn tại $x \in D_A$ sao cho

$$\|x\| \leq c \|y\|, Ax = y$$

Và mỗi $x \in (N_A)^\perp$, tồn tại $y \in D_{A^*} \cap F_0$ sao cho

$$\|y\| \leq c \|x\|, A^* y = x$$

2.2.2 Hàm đa điều hòa dưới và một số tính chất

Định nghĩa 2.2.4. (Hàm nửa liên tục trên)

Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, hàm $f : \Omega \rightarrow [-\infty; +\infty)$ được gọi là nửa liên tục trên tại $z_0 \in \Omega$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $\forall z \in \Omega$ thỏa mãn $|z - z_0| < \delta$ thì

$$\begin{cases} f(z) - f(z_0) < \varepsilon & ; f(z_0) \neq -\infty \\ f(z) < \frac{-1}{\varepsilon} & ; f(z_0) = -\infty \end{cases}$$

Hàm u được gọi là nửa liên tục trên trong Ω nếu nó nửa liên tục trên tại mọi điểm thuộc Ω

Định nghĩa 2.2.5. (Hàm đa điều hòa dưới)

Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, hàm $f : \Omega \rightarrow [-\infty; +\infty)$ được gọi là đa điều hòa dưới trong Ω nếu thỏa mãn các tính chất

1. f là nửa liên tục trên trong Ω
2. Với mọi $z \in \Omega; \zeta \in \mathbb{C}^n; \zeta \neq 0$ thì hàm $\varphi : D \rightarrow [-\infty; +\infty)$ xác định như sau $\varphi(t) = f(z + t\zeta)$ là hàm điều hòa dưới trên D với $D = \{t \in \mathbb{C} : z + t\zeta \in \Omega\}$

Tập các hàm đa điều hòa dưới trên Ω được kí hiệu là $PS(\Omega)$

Mệnh đề 2.2.6. Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, hàm $f : \Omega \rightarrow [-\infty; +\infty)$ và giả thiết $f \in C^2(\Omega)$. Khi đó, f là đa điều hòa dưới trên Ω nếu và chỉ nếu dạng Hermitian $D'D'' f(a)$ không âm với mọi $a \in \Omega$, tức là

$$D'D'' f(a) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \geq 0 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n \quad (2.30)$$

Chú ý. Hàm f có dạng Mermitian (2.30) dương với mọi $a \in \Omega, \forall b \in \mathbb{C}^n, b \neq 0$ thì người ta gọi f là đa điều hòa dưới chặt trên Ω

Mệnh đề 2.2.7. Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, hàm f đa điều hòa dưới chặt trên Ω .

Khi đó, tồn tại một hàm số thực dương $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ thỏa mãn :

$$D'D'' f(a) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \geq \varphi(a) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n \quad (2.31)$$

Chứng minh

Nếu $b = 0$ thì (2.31) hiển nhiên đúng, nên ta chứng minh với $b \neq 0$

Không mất tổng quát ta coi $\sum_{j=1}^n |b_j|^2 = 1$, vì nếu không ta xét $b := \frac{b}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2}$

$$\text{Đặt } S = \left\{ b \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |b_j|^2 = 1 \right\}$$

Giả thiết $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy tăng các tập con mở, compact tương đối trong Ω và

$$\text{thỏa mãn } \Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$$

Do f là hàm đa điều hòa dưới chặt trên Ω nên

$$\inf \left\{ \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k : \forall a \in \overline{\Omega_j}; b \in S \right\} = c_j > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

Do $\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$ là dãy tăng các tập con mở, compact tương đối trong Ω nên

$\{c_j\}_{j=1}^\infty$ là một dãy giảm, dương và là dãy bị chặn

Đặt $\Omega_0 = \emptyset$. Khi đó tồn tại một hàm $\psi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\psi \geq \frac{1}{c_j}$ trên

$\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}$ với mọi $j = 1, 2, \dots$

Đặt $\varphi = \frac{1}{\psi}$ thì khi đó $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ và thỏa mãn (2.31) nên là hàm cần tìm

Định nghĩa 2.2.8. (Bao lồi điều hòa)

Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, K là tập con compact của Ω . Bao lồi đa điều hòa của K trong Ω được kí hiệu là $\widehat{K}_\Omega^{PS}$ và được xác định bởi

$$\widehat{K}_\Omega^{PS} = \left\{ z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u \quad \forall u \in PS(\Omega) \right\}$$

* Cho $\delta(z)$ là một hàm liên tục bất kỳ trong $\mathbb{C}^n$ và $\delta > 0$ trừ tại điểm 0 và thỏa mãn $\delta(tz) = |t| \delta(z) \quad \forall t \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n$

$$\text{Đặt } \delta(z; C\Omega) = \inf_{w \in C\Omega} \{ \delta(z - w) \} \quad (2.32)$$

Nhận xét: Hiển nhiên $\delta(z; C\Omega)$ liên tục theo z

Định nghĩa 2.2.9. (Tập giả lồi)

Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, Ω được gọi là tập giả lồi nếu hàm $-\log \delta(z; C\Omega)$ là hàm đa điều hòa dưới trong Ω

Mệnh đề 2.2.10. Cho Ω là tập mở, giả lồi trong $\mathbb{C}^n$, K là một tập con compact của Ω và V là một lân cận mở của $\widehat{K}_\Omega^{PS}$. Khi đó, tồn tại một hàm đa điều hòa dưới chặt $f \in C^\infty(\Omega)$ thỏa mãn :

1. Tập $\{z \in \Omega : f(z) \leq c\}$ là compact tương đối với mỗi $c \in \mathbb{R}$
2. $f(z) < 0 \quad \forall z \in K$
3. $f(z) > 0 \quad \forall z \in \Omega \setminus V$

2.2.3. Toán tử $\bar{\partial}$ cho dạng vi phân

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, φ là một hàm liên tục trên Ω , ta kí hiệu $L^2(\Omega; \varphi)$ là không gian các hàm trong Ω bình phương khả tích theo độ đo $e^{-\varphi} d\lambda$, trong đó $d\lambda$ là độ đo lebesgue. Hiển nhiên $L^2(\Omega; \varphi)$ là không gian con của không gian $L^2(\Omega; loc)$ các hàm bình phương khả tích địa phương theo độ đo lebesgue và ngược lại, mỗi hàm trong $L^2(\Omega; loc)$ tương ứng với một hàm trong $L^2(\Omega; \varphi)$ với một vài hàm φ nào đó.

Kí hiệu $L^2_{p,q}(\Omega; \varphi)$ là không gian các dạng vi phân (p,q) với hệ số trong $L^2(\Omega; \varphi)$.

Xét dạng vi phân f, g trong $L^2_{p,q}(\Omega; \varphi)$

$$f = \sum' f_{\mathbb{I}} dz_I \wedge d\bar{z}_J; \quad g = \sum' g_{\mathbb{I}} dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad (|I|=p; |J|=q)$$

$$\text{Đặt} \quad (f; g) = \sum_{\mathbb{I}} f_{\mathbb{I}} \bar{g}_{\mathbb{I}}; \quad |f|^2 = \sum_{\mathbb{I}} |f_{\mathbb{I}}|^2; \quad (f; g)_{\varphi} = \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} e^{-\varphi} d\lambda$$

$$\text{Và} \quad \|f\|_{\varphi}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \quad (2.33)$$

Nhận xét. Với tích vô hướng của f, g trong $L^2_{p,q}(\Omega; \varphi)$ được xác định như trên thì ta có $L^2_{p,q}(\Omega; \varphi)$ là một không gian Hilbert

Định nghĩa 2.2.11. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, α, β, γ là ba hàm trọng thuộc $C^{\infty}(\Omega; \mathbb{R})$

1. Đặt D_A là không gian con gồm tất cả những hàm $f \in L^2(\Omega, \alpha)$ sao

cho hàm suy rộng $\frac{\partial f}{\partial z_j} \in L^2(\Omega, \beta) \quad \forall j = \overline{1; n}$

$$\text{Đặt} \quad A: D_A \rightarrow L^2_{01}(\Omega, \beta)$$

$$f \mapsto Af = \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} d\bar{z}_j$$

2. Đặt D_B là không gian con của $L^2_{01}(\Omega, \beta)$ gồm tất cả những hàm

$$g = \sum_{j=1}^n g_j d\bar{z}_j \in L^2_{01}(\Omega, \beta) \text{ sao cho hàm suy rộng } \frac{\partial g_j}{\partial z_k} - \frac{\partial g_k}{\partial z_j} \in L^2(\Omega, \gamma)$$

$$\forall j, k = \overline{1; n}$$

$$\text{Đặt} \quad B: D_B \rightarrow L^2_{02}(\Omega, \gamma)$$

$$g \mapsto Bg = \bar{\partial} g = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_k} - \frac{\partial g_k}{\partial z_j} \right) d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j$$

Mệnh đề 2.2.12. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$, α, β, γ là ba hàm trọng thuộc $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ và A và B là các toán tử được xác định như trong định nghĩa 2.2.11. Khi đó

1. A là toán tử đóng, xác định trừ mật từ $L^2(\Omega, \alpha)$ và $L^2_{01}(\Omega, \beta)$
2. B là toán tử đóng, xác định trừ mật từ $L^2_{01}(\Omega, \beta)$ và $L^2_{02}(\Omega, \gamma)$
3. $R_A \subset N_B$
4. Tồn tại toán tử liên hợp A^* của A và $D_{01}(\Omega) \subset D_{A^*}$, và nếu

$$g = \sum_{j=1}^n g_j d\bar{z}_j \in D_{A^*} \text{ thì}$$

$$A^*g = -e^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} (g_j e^{-\beta}) = -e^{\alpha-\beta} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_j} - g_j \frac{\partial \beta}{\partial z_j} \right)$$

5. Nếu $\varphi \in D(\Omega)$ và $f \in D_A$ thì $\varphi \cdot f \in D_A$ và $A(\varphi f) = \varphi Af + f \bar{\partial} \varphi$
6. Nếu $\varphi \in D(\Omega)$ và $g \in D_B$ thì $\varphi g \in D_B$ và $B(\varphi g) = \varphi Bg + \bar{\partial} \varphi \wedge g$
7. Nếu $\varphi \in D(\Omega)$ và $g \in D_{A^*}$ thì $\varphi g \in D_{A^*}$ và $A^*(\varphi g) = \varphi A^*g - e^{\alpha-\beta} g \bar{\partial} \varphi$

Chứng minh 4:

* Theo 1 của mệnh đề này thì tồn tại A^* của A

* Để chứng minh $D_{01}(\Omega) \subset D_{A^*}$ lấy $g = \sum_{j=1}^n g_j d\bar{z}_j \in D_{01}(\Omega)$ ta sẽ chứng minh

$$g \in D_{A^*}$$

Thật vậy, lấy $f \in D(A)$ ta có

$$\begin{aligned} (Af; g)_\beta &= \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z_j} (\bar{g}_j e^{-\beta}) d\lambda \stackrel{tp\bar{t}p}{=} - \sum_{j=1}^n \int_\Omega f \frac{\partial}{\partial z_j} (\bar{g}_j e^{-\beta}) d\lambda \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_\Omega f \overline{\frac{\partial}{\partial z_j} (g_j e^{-\beta})} d\lambda \\ &= - \left(f; e^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} g_j e^{-\beta} \right)_\alpha \quad \forall f \in D_A \end{aligned}$$

Suy ra $g \in D_{A^*}$ và $A^*g = -e^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} g_j e^{-\beta}$

Suy ra $D_{01}(\Omega) \subset D_{A^*}$

Tiếp theo ta chứng minh công thức trên không chỉ đúng với $g \in D_{01}(\Omega)$ mà còn đúng với $g \in D_{A^*}$

Thật vậy, lấy $g \in D_{A^*}$, $g = \sum_{j=1}^n g_j d\bar{z}_j$ và $f \in D(\Omega) \subset D_A$ ta có

$$(f; A^*g)_\alpha = (Af; g)_\beta = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (\bar{g}_j e^{-\beta}) d\lambda = - \left(f; e^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} g_j e^{-\beta} \right)_\alpha$$

$$\text{Vậy } A^*g = -e^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} g_j e^{-\beta} = -e^{\alpha-\beta} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_j} - g_j \frac{\partial \beta}{\partial z_j} \right)$$

Chứng minh 7.

* Với $\varphi \in D(\Omega)$; $g \in D_{A^*}$ thì hiển nhiên $\varphi g \in D_{A^*}$

* Với $f \in D_A$. Và áp dụng 6 của mệnh đề này ta có

$$\begin{aligned} (Af; \varphi g)_\beta &= (\bar{\varphi} Af; g)_\beta = (A(\bar{\varphi} f) - f \bar{\partial}(\bar{\varphi}); g)_\beta \\ &= (A(\bar{\varphi} f); g)_\beta - (f \bar{\partial}(\bar{\varphi}); g)_\beta \\ &= (\bar{\varphi} f; A^*g)_\alpha - \sum_{k,j=1}^n \int_\Omega f \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}_j} \bar{g}_k e^{-\beta} d\lambda \\ &= (f; \varphi A^*g)_\alpha - \sum_{k,j=1}^n \int_\Omega f \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z_j} g_k} e^{\alpha-\beta} e^{-\alpha} d\lambda \\ &= (f; \varphi A^*g)_\alpha - (f; e^{\alpha-\beta} g \partial \varphi)_\alpha \\ &= (f; \varphi A^*g - e^{\alpha-\beta} g \partial \varphi)_\alpha \quad \forall f \in D_A \end{aligned}$$

Vậy ta có. $A^*(\varphi g) = \varphi A^*g - e^{\alpha-\beta} g \partial \varphi$ (đpcm)

Mệnh đề 2.2.13. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ là một dãy trong

$D(\Omega)$ sao cho $0 \leq \eta_i \leq 1 \forall i$ trên Ω và $\eta_i \equiv 1$ trên mỗi tập compact của Ω

với i đủ lớn. Giả thiết $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $|\partial \eta_i|^2 \leq e^\psi \forall i$ trên Ω và

$$\sum_{j;k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \geq \left[2|\partial \psi(a)|^2 + c(a)e^{\psi(a)} \right] \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \quad \forall a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n \quad (2.34)$$

$c(\cdot)$ là hàm dương. Đặt $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ là ba hàm trọng thỏa mãn $\alpha = \varphi - 2\psi; \beta = \varphi - \psi; \gamma = \varphi$. A, B là các toán tử được định nghĩa trong 2.2.11. Khi đó

$$\int_{\Omega} c|g|^2 e^{-\beta} d\lambda \leq 2\|A^*g\|_{\alpha}^2 + \|Bg\|_{\gamma}^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \cap D_B$$

Đặc biệt, nếu c là hàm hằng dương thì ta có

$$\text{Mỗi } g \in N_B \text{ có } f \in D_A \text{ sao cho } \|f\|_{\alpha} \leq \sqrt{\frac{2}{c}} \|g\|_{\beta} \text{ và } Af = g$$

$$\text{Mỗi } f \in (N_A)^{\perp} \text{ có } g \in D_{A^*} \cap D_B \text{ sao cho } \|g\|_{\beta} \leq \sqrt{\frac{2}{c}} \|f\|_{\alpha} \text{ và } A^*g = f$$

2.2.4. Bài toán $\bar{\partial}$ cho miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ và đánh giá nghiệm

Định lý 2.2.14. (Định lý tồn tại nghiệm cho bài toán $\bar{\partial}$)

Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, với mỗi $g \in L^2_{01}(\Omega; \text{loc})$ thỏa mãn $\bar{\partial}g = 0$, thì tồn tại $f \in L^2(\Omega; \text{loc})$ sao cho $\bar{\partial}f = g$

Để chứng minh định lý ta cần ba bổ đề sau

Bổ đề 2.2.15. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Giả thiết $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một dãy trong $D(\Omega)$ sao cho $0 \leq \eta_i \leq 1 \forall i$ trên Ω và $\eta_i \equiv 1$ trên mỗi tập con compact của Ω với i đủ lớn. Khi đó, có một hàm $\psi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $|\bar{\partial}\eta_i|^2 \leq e^{\psi} \forall i$ trên Ω

Chứng minh

Gọi $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ là dãy tăng các tập con compact tương đối của Ω và phủ Ω . Đặt $c_j = \sup_i \sup_{x \in U_j} |\bar{\partial}\eta_i(x)|^2 \quad \forall j = 1; \infty$. Do $\bar{\partial}\eta_i = 0$ trên U_j khi i đủ lớn nên $c_j < \infty \forall j$. Đặt $U_0 = \emptyset$, thì có một hàm $\tau \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\tau > c_j$ trên $U_j \setminus U_{j-1} \forall j = 1; \infty$

Đặt $\psi = \log \tau$ thì ψ là hàm cần tìm

Bổ đề 2.2.16. Với a là một số thực cho trước và $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn trên mỗi khoảng có dạng $(-\infty; b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(t) = 0 \forall t < a$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một hàm không âm, tăng $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sao cho

$$\begin{cases} g(t) = 0 \quad \forall t < a - \varepsilon \\ g(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh

* Thay hàm f bởi $\max\{f; 0\}$ ta có thể coi f là hàm không âm

* Với mỗi $j \in \mathbb{N}$, đặt $t_j = a + (j-1)\varepsilon$ và $c_j = \sup\{f(t) : t < t_j\}$

Suy ra $c_j < \infty \forall j$ vì f là hàm bị chặn trên mỗi khoảng $(-\infty; b) \forall b \in \mathbb{R}$

Chọn hàm $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sao cho

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq t_j \\ 0 & \text{khi } t \leq t_{j-1} \end{cases}$$

Xét hàm $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto g(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_{j+1} - c_j) \varphi_j(t)$$

Ví với mỗi $t \in \mathbb{R}$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $t < t_n < t_{n+1} < \dots$ nên

$\varphi_j(t) = 0 \forall j \geq n+1$, vậy hàm g hoàn toàn xác định

Vì $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \Rightarrow g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

Theo định nghĩa của c_j thì $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một dãy tăng, và theo định nghĩa của

dãy hàm φ_j thì dãy hàm này không âm, tăng. Do đó g là hàm không âm, tăng

Mặt khác, khi $t < a - \varepsilon = t_0$ thì $\varphi_j(t) = 0 \forall j \geq 1$ nên $g(t) = 0 \forall t < a - \varepsilon$

Bây giờ ta chứng minh $g(t) \geq f(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Thật vậy:

Với $t < a$ thì $g(t) \geq 0 = f(t)$

Với $t \geq a$ thì tồn tại $n \geq 2$ sao cho $t_{n-1} < t < t_n$, theo định nghĩa của φ_j thì

$c_1 = 0$ và $c_n \geq f(t)$ do $t < t_n$ nên suy ra

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{j=1}^{n-1} (c_{j+1} - c_j) \varphi_j(t) + (c_{n+1} - c_n) \varphi_n(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (c_{j+1} - c_j) + (c_{n+1} - c_n) \varphi_n(t) \\ &= c_n - c_1 + (c_{n+1} - c_n) \varphi_n(t) = c_n + (c_{n+1} - c_n) \varphi_n(t) \geq c_n \geq f(t) \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bổ đề 2.2.17. Với a là một số thực cho trước và $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn trên mỗi khoảng có dạng $(-\infty; b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(t) = 0 \quad \forall t < a$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một hàm không âm, tăng, lồi $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sao cho

$$\begin{cases} g(t) = 0 \quad \forall t < a - \varepsilon \\ g(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ g'(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chứng minh

Theo bổ đề 2.2.16 thì tồn tại hàm không âm, tăng $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sao cho

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0 \quad \forall t < a - \varepsilon \\ \varphi(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh hàm $\varphi'(t)$ thỏa mãn các giả thiết của bổ đề 2.2.16 với a được thay bằng $a - \frac{\varepsilon}{2}$.

Dễ thấy, $\varphi'(t) = 0, \quad \forall t < a - \frac{\varepsilon}{2}$.

Bây giờ lấy b tùy ý, $b \in \mathbb{R}$, nếu $b + \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2}$ thì hiển nhiên φ' bị chặn trên

$(-\infty; b + \varepsilon]$ (do $\varphi' = 0$ trên đó), còn nếu $b + \varepsilon \geq a - \frac{\varepsilon}{2}$, trên khoảng

$\left(-\infty; a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ thì $\varphi'(t) = 0$, còn trên $\left[a - \frac{\varepsilon}{2}; a + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ thì φ' là hàm bị chặn.

Vậy $\varphi'(\cdot)$ bị chặn trên $(-\infty; b + \varepsilon]$ với b tùy ý thuộc $\mathbb{R}$ hay $\varphi'(\cdot)$ bị chặn trên $(-\infty; b)$ với b tùy ý thuộc $\mathbb{R}$

Theo bổ đề 2.2.16, tồn tại hàm $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sao cho

$$\begin{cases} \psi(t) = 0 \quad \forall t < a - \varepsilon \\ \psi(t) \geq \varphi'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Đặt
$$g(t) = \int_{a-\varepsilon}^t [\varphi(x) + \psi(x)] dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Do $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ nên $g'(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ và suy ra $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Từ tính tăng, không âm của φ, ψ lên $g'(t)$ cũng là hàm tăng, không âm và theo định nghĩa của hàm g thì $g(t)$ là hàm không âm, tăng, lồi và

$$g'(t) \geq \varphi(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Bây giờ ta chứng minh $g(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Thật vậy

Nếu $t < a - \varepsilon$ thì $g(t) = 0 = f(t)$

Nếu $t \geq a - \varepsilon$ thì
$$g(t) \geq \int_{a-\varepsilon}^t \psi(x) dx = \int_{a-\varepsilon}^t \varphi'(x) dx = \varphi(t) \geq f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{đpcm})$$

Chứng minh định lý 2.2.14

Lấy $g_0 \in L_{01}^2(\Omega, loc)$ mà $\bar{\partial} g_0 = 0$. Để áp dụng mệnh đề 2.2.13 ta xây dựng ba hàm trọng $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ và thỏa mãn:

$$g_0 \in L_{01}^2(\Omega; \beta) \quad \text{và} \quad \|g\|_\beta^2 \leq \|A^* g\|_\alpha^2 + \|Bg\|_\gamma^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \cap D_B$$

Lấy dãy $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ là một dãy trong $D(\Omega)$ sao cho $0 \leq \eta_i \leq 1 \quad \forall i$ trên Ω và $\eta_i \equiv 1$ trên mỗi tập compact của Ω với i đủ lớn. theo bổ đề 2.2.15 tồn tại hàm $\psi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\|\bar{\partial} \eta_i\|^2 \leq e^\psi \quad \forall i$ trên Ω

Từ $g_0 \cdot e^\psi \in L_{01}^2(\Omega, loc) = \bigcup_{\sigma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})} L_{01}^2(\Omega, \sigma)$ nên tồn tại hàm trọng

$$\sigma \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \quad \text{sao cho} \quad g_0 \cdot e^\psi \in L_{01}^2(\Omega, \sigma) \Leftrightarrow g_0 \in L_{01}^2(\Omega, \sigma - \psi)$$

Bây giờ ta tìm hàm $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\varphi \geq \sigma$ trên Ω và

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \geq \left[2|\partial \psi(a)|^2 + c(a)e^{\psi(a)} \right] \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \quad \forall a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$$

Theo mệnh đề 2.2.10 tồn tại một hàm đa điều hòa dưới chặt $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$

sao cho $K_t = \{z \in \Omega : u(z) \leq t\}$ là compact tương đối trong Ω với mọi $t \in \mathbb{R}$

Theo mệnh đề 2.2.7 tồn tại một hàm số thực dương $\tau \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ thỏa mãn :

$$D' D'' u(a) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \geq \varphi(a) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n$$

Bây giờ ta xây dựng hàm $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ lồi, tăng sao cho

$$\begin{cases} \chi \circ u \geq \sigma \\ (\chi \circ u) \tau \geq 2(|\partial \psi|^2 + e^\psi) \end{cases} \quad (2.35)$$

Xác định hàm $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$t \mapsto v(t) = \begin{cases} \sup_{z \in K_t} \left[|\sigma(z)| + \frac{2(|\partial \psi(z)|^2 + e^{\psi(z)})}{\tau(z)} \right] & \text{khi } t \geq \inf_{\Omega} u \\ 0 & \text{khi } t < \inf_{\Omega} u \end{cases} \quad (2.36)$$

Theo tính chất của hàm σ, ψ và bằng cách chứng minh tương tự tính bị chặn của hàm φ' trong bổ đề 2.2.17 ta có v bị chặn trên mỗi khoảng $(-\infty; b) \forall b \in \mathbb{R}$. Và hàm v thỏa mãn các giả thiết trong bổ đề 2.2.17, do đó tồn tại một hàm không âm, lồi, tăng $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \chi(t) \geq v(t) \\ \chi'(t) \geq v(t) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Do đó, với mỗi $z \in \Omega$ ta có

$$\begin{cases} \chi(u(z)) \geq v(u(z)) \geq |\sigma(z)| \geq \sigma(z) \\ \chi(u(z)) \geq v(u(z)) \geq \frac{2(|\partial \psi(z)|^2 + e^{\psi(z)})}{\tau(z)} \\ \chi'(u(z)) \geq v(u(z)) \geq \frac{2(|\partial \psi(z)|^2 + e^{\psi(z)})}{\tau(z)} \end{cases}$$

Vậy hàm χ thỏa mãn (2.35), đặt $\varphi = \chi \circ u$, do χ là một hàm không âm, lồi, tăng $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ nên ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\chi \circ u)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k &\geq \chi'(u(a)) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \\ &\geq \chi'(u(a)) \tau(a) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k &\geq 2 \left(|\partial \psi(a)|^2 + e^{\psi(a)} \right) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Đặt $\alpha = \varphi - 2\psi; \beta = \varphi - \psi; \gamma = \varphi$ thì $g_0 \in L_{01}^2(\Omega, \beta)$

Áp dụng mệnh đề 2.2.13 với $c \equiv 1$ ta có:

$$\|g\|_\beta^2 \leq 2 \|A^* g\|_\beta^2 + \|Bg\|_\gamma^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \cap D_B$$

Do đó tồn tại hàm $f_0 \in L^2(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, loc)$ thỏa mãn $\bar{\partial} f_0 = g_0$ (đpcm)

Định lý 2.2.18. (Định lý L^2 đánh giá nghiệm cho bài toán $\bar{\partial}$)

Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ và φ là hàm đa điều hòa dưới chặt thuộc lớp $C^2(\Omega)$. Giả sử $c(\cdot)$ là một hàm dương thỏa mãn

$$c(a) \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(a)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \cdot b_j \bar{b}_k \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n$$

Nếu $f \in L_{01}^2(\Omega; loc)$ và $\bar{\partial} f = 0$ thì phương trình $\bar{\partial} u = f$ có nghiệm $u \in L^2(\Omega; loc)$ thỏa mãn

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \int_\Omega \frac{|f|^2}{c} e^{-\varphi} d\lambda$$

Chứng minh

$$\text{Đặt } M = 2 \int_\Omega \frac{|f|^2}{c} e^{-\varphi} d\lambda \geq 0$$

Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ nên theo mệnh đề 2.2.10 có hàm đa điều hòa dưới chặt $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\Omega_t = \{z \in \Omega : u(z) \leq t\}$ là

compact tương đối trong Ω với mọi $t \in \mathbb{R}$. Với t_0 cố định bất kỳ, lấy dãy

$$(\eta_i)_{i=1}^\infty \subset D(\Omega) \text{ sao cho } 0 \leq \eta_i \leq 1 \forall i \text{ và } \eta_i \equiv 1 \text{ trên } \Omega_{t_0+i+1}$$

Chọn hàm dương $\psi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ sao cho $\psi = 0$ trên Ω_{t_0+1} và $e^{\psi(z)} \geq c(z) \forall z \in \Omega$

Do u là một hàm đa điều hòa dưới chặt nên theo mệnh đề 2.2.7 tồn tại một hàm số thực dương $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ thỏa mãn :

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \overline{b_k} \geq \varphi(a) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n$$

Xác định hàm $v(t)$ như trong (2.36), hàm $v(t) = 0$ trên $(-\infty; t_0 + 1)$ (vì lấy $(-\infty; t_0 + 1)$ thì nếu $t < \inf_\Omega u$ thì $v(t) = 0$, còn nếu $t > \inf_\Omega u$ thì do $\Omega_{t_0} \subset \Omega_{t_0+1}$ nên $\psi(t) = 0 \forall z \in \{z : u(z) \leq t\}$, tức là $v(t) = 0$)

Theo trong chứng minh định lý 2.2.14 thì $v(t)$ là hàm bị chặn và thỏa mãn các giả thiết của bổ đề 2.2.17 nên tồn tại một hàm không âm, lồi, tăng $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \chi(t) \geq v(t) & \forall t \in \mathbb{R} \\ \chi'(t) \geq v(t) & \forall t \in \mathbb{R} \\ \chi(t) = 0 & \forall t \in (-\infty; t_0 + 1/2) \end{cases}$$

Do đó $\forall z \in \Omega$ ta có

$$\begin{cases} \chi(u(z)) \geq v(u(z)) \geq 2\psi(z) \\ \chi'(u(z)) \geq v(u(z)) \geq \frac{2|\partial\psi(z)|^2 + c(z)(e^{\psi(z)} - 1)}{\tau(z)} \end{cases} \quad (2.37)$$

Mặt khác, do χ một hàm không âm, lồi, tăng $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ nên ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\chi \circ u)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \overline{b_k} &\geq \chi'(u(a)) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\chi \circ u)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \overline{b_k} \\ &\geq \chi'(u(a)) \tau(a) \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \end{aligned}$$

$$\geq \left[2|\partial\psi(a)|^2 + c(a)(e^{\psi(a)} - 1) \right] \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n$$

Đặt $\tilde{\varphi} = \varphi + \chi \circ u; \alpha = \tilde{\varphi} - 2\psi; \beta = \tilde{\varphi} - \psi; \gamma = \tilde{\varphi}$

thì $\tilde{\varphi} - 2\psi = \varphi + \chi \circ u - 2\psi \geq \varphi$ và

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 (\chi \circ u)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) b_j \bar{b}_k \\ &\geq \left[c(a) + 2|\partial\psi(a)|^2 + c(a)(e^{\psi(a)} - 1) \right] \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n \\ &\geq \left[c(a)e^{\psi(a)} + 2|\partial\psi(a)|^2 \right] \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \forall a \in \Omega; b \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Áp dụng mệnh đề 2.2.13 ta có

$$\int_{\Omega} c(z) |g|^2 e^{-\beta} d\lambda(z) \leq 2 \|A^* g\|_{\alpha}^2 + \|Bg\|_{\gamma}^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \cap D_B$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwart ta có

$$\begin{aligned} |(f; g)_{\beta}|^2 &= \left| \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} e^{-\beta} d\lambda \right|^2 = \left| \int_{\Omega} f \cdot \bar{g} e^{-\tilde{\varphi} + \psi} d\lambda \right|^2 = \left| \int_{\Omega} (\sqrt{c} \bar{g} e^{-\tilde{\varphi}/2}) \left(\frac{f}{\sqrt{c}} e^{\psi - \tilde{\varphi}/2} \right) d\lambda \right|^2 \\ &\leq \int_{\Omega} (c |g|^2 e^{-\tilde{\varphi} + \psi}) d\lambda \int_{\Omega} \left(\frac{|f|^2}{c} e^{-\varphi} \right) d\lambda \quad (\text{vì } \tilde{\varphi} - 2\psi \geq \varphi; \psi \geq 0) \\ &\leq \int_{\Omega} (c |g|^2 e^{-\beta}) d\lambda \int_{\Omega} \left(\frac{|f|^2}{c} e^{-\varphi} \right) d\lambda \quad (\text{vì } \beta = \tilde{\varphi} - \psi) \\ &\leq \frac{M}{2} \left(2 \|A^* g\|_{\alpha}^2 + \|Bg\|_{\gamma}^2 \right) = M \|A^* g\|_{\alpha}^2 + \frac{M}{2} \|Bg\|_{\gamma}^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \cap D_B \quad (2.38) \end{aligned}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } |(f; g)_{\beta}|^2 \leq M \|A^* g\|_{\alpha}^2 \quad \forall g \in D_{A^*} \quad (2.38)$$

Thật vậy, từ $L_{01}^2(\Omega; \beta) = N_B + (N_B)^{\perp}$ do đó với mọi $g \in L_{01}^2(\Omega; \beta)$ thì

$$g = g_1 + g_2 \text{ với } g_1 \in N_B; g_2 \in (N_B)^{\perp}$$

$$\text{Mà } R_A \subset N_B \Rightarrow g_2 \in (R_A)^{\perp} \Rightarrow (Af; g_2)_{\beta} = 0 = (f; 0) \quad \forall f \in D_A$$

Suy ra $g_2 \in D_{A^*}$ và $A^*(g_2) = 0$

Do $g, g_2 \in D_{A^*}$ nên $g_1 = g - g_2 \in D_{A^*} \Rightarrow g_1 \in N_B \cap D_{A^*}$

Theo (2.37) thì $\left| (f; g_1)_\beta \right|^2 \leq M \|A^* g_1\|_\alpha^2$

Hơn nữa từ $f \in N_B; g_2 \in (N_B)^\perp \Rightarrow \left| (f; g_2)_\beta \right| = 0$

Suy ra $\left| (f; g)_\beta \right|^2 = \left| (f; g_1)_\beta \right|^2 \leq M \|A^* g_1\|_\alpha^2 = M \|A^* g\|_\alpha^2 \quad \forall g \in D_A$

Xét toán tử tuyến tính liên tục

$$c : R_{A^*} \rightarrow R$$

$$A^* g \mapsto c(A^* g) = (f; g)_\beta \quad \forall g \in D_{A^*}$$

Từ (2.38) suy ra $\|c\| \leq \sqrt{M}$. Theo định lý Riesz, tồn tại $u_{t_0} \in \overline{R_{A^*}} \subset L^2(\Omega, \alpha)$

sao cho $(f; g)_\beta = (u_{t_0}; A^* g)_\alpha \quad \forall g \in D_{A^*}$,

Suy ra $u_{t_0} \in D_{A^{**}} = D_A$ và $Au_{t_0} = A^{**}(u_{t_0}) = f$

Ngoài ra u_{t_0} thỏa mãn

$$\begin{aligned} \|u_{t_0}\| &= \|c\| \leq \sqrt{M} \Leftrightarrow \int_{\Omega} |u_{t_0}|^2 e^{-\alpha} d\lambda \leq M \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega_{t_0}} |u_{t_0}|^2 e^{-\alpha} d\lambda &\leq \int_{\Omega} |u_{t_0}|^2 e^{-\alpha} d\lambda \leq M \end{aligned}$$

Mặt khác $\alpha = \tilde{\varphi} - 2\psi = \varphi + \chi \circ u - 2\psi = \varphi$

Trên $\Omega_{t_0+1/2}$; ta có $\int_{\Omega_{t_0}} |u_{t_0}|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq M$

Lấy dãy $t_i \rightarrow +\infty$ để cho dãy $\{u_{t_j}\}_{j=1}^\infty$ hội tụ yếu đến u

Từ $\bar{\partial} u_{t_j} = f$ và $\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\alpha} d\lambda \leq M$ ta suy ra được $\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{c} e^{-\varphi} d\lambda$
(đpcm)

KẾT LUẬN

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

1. Dùng biểu diễn tích phân để đưa lời giải bài toán cho bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}$ với hai trường hợp: vế phải có giá compact và vế phải khả vi vô hạn. Cho lời giải bài toán $\bar{\partial}$ trong $\mathbb{C}^n$ với bốn trường hợp: vế phải có giá compact, bài toán $\bar{\partial}$ trong đĩa đơn vị, bài toán $\bar{\partial}$ trong miền lồi và bài toán $\bar{\partial}$ trong miền giả lồi.
2. Đưa ra được hai đánh giá về nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ trong $L^p(\Omega; \varphi)$ trong đó $\Omega \subset \mathbb{C}$.
3. Đưa ra một kết quả đánh giá về nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ trong miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n (n > 1)$.
4. Những vấn đề về công thức nghiệm cũng như đánh giá nghiệm của bài toán $\bar{\partial}$ cho miền lồi hay miền giả lồi $\Omega \subset \mathbb{C}^n (n > 1)$ với vế phải là các dạng vi phân có hệ số trong $L^p(\Omega; \varphi)$ cần được tiếp tục nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Khuê, Vũ Tuấn “*Hàm số biến số phức*” NXB Giáo dục, (1990)
- [2] Nguyễn Đình Sang “*Hàm nhiều biến phức*”, (bản thảo)
- [3] Nguyễn Thủy Thanh “*Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*”, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp, (1985)
- [4] Bo Berndtsson “*Weighted estimates for $\bar{\partial}$ in domains in $\mathbb{C}$* ”. Vol 66, No2 “Duke mathematical journal,”. May 1992
- [5] B.V.Sabat “*Nhập môn giải tích phức*”, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp, (1974)
- [6] Ch. Borell “*Convex measures on locally convex space*” Art. Mat. (12, 239-252), (1974)
- [7] J. Mujica “*Complex analysis in Banach space*”. Mat. Ann, (1 - 307)
- [8] Las Hormander “*An introduction to complex analysis in several variables*”, (1990)
- [9] W. Koppelman “*The Cauchy intergral for differential from*”, Bull. Armer. Math. Soc., (1967)