

MỤC LỤC

Mở đầu	2
1 Một số kiến thức chuẩn bị	8
1.1 Các kiến thức cơ bản	8
1.1.1 Công thức Itô	8
1.1.2 Bổ đề Borel - Cantelli	9
1.1.3 Bất đẳng thức Gronwall	10
1.1.4 Tính tồn tại và duy nhất nghiệm	10
1.2 Một số bổ đề quan trọng	11
2 Ổn định hầu chắc chắn	19
2.1 Định lý	19
2.2 Ví dụ	28
3 Sự ổn định hầu chắc chắn của hệ nhiễu	36
3.1 Định lý	36
3.2 Ví dụ	44
4 Sự ổn định hầu chắc chắn của hệ trễ ngẫu nhiên	46
4.1 Định lý	46
4.2 Ví dụ	53
Kết luận	55

MỞ ĐẦU

Lý thuyết phương trình vi phân ngẫu nhiên đã có lịch sử lâu đời và đạt được nhiều thành tựu rực rỡ về cả lý thuyết và ứng dụng. Trong các bài toán lý thuyết, việc nghiên cứu tính ổn định của các phương trình vi phân ngẫu nhiên là bài toán rất quan trọng. Các tài liệu về sự ổn định mũ của mô men cấp p hoặc ổn định mũ hầu chắc chắn cũng rất phong phú. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp, khi ổn định mũ của hệ ngẫu nhiên không xảy ra, tức là hệ có thể ổn định tiệm cận nhưng tốc độ dần về 0 có thể chậm hơn thì sự hiểu biết về tốc độ ổn định của hệ cũng quan trọng đối với nhiều bài toán hệ điều khiển thực. Mặt khác, đối với một vài phương trình vi phân ngẫu nhiên, dường như sẽ hữu ích nếu ta mở rộng việc phân tích ổn định mũ thông thường bởi việc phân tích ổn định với một lớp hàm phân rã ổn định tổng quát hơn. Sau đây chúng ta hãy nghiên cứu các ví dụ sau:

Ví dụ 0.1. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô một chiều

$$dX_t = -\frac{l}{1+t}X_t dt + (1+t)^{-l}dW_t, \quad t \geq 0,$$

với điều kiện ban đầu $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^1$, trong đó $l > \frac{1}{2}$ là một hằng số và W_t là một chuyển động Brown một chiều.

Dễ dàng thấy phương trình có nghiệm hiển

$$X_t = (x_0 + W_t)(1+t)^{-l}, \quad t \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{t} \log |X_t| = \frac{1}{t} \log |x_0 + W_t| - \frac{l}{t} \log (1 + t).$$

Ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log (1 + t) = 0.$$

Mặt khác, theo luật lôgarít lặp,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x_0 + W_t| &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|x_0 + W_t|}{\sqrt{2t \log \log t}} \cdot \frac{\sqrt{2t \log \log t}}{t} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2t \log \log t}}{t} = 0 \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Do đó, số mũ Lyapunov của nghiệm X_t

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |X_t| = 0 \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Tuy nhiên, chúng ta lại thấy rằng

$$\frac{1}{\log t} \log |X_t| = \frac{\log |x_0 + W_t|}{\log t} - l \frac{\log (1 + t)}{\log t},$$

và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log (1 + t)}{\log t} = 1.$$

Hơn nữa từ luật lôgarít lặp ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$\frac{\log |x_0 + W_t|}{\log t} = \frac{1}{2}.$$

Vậy,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log |X_t| = -l + \frac{1}{2} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Tức là, quỹ đạo của nghiệm hiển X_t tiến tới 0 với tốc độ giảm của hàm lũy thừa t^α ($\alpha \approx -l + \frac{1}{2}$) với xác suất một.

Thực tế ta thấy có những phương trình mà nghiệm của nó tiến tới không còn chậm hơn hàm lũy thừa. Thật vậy, xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 0.2. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô một chiều

$$dX_t = - \left(\frac{1}{2(1+t)} + \frac{q}{(1+t)\log(1+t)} \right) X_t dt + (1+t)^{-1/2} (\log(1+t))^{-q} dW_t, \quad t \geq 0,$$

với điều kiện ban đầu $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^1$, trong đó $q \geq 0$ là một hằng số không âm và W_t là một chuyển động Brown một chiều.

Dễ dàng thấy phương trình có nghiệm hiển

$$X_t = (x_0 + W_t) (1+t)^{-1/2} (\log(1+t))^{-q}, \quad t \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{\log t} \log |X_t| = \frac{\log |x_0 + W_t|}{\log t} - \frac{1}{2} \frac{\log(1+t)}{\log t} - q \frac{\log \log(1+t)}{\log t}.$$

Ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\log(1+t)}{\log t} - q \frac{\log \log(1+t)}{\log t} \right\} = -\frac{1}{2}.$$

Vì vậy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log |X_t| = 0 \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Tức là, nghiệm tại thời điểm này không ổn định đa thức. Tuy nhiên, nếu $q > 0$, thì nghiệm là ổn định với tốc độ $O(\log t)$. Thật vậy, từ công thức của nghiệm hiển X_t ta có

$$\frac{1}{\log \log t} \log |X_t| = \frac{\log |x_0 + W_t| - \frac{1}{2} \log(1+t)}{\log \log t} - q \frac{\log \log(1+t)}{\log \log t}.$$

Dễ thấy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log (1+t)}{\log \log t} = 1.$$

Hơn nữa từ luật lôgarít lặp, ta suy ra với mọi $\varepsilon > 0$ và t đủ lớn ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\log |x_0 + W_t| - \frac{1}{2} \log (1+t)}{\log \log t} \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{(\log t - \log (1+t))}{\log \log t} + \frac{\log \log \log t}{\log \log t} + \frac{\log (1+\varepsilon)}{\log \log t}. \end{aligned}$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log \log \log t}{\log \log t} + \frac{\log (1+\varepsilon)}{\log \log t} \right\} = 0; \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\log t - \log (1+t))}{\log \log t} = 0. \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log t} \log |X_t| \leq -q \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Lẽ tự nhiên, câu hỏi nảy sinh từ các ví dụ trên là: Chúng ta có thể xét sự ổn định với hàm phân rã tổng quát thay cho hàm mũ của một vài phương trình vi phân ngẫu nhiên được không? Nói cách khác, cho một hàm tốc độ dương, tăng thích hợp $\lambda(t)$, với giả thiết nào thì nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên tiệm cận về 0 với hàm vận tốc $\lambda(t)$ đã cho?

Bài toán ổn định tiệm cận theo nghĩa mô men cấp p hoặc ổn định tiệm cận hầu chắc chắn của phương trình ngẫu nhiên đã được nghiên cứu nhiều trong các tài liệu. Arnold [1], Bell và Mohammed [2], Has'minskii [3] Ladde và Lakshmikantham [4], Lakshmikantham [5], Kolmanovskii và Myshkis [6], và Kolmonovskii và Nosov [7] đã đưa ra các điều kiện đủ (và trong một vài trường hợp là điều kiện cần) cho một số phương trình

vi phân ngẫu nhiên, chẳng hạn như phương trình vi phân trễ, phương trình hàm để đảm bảo cho ổn định tiệm cận mũ trên không gian hữu hạn chiều. Một vài kết quả đã được mở rộng lên không gian vô hạn chiều cho các nghiệm mạnh hoặc nghiệm yếu bởi Chow [8], Haussmann [9], và Ichikawa [10].

Luận văn này đề cập đến sự ổn định hầu chắc chắn với các hàm phân rã tổng quát nào đó. Đó là loại ổn định mà người ta thường thấy trong các bài toán vật lý. Chúng ta sẽ phát triển một chương trình Lyapunov với các tiêu chuẩn ổn định hầu chắc chắn có quan hệ tới các phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô tổng quát. Để dễ hiểu, chúng ta nghiên cứu phương trình vi phân ngẫu nhiên theo chuyển động Brown mặc dù có thể mở rộng hầu hết các kết quả với Mactingale tổng quát. Cụ thể:

Chương 1 nêu ra một số kiến thức cơ bản mà luận văn sử dụng; Thành lập một vài kết quả sơ lược liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên và các phép toán có vai trò quan trọng trong những phần sau; Đưa ra một định nghĩa chính xác về tính ổn định hầu chắc chắn với một hàm phân rã tổng quát.

Chương 2 xét sự ổn định của các phương trình ngẫu nhiên Itô tổng quát và đưa ra các điều kiện đủ khác nhau đảm bảo đáng điệu ổn định hầu chắc chắn với hàm phân rã tổng quát.

Chương 3 tập trung thiết lập các kết quả ổn định cho một lớp các hệ ngẫu nhiên bị nhiễu.

Chương 4 nói về các phương trình ngẫu nhiên với thời gian trễ.

Trong mỗi một chương, một số ví dụ được nghiên cứu để minh họa cho lý thuyết.

Để hoàn thành được luận văn này, Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn

sâu sắc đến TS Lê Hồng Lan - Trưởng Khoa Khoa học cơ bản - Trường Đại học Giao thông Vận tải, người đã trực tiếp hướng dẫn tác giả; Đồng thời Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến GS.TS Nguyễn Hữu Dư và nhóm Semina của Bộ môn Toán sinh thái - Khoa Toán - Trường Đại học Khoa học Tự nhiên đã giúp đỡ tác giả rất nhiệt tình trong việc góp ý, tìm tài liệu tham khảo và bổ trợ kiến thức để hoàn thành tốt luận văn này.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những khiếm khuyết, sai sót, vì vậy Tác giả rất mong được các Thầy Cô giáo và bạn bè đồng nghiệp góp ý kiến chân thành để kết quả luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Các kiến thức cơ bản

Dưới đây là một số kiến thức cơ bản được sử dụng trong luận văn.

1.1.1 Công thức Itô

a. Công thức Itô một chiều.

Lấy $x(t)$, $t \geq 0$ là một quá trình Itô một chiều có vi phân ngẫu nhiên

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dW_t$$

với $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ và $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$. Lấy $V \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$. Khi đó $V(x(t), t)$ cũng là một quá trình Itô với vi phân ngẫu nhiên xác định bởi

$$dV(x(t), t) = [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t)]dt + V_x(x(t), t)g(t)dW_t.$$

b. Công thức Itô nhiều chiều.

Lấy $x(t)$, $t \geq 0$ là một quá trình Itô n - chiều có vi phân ngẫu nhiên

$$dx(t) = f(t) dt + g(t) dW_t$$

với $f(x, t) = (f^1, \dots, f^n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $g(x, t) = (g^{ij})_{n \times m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ là hai hàm Borel; còn W_t là chuyển động Brown m - chiều. Cho $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R})$. Khi đó $V(x(t), t)$ cũng là một quá trình Itô với vi phân ngẫu nhiên xác định bởi

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) = & [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) f(t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(x, t) g^{jk}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(x, t)] dt \\ & + V_x(x(t), t) g(t) dW_t \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

1.1.2 Bổ đề Borel - Cantelli

Cho $\{A_k\}$ là một dãy các tập trong $\mathcal{F}$. Định nghĩa giới hạn trên của dãy $\{A_k\}$ xác định bởi công thức

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \left\{ \omega : \omega \in A_k \text{ với vô số chỉ số } k \right\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k.$$

Bổ đề Borel - Cantelli phát biểu rằng

1. Nếu $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, thì

$$P\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = 0.$$

Có nghĩa là tồn tại một tập $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ với $P(\Omega_0) = 1$ và một biến ngẫu nhiên giá trị nguyên k_0 sao cho với mọi $\omega \in \Omega_0$ ta có $\omega \notin A_k$ với bất kì $k \geq k_0(\omega)$.

2. Nếu dãy $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ là độc lập và $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$, thì

$$P\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k\right) = 1.$$

Có nghĩa là tồn tại một tập $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ với $P(\Omega_0) = 1$ sao cho với mọi $\omega \in \Omega_0$ tồn tại một dãy con $\{A_{k_i}\}$ sao cho ω luôn thuộc A_{k_i} .

1.1.3 Bất đẳng thức Gronwall

Chọn $T > 0$ và $c \geq 0$. Chọn $u(\cdot)$ là một hàm Borel không âm, bị chặn, đo được trên $[0; T]$, và $v(\cdot)$ là một hàm khả tích không âm trên $[0; T]$. Khi đó, nếu

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s) u(s) ds \quad \text{với mọi } 0 \leq t \leq T$$

thì

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s) ds\right) \quad \text{với mọi } 0 \leq t \leq T.$$

1.1.4 Tính tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất đầy đủ với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ thỏa mãn các điều kiện thông thường (tức là, nó liên tục phải và $\mathcal{F}_0$ chứa mọi tập P có độ đo không). Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô n -chiều

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + g(x(t), t) dW(t) \quad \text{trên } t_0 \leq t \leq T$$

với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Trong đó $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))^T$, $t \geq 0$ là một chuyển động Brown m -chiều; x_0 là một biến

ngẫu nhiên $\mathcal{F}_{t_0}$ đo được và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với $t_0 \leq t < T < \infty$; $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $g : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ là hai hàm Borel. Sau đây là định lý về tính tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên vừa cho:

Định lý 1.1. *Giả sử tồn tại hai hằng số dương $\overline{K}$ và K sao cho*

(i.) (Điều kiện lipschitz) *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \in [t_0, T]$*

$$|f(x, t) - f(y, t)|^2 \vee |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq \overline{K}|x - y|^2;$$

(ii.) (Điều kiện tăng không quá tuyến tính) *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$*

$$|f(x, t)|^2 \vee |g(x, t)|^2 \leq K \left(1 + |x|^2\right).$$

Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $x(t)$ của phương trình đã cho và nghiệm này thuộc $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$.

1.2 Một số bổ đề quan trọng

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ với một bộ lọc liên tục phải $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ chứa mọi tập P có độ đo không của $\mathcal{F}$. Cho $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T$, $t \geq 0$ là một chuyển động Brown m – chiều. Xét một phương trình vi phân ngẫu nhiên n – chiều

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dW_t, t \geq 0, \\ X_0 = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

trong đó $f(x, t) = (f^1, \dots, f^n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $g(x, t) = (g^{ij})_{n \times m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ là hai hàm Borel; x_0 là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$ – đo được nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$. Đặc biệt, trong suốt luận văn này chúng ta

sẽ giả sử rằng Phương trình 1.1 có một nghiệm toàn cục duy nhất được kí hiệu là $X_t(x_0) \in \mathbb{R}^n$.

Kí hiệu $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, hoặc đơn giản $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ là họ tất cả các hàm $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ có đạo hàm riêng cấp 2 theo x và đạo hàm riêng cấp một theo t là các hàm liên tục. Nếu $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$, ta định nghĩa các toán tử L và Q như sau:

$$\begin{aligned} LV(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + \sum_{i=1}^n f^i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V(x, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(x, t) g^{jk}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(x, t) \end{aligned}$$

và

$$QV(x, t) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(x, t) g^{jk}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} V(x, t).$$

Cho $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{n \times m})$ là họ tất cả các quá trình tương thích $\mathcal{F}_t$ dự báo được; $g = \{g(t)\}_{t \geq 0}$ lấy giá trị trong tập hợp các ma trận cấp $n \times m$ sao cho với mọi $T > 0$,

$$\int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{hầu chắc chắn,}$$

trong đó $|\cdot|$ biểu thị cho chuẩn ma trận.

Sau đây là một bổ đề có vai trò quan trọng trong luận văn.

Bổ đề 1.1 (Bất đẳng thức mactinganle dạng mũ). *Cho $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^{1 \times m})$ và T, α, β là các số dương bất kì. Khi đó*

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t g(s) dW_s - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \right] > \beta \right\} \leq e^{-\alpha\beta}. \quad (1.2)$$

Chứng minh. Xem tài liệu tham khảo [11]. □

Ngoài ra, trong quá trình chứng minh các kết quả chính của luận văn, chúng ta còn sử dụng đến các bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.2. Cho $T > 0$ và $g(t)$ là hàm liên tục không âm xác định trên $[0, T]$. Giả sử $h(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm Borel bị chặn và $h_0 > 0$ là một hằng số dương. Giả sử

$$h(t) \leq h_0 + \int_0^t g(s) h(s) (h(s) + 1) ds$$

đúng với mọi $0 \leq t \leq T$. Khi đó,

$$h(t) \leq \frac{h_0 e^{\int_0^t g(s) ds}}{1 - (e^{\int_0^t g(s) ds} - 1)h_0}$$

đúng với mọi $t \in [0, T]$ sao cho $(e^{\int_0^t g(s) ds} - 1)h_0 < 1$.

Chứng minh. Xem tài liệu tham khảo [12]. □

Bổ đề dưới đây về bất đẳng thức Gronwall mở rộng sẽ được dùng để giải quyết tính ổn định theo quỹ đạo cho hàm Lyapunov dạng lũy thừa phân thức.

Bổ đề 1.3 (Bất đẳng thức Gronwall mở rộng). Giả sử $h(t), u(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^+)$ là các hàm liên tục không âm. Cho $w(t)$ là một hàm liên tục, không âm và không giảm xác định trên $[0, T]$. $0 \leq \alpha \leq 1$. Giả sử

$$h(t) \leq w(t) + \int_0^t u(s) h(s)^\alpha ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Khi đó,

$$h(t) \leq \left\{ w(t)^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t u(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Chứng minh. Xem tài liệu tham khảo [12]. □

Cho $l > 0$ và $\delta(.) : [0, +\infty) \rightarrow [0, l]$ là hàm liên tục bị chặn nào đó. Bổ đề sau sẽ được sử dụng để nghiên cứu tính ổn định của các phương trình vi phân ngẫu nhiên với thời gian trễ.

Bổ đề 1.4. *Giả sử $T > l > 0$ và $h(t)$ là một hàm liên tục, không âm xác định trên $[-l, T]$. Chọn $w(t)$ là hàm liên tục, không âm, không giảm xác định trên $[0, T]$ và $u(t), v(t)$ là hai hàm liên tục, không âm xác định trên $[0, T]$. Khi đó, nếu*

$$h(t) \leq w(t) + \int_0^t u(s) h(s) ds + \int_0^t v(s) h(s - \delta(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

thì với $0 \leq t \leq T$, ta có

$$h(t) \leq \left(w(t) + \int_0^l v(s) ds \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] \right) \cdot \exp \left\{ \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) ds \right\}. \quad (1.4)$$

Chứng minh. Đặt

$$z(t) = w(t) + \int_0^t u(s) h(s) ds + \int_0^t v(s) h(s - \delta(s)) ds$$

thì $z(t)$ là hàm không giảm. Từ (1.3) chúng ta có

$$h(t) \leq z(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.5)$$

Hơn thế nữa, vì $\delta(.) \in [0; l]$ nên:

* Với $0 \leq s \leq l$ ta có $-l \leq s - \delta(s) \leq l$. Do vậy,

$$- \text{ Nếu } -l \leq s - \delta(s) \leq 0 \text{ thì } h(s - \delta(s)) \leq \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right].$$

$$- \text{ Nếu } 0 \leq s - \delta(s) \leq l \text{ thì theo (1.5) ta có } h(s - \delta(s)) \leq z(s).$$

Từ đó ta có

$$h(s - \delta(s)) \leq \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] + z(s), \quad 0 \leq s \leq l.$$

* Với $l \leq s \leq T$ ta có $0 \leq s - \delta(s) \leq T$. Do đó, theo (1.5) ta có

$$h(s - \delta(s)) \leq z(s), \quad l \leq s \leq T.$$

Vì vậy, với $0 \leq t \leq T$ ta có

$$\begin{aligned} z(t) &\leq w(t) + \int_0^t u(s) z(s) ds + \int_0^l v(s) \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t v(s) z(s) ds \\ &\leq w(t) + \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] \int_0^l v(s) ds \\ &\quad + \int_0^t (u(s) + v(s)) z(s) ds. \end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng bổ đề Gronwall ta có

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \left(w(t) + \int_0^l v(s) ds \cdot \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] \right) \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \int_0^t u(s) ds + \int_0^t v(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Thay kết quả này vào (1.5) ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.5. Giả sử $T > l > 0$ và $h(t)$ là một hàm liên tục, không âm, xác định trên $[-l, T]$. Lấy $w(t)$ là một hàm liên tục, không âm, không giảm, xác định trên $[0, T]$ và $u(t), v(t)$ là hai hàm liên tục, không âm. $0 \leq \beta < 1$ và $\delta(t)$ được định nghĩa như ở trên. Khi đó, nếu

$$h(t) \leq w(t) + \int_0^t u(s) h(s) ds + \int_0^t v(s) h(s - \delta(s))^\beta ds, \quad (1.6)$$

thì ta có

$$h(t) \leq \exp \left\{ \left(\frac{1}{1-\beta} \right) \int_0^t u(s) ds \right\} \cdot \left(N(t)^{1-\beta} + (1-\beta) 2^\beta \int_0^t v(s) ds \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (1.7)$$

$$\text{với } N(t) = w(t) + \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right]^\beta \int_0^l v(s) ds.$$

Chứng minh. Đặt

$$z(t) = w(t) + \int_0^t u(s) h(s) ds + \int_0^t v(s) h(s - \delta(s))^\beta ds$$

thì $z(t)$ là hàm không giảm. Từ (1.6) chúng ta có

$$h(t) \leq z(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.8)$$

Hơn thế nữa, tương tự như lý luận trong chứng minh Bổ đề 1.4 ta có

$$h(s - \delta(s)) \leq \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right] + z(s), \quad 0 \leq s \leq l$$

và

$$h(s - \delta(s)) \leq z(s), \quad l \leq s \leq T$$

Do đó, với chú ý $(|a| + |b|)^v \leq 2^v (|a|^v + |b|^v)$ với a, b là số thực bất kì và $v > 0$, chúng ta có

$$\begin{aligned} z(t) &\leq w(t) + \int_0^t u(s) z(s) ds + 2^\beta \int_0^l v(s) \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right]^\beta ds \\ &\quad + 2^\beta \int_0^t v(s) z(s)^\beta ds \\ &\leq w(t) + \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right]^\beta \int_0^l v(s) ds + 2^\beta \int_0^t v(s) z(s)^\beta ds \\ &\quad + \int_0^t u(s) z(s) ds. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Bây giờ, sử dụng bổ đề Gronwall ta có

$$z(t) \leq \left\{ w(t) + \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right]^\beta \int_0^t v(s) ds + 2^\beta \int_0^t v(s) z(s)^\beta ds \right\} \\ \cdot \exp \left(\int_0^t u(s) ds \right).$$

Đặt $N(t) = w(t) + \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} h(r) \right]^\beta \int_0^t v(s) ds$, ta có

$$z(t) \leq N(t) \exp \left(\int_0^t u(s) ds \right) \\ + \left(2^\beta \int_0^t v(s) z(s)^\beta ds \right) \exp \left(\int_0^t u(s) ds \right).$$

Sử dụng bổ đề 1.3 ta có

$$z(t) \leq \left\{ \left[N(t) \exp \left(\int_0^t u(s) ds \right) \right]^{1-\beta} + \exp \left(\int_0^t u(s) ds \right) \right. \\ \left. \cdot 2^\beta (1-\beta) \int_0^t v(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \\ \leq \exp \left(\frac{1}{1-\beta} \int_0^t u(s) ds \right) \left\{ N(t)^{1-\beta} \right. \\ \left. + 2^\beta (1-\beta) \int_0^t v(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\beta}},$$

khi đó điều cần chứng minh (1.7) được suy ra từ (1.8). $\square$

Chúng ta kết thúc chương này bằng việc đưa ra định nghĩa tính ổn định hầu chắc chắn với hàm vận tốc phân rã $\lambda(t)$ của phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng (1.1).

Định nghĩa 1.1. Giả sử hàm dương $\lambda(t) \uparrow +\infty$, khi $t \rightarrow +\infty$, xác định với mọi t đủ lớn, tức là $t \geq T \geq 0$. Giả sử:

1. $\log \lambda(t)$ là liên tục đều trên $t \geq T$.

2. Tồn tại một hằng số không âm $\tau \geq 0$ sao cho

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} \leq \tau.$$

3. Với mọi $s, t \geq T$: $\lambda(s)\lambda(t) \geq \lambda(s+t)$.

Phương trình (1.1) hoặc nghiệm của nó được gọi là ổn định hầu chắc chắn với hàm vận tốc $\lambda(t) > 0$ với cấp $\gamma > 0$ nếu và chỉ nếu

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\gamma \quad \text{hầu chắc chắn} \quad (1.10)$$

với mọi x_0 là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$ - đo được, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$.

Rõ ràng, nếu hàm phân rã $\lambda(t)$ là e^t , $t > 0$ thì dẫn tới ổn định mũ thông thường.

CHƯƠNG 2

ỔN ĐỊNH HẦU CHẮC CHẮN

Trong chương này chúng ta sẽ sử dụng hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định hầu chắc chắn của phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô có hệ số biến thiên theo thời gian

$$dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

trong đó $f(x, t)$ và $g(x, t)$ là các hàm được giả thiết thoả mãn các điều kiện thông thường để đảm bảo tính tồn tại và duy nhất nghiệm.

Ta cũng lưu ý rằng, trong chương này ta sử dụng τ được cho trong Định nghĩa 1.1, tức là

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} \leq \tau.$$

2.1 Định lý

Định lý 2.1. *Giả sử $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ và $\psi_1(t), \psi_2(t)$ là hai hàm liên tục không âm. Giả sử rằng tồn tại các hằng số dương $p > 0$, $m > 0$ và các số thực μ, ν, θ và $\xi(t) > 0$ là một hàm không giảm sao cho*

1. $|x|^p \lambda(t)^m \leq V(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+;$
2. $LV(x, t) + \xi(t) QV(x, t) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t) V(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+;$
3. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\log \lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta$
 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$

Khi đó nghiệm của Phương trình (2.1) thỏa mãn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - [\theta + \tau + (\nu \vee \mu)]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn} \quad (2.2)$$

với x_0 là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$ - đo được, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Từ công thức Itô và định nghĩa của L và Q , ta có

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &= V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, s) ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Do tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$ ta suy ra: với bất kì $\epsilon > 0$ tồn tại hai số nguyên dương $N = N(\epsilon)$ và $k_1 = k_1(\epsilon)$ sao cho nếu $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon)$ thì ta có

$$\left| \log \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \log \lambda(t) \right| \leq \epsilon.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức mactinganle dạng mũ, ta có

$$\begin{aligned} P \left\{ \omega : \sup_{0 \leq t \leq w} \left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \frac{u}{2} QV(X_s, s) ds \right] > v \right\} \leq e^{-uv} \end{aligned}$$

với u, v và w là các hằng số dương bất kì.

Đặc biệt, lấy

$$u = 2\xi \left(\frac{k}{2^N} \right), \quad v = \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

và áp dụng bổ đề Borel-Cantelli ta suy ra tồn tại một số nguyên $k_0(\epsilon, \omega) > 0$ với hầu khắp $\omega \in \Omega$ sao cho

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k \\ \leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right) \int_0^t QV(X_s, s) ds \end{aligned}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Thay kết quả này vào (2.3) và sử dụng điều kiện 2 ta thấy

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, s) ds \\ &\quad + \int_0^t \xi \left(\frac{k}{2^N} \right) QV(X_s, s) ds \\ &\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, s) ds \\ &\quad + \int_0^t \xi(s) QV(X_s, s) ds \\ &\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) \\ &\quad + \int_0^t [\psi_1(s) + \psi_2(s)V(X_s, s)] ds \end{aligned} \tag{2.4}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Gronwall ta suy ra

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &\leq \left[V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \int_0^t \psi_1(s) ds \right] \\ &\quad \cdot \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right) \quad \text{hầu chắc chắn,} \end{aligned} \tag{2.5}$$

với $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \log V(X_t, t) &\leq \log \left[V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \int_0^t \psi_1(s) ds \right] \\ &\quad + \int_0^t \psi_2(s) ds \\ &\leq \log \left\{ \left[V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} + \int_0^t \psi_1(s) ds \right] \right. \\ &\quad \cdot \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) \left. \right\} + \int_0^t \psi_2(s) ds \quad \text{hầu chắc chắn,} \end{aligned}$$

với $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Vì vậy, từ điều kiện 3 của định lý và tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$ ta suy ra: với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên dương $k_2(\epsilon, \omega)$ sao cho

$$\begin{aligned} \log V(X_t, t) &\leq \log \left[V(x_0, 0) + \lambda \left(\frac{k}{2^N} \right)^{(\mu+\epsilon)} + \lambda(t)^{(\nu+\epsilon)} \right] \\ &\quad + \log \log \frac{k-1}{2^N} + (\theta + \epsilon) \log \lambda(t) \quad (2.6) \\ &\leq \log \left[V(x_0, 0) + e^{\epsilon(\mu+\epsilon)} \lambda(t)^{(\mu+\epsilon)} + \lambda(t)^{(\nu+\epsilon)} \right] \\ &\quad + \log \log \frac{k-1}{2^N} + (\theta + \epsilon) \log \lambda(t) \end{aligned}$$

với mọi $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$.

Do đó ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(X_t, t)}{\log \lambda(t)} \leq (\nu + \epsilon) \vee (\mu + \epsilon) + \tau + \theta + \epsilon.$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(X_t, t)}{\log \lambda(t)} \leq \nu \vee \mu + \tau + \theta.$$

Cuối cùng, sử dụng điều kiện 1 ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{\log [\lambda(t)^{-m} V(X_t, t)]}{\log \lambda(t)} \\ &\leq -\frac{m - [\nu \vee \mu + \tau + \theta]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 2.2. Lấy $V(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ và $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)$ là ba hàm liên tục không âm. Giả sử rằng tồn tại các hằng số dương $p > 0, m > 0$ và các số thực μ, θ, ν, ρ và $\xi(t) > 0$ là một hàm không giảm sao cho

1. $|x|^p \lambda(t)^m \leq V(x, t), (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+;$
2. $LV(x, t) + \xi(t) QV(x, t) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t) V(x, t) + \psi_3(t) V(x, t)^\alpha,$
 $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+;$
3. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\log \lambda(t)} \leq \theta, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \nu(1 - \alpha)$
 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_3(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \rho(1 - \alpha), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$

Khi đó nghiệm của phương trình (2.1) thỏa mãn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m - [\nu + \tau + \mu \vee \theta \vee \rho]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn}$$

với x_0 là một biến nhận giá trị ngẫu nhiên trong $\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_0$ - đo được.

Chứng minh. Chứng minh tương tự như Định lý 2.1, từ (2.4) ta suy ra hầu chắc chắn

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) \\ &\quad + \int_0^t (\psi_1(s) + \psi_2(s) V(X_s, s) + \psi_3(s) V(X_s, s)^\alpha) ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

với $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta suy ra hầu chắc chắn

$$V(X_t, t) \leq \left[V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \frac{k-1}{2^N} + \int_0^t \psi_1(s) ds + \int_0^t \psi_3(s) V(X_s, s)^\alpha ds \right] \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right)$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Áp dụng bổ đề 1.3, ta suy ra hầu chắc chắn

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &\leq \left\{ \left[\left(V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \int_0^t \psi_1(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right) \right]^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha) \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right) \int_0^t \psi_3(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq \left\{ \left[\left(V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \int_0^t \psi_1(s) ds \right)^{1-\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\alpha) \int_0^t \psi_3(s) ds \right] \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right) \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq \left\{ \left[\left(V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} + \int_0^t \psi_1(s) ds \right)^{1-\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t \psi_3(s) ds \right] \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp \left(\int_0^t \psi_2(s) ds \right) \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Do đó, từ điều kiện 3 và tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$ ta suy ra: với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên dương ngẫu nhiên $k_2(\epsilon, \omega)$ sao cho với mọi $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$ ta có hầu chắc

chấn

$$\log V(X_t, t) \leq \frac{1}{1-\alpha} \log \left\{ \left[V(x_0, 0) + e^{\epsilon(\mu+\epsilon)} \cdot \lambda(t)^{(\mu+\epsilon)} + \lambda(t)^{(\theta+\epsilon)} \right]^{1-\alpha} + \lambda(t)^{(1-\alpha)(\rho+\epsilon)} \right\} + (\nu + \epsilon) \log \lambda(t) + \log \log \frac{k-1}{2^N} + \epsilon.$$

Vì vậy

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(X_t, t)}{\log \lambda(t)} \leq (\mu + \epsilon) \vee (\theta + \epsilon) \vee (\rho + \epsilon) + \nu + \tau + \epsilon.$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log V(X_t, t)}{\log \lambda(t)} \leq \mu \vee \theta \vee \rho + \nu + \tau.$$

Cuối cùng, chúng ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{\log [\lambda(t)^{-m} V(X_t, t)]}{\log \lambda(t)} \\ &\leq -\frac{m - [(\mu \vee \theta \vee \rho) + \tau + \nu]}{p}. \end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Định lý sau, đặc biệt là hệ quả của nó, đóng vai quan trọng trong việc nghiên cứu cái gọi là làm ổn định ngẫu nhiên.

Định lý 2.3. *Giả sử nghiệm của phương trình 2.1 thỏa mãn $X_t(x_0) \neq 0$ với mọi $t \geq 0$ hầu chắc chắn với điều kiện $x_0 \neq 0$ hầu chắc chắn. Giả sử $V(x, t) \in C^{2,1}[(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+]$ và $\psi_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $\psi_2(t) \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$ là hai hàm thực liên tục. Giả sử rằng với mọi $x \neq 0$ và $t \geq 0$, tồn tại các hằng số $p > 0$, $m > 0$, $\gamma \geq 0$, $\mu \geq 0$, $1 > \alpha > 0$ và số thực $\theta \in \mathbb{R}^1$ sao cho*

$$1. |x|^p \lambda(t)^m \leq V(x, t), \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^+;$$

$$2. LV(x, t) \leq \psi_1(t) V(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

$$3. QV(x, t) \geq \psi_2(t) V^2(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

$$4. \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_1(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} \geq \frac{2\gamma}{1-\alpha},$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{\log \lambda(t)} \leq \frac{\mu\alpha}{2}.$$

Khi đó nghiệm của phương trình (2.1) thỏa mãn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m + \gamma - \theta - \mu}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Chứng minh. Cố định $x_0 \neq 0$ hầu chắc chắn.

Áp dụng công thức Itô suy ra

$$\log V(X_t, t) \leq \log V(x_0, 0) + M(t) + \int_0^t \left(\frac{LV(X_s, s)}{V(X_s, s)} - \frac{1}{2} \frac{QV(X_s, s)}{V^2(X_s, s)} \right) ds, \quad (2.9)$$

$$\text{trong đó } M(t) = \int_0^t \frac{1}{V(X_s, s)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k.$$

Do tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$, ta suy ra: với bất kì $\epsilon > 0$ tồn tại một số nguyên dương $N = N(\epsilon)$ và một số nguyên $k_1 = k_1(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon)$ thì ta có

$$\left| \log \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \log \lambda(t) \right| \leq \epsilon.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức martingale dạng mũ ta có

$$P \left\{ \omega : \sup_{0 \leq t \leq w} \left[M(t) - \int_0^t \frac{u}{2} \frac{1}{V^2(X_s, s)} QV(X_s, s) ds \right] > v \right\} \leq e^{-uv}$$

với bất kì các hằng số dương u, v và w .

Đặc biệt, lấy

$$u = \alpha, \quad v = 2\alpha^{-1} \log \frac{k-1}{2^N}, \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

và áp dụng bổ đề Borel-Cantelli ta suy ra: tồn tại một số nguyên $k_0(\epsilon, \omega) > 0$ với hầu hết mọi $\omega \in \Omega$ sao cho

$$M(t) \leq 2\alpha^{-1} \log \frac{k-1}{2^N} + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \frac{QV(X_s, s)}{V^2(X_s, s)} ds$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Thay kết quả này vào (2.9) và sử dụng các điều kiện 2 và 3 trong định lý, ta suy ra: với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên dương ngẫu nhiên $k_2(\epsilon, \omega)$ sao cho hầu chắc chắn

$$\begin{aligned} \log V(X_t, t) &\leq \log V(x_0, 0) + 2\alpha^{-1} \log \frac{k-1}{2^N} \\ &\quad + \int_0^t \psi_1(s) ds - \frac{1}{2}(1-\alpha) \int_0^t \psi_2(s) ds \end{aligned}$$

với mọi $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$.

Từ điều này và các điều kiện 1, điều kiện 4 trong định lý, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\log |X_t|}{\log \lambda(t)} &\leq \frac{\log V(X_t, t)}{p \log \lambda(t)} - \frac{m}{p} \\ &\leq \frac{1}{p \log \lambda(t)} \left(\log V(x_0, t) + 2\alpha^{-1} \log \frac{k-1}{2^N} + (\theta + \epsilon) \log \lambda(t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(1-\alpha)(1-\alpha)^{-1}(2\gamma + \epsilon) \log \lambda(t) \right) - \frac{m}{p}. \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{m + \gamma - \theta - \mu}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

Bằng phương pháp chứng minh tương tự, ta dễ dàng suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 2.1. *Giả sử nghiệm của phương trình 2.1 thỏa mãn $X_t(x_0) \neq 0$ với mọi $t \geq 0$ hầu chắc chắn với điều kiện $x_0 \neq 0$ hầu chắc chắn. Giả sử $V(x, t) \in C^{2,1}[(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+]$ và $\psi_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $\psi_2(t) \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$ là hai hàm thực liên tục. Giả sử rằng với mọi $x \neq 0$ và $t \geq 0$, tồn tại các hằng số $p > 0$, $m > 0$, $\gamma \geq 0$ và số thực $\theta \in \mathbb{R}^1$ sao cho*

1. $|x|^p \leq V(x, t)$, $(x, t) \in (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^+$;
2. $LV(x, t) \leq \psi_1(t) V(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$;
3. $QV(x, t) \geq \psi_2(t) V^2(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$;
4. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_1(s) ds}{t} \leq \theta$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{t} \geq 2\gamma$.

Khi đó nghiệm của phương trình (2.1) thỏa mãn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{t} \leq -\frac{\gamma - \theta}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

2.2 Ví dụ

Sau đây, ta đưa ra một vài ví dụ minh họa cho lý thuyết đã nêu ở trên. Đầu tiên, chúng ta xét ví dụ 0.1 đã cho trong phần mở đầu.

Ví dụ 2.1. Xét phương trình Itô tuyến tính một chiều

$$dX_t = -\frac{l}{1+t} X_t dt + (1+t)^{-l} g(X_t) dW_t, \quad t \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^1$, trong đó $l > \frac{1}{2}$ là một hằng số, $g(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm liên tục Lipschitz không tuyến tính với $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$, $M \geq 1$ (trường hợp $g(\cdot) = 1$ chúng ta có Ví dụ 0.1) và W_t là một chuyển động Brown một chiều.

Chúng ta xây dựng một hàm Lyapunov như sau:

$$V(x, t) = (1 + t)^{2l} x^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} LV(x, t) &= 2l(1 + t)^{2l-1} x^2 + (1 + t)^{2l} 2x \left(-\frac{l}{1 + t} x \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (1 + t)^{-l} g(x) \right\}^2 2(1 + t)^{2l} \\ &= g^2(x) \leq M^2; \\ QV(x, t) &= \left\{ (1 + t)^{-l} g(x) \right\}^2 \left\{ 2(1 + t)^{2l} x \right\}^2 \\ &= 4(1 + t)^{2l} x^2 g^2(x) \\ &= 4g^2(x) V(x, t) \leq 4M^2 V(x, t). \end{aligned}$$

Dễ dàng suy ra rằng với bất kì $\delta > 1$, ta có

$$LV(x, t) + \frac{1}{4(1 + t)^\delta M^2} QV(x, t) \leq M^2 + \frac{1}{(1 + t)^\delta} V(x, t).$$

Áp dụng định lý 2.1, ta có:

$$\begin{aligned} p &= 2, \quad m = 2l, \quad \lambda(t) = t, \quad \xi(t) = \frac{1}{4M^2(1 + t)^\delta}, \\ \psi_1(t) &= M^2, \quad \psi_2(t) = \frac{1}{(1 + t)^\delta}. \end{aligned}$$

Do đó, ta tính được

$$\begin{aligned} v &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \int_0^t \psi_1(s) ds}{\log \lambda(t)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log M^2 t}{\log t} = 1; \\ \theta &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \delta} \cdot \frac{(1 + t)^{1-\delta} - 1}{\log t} = 0 \quad (\text{do } \delta > 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{-\log 4M^2(1+t)^\delta}{\log t} \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{-[\log 4M^2 + \delta \log(1+t)]}{\log t} = -\delta \Rightarrow \mu = \delta;\end{aligned}$$

$$\tau = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log t} = 0.$$

Thay các kết quả vừa tính vào (2.2) ta được

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\left(l - \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Cho $\delta \rightarrow 1$, ta suy ra, với bất kì $l > \frac{1}{2}$, nghiệm của phương trình đã cho là ổn định đa thức hầu chắc chắn. Hơn nữa, chúng ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log |X_t| \leq -\left(l - \frac{1}{2}\right) \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Nhận xét 2.1. Thay đổi một chút trong Ví dụ 2.1, ta thu được hệ quả rõ ràng hơn sau đây.

Xét phương trình Itô một chiều

$$dX_t = -lX_t dt + (1+t)^{-l} dW_t, \quad t \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $X_0 = 0$, trong đó $l > 0$ là một hằng số.

Dễ thấy phương trình này có nghiệm hiển

$$X_t = e^{-lt} \int_0^t e^{ls} (1+s)^{-l} dW_s \equiv e^{-lt} M_t, \quad t \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{t} \log |X_t| = -l + \frac{1}{t} \log |M_t|.$$

Sử dụng luật lôgarít lặp

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{\sqrt{2 < M_t > \log \log < M_t >}} = 1 \quad \text{hầu chắc chắn,}$$

ta suy ra được: với mọi $\varepsilon > 0$ và t đủ lớn ta có

$$M_t \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{2 \langle M_t \rangle \log \log \langle M_t \rangle}.$$

Do đó

$$\frac{1}{t} \log |M_t| \leq \frac{1}{t} \left\{ \log(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log \langle M_t \rangle + \frac{1}{2} \log \log \log \langle M_t \rangle \right\}.$$

Ta tính được

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \log(1 + \varepsilon) + \frac{1}{2} \log 2 \right\} &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \log \log \langle M_t \rangle &= 0; \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^t e^{2ps} (1 + s)^{-2p} ds \right)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle M_t \rangle = 2p. \end{aligned}$$

Do đó ta có số mũ Lyapunov của X_t

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |X_t| = 0 \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Tuy nhiên, lựa chọn hàm Lyapunov thích hợp và sử dụng Định lí 2.1, ta suy ra, với bất kì $l > \frac{1}{2}$, nghiệm là ổn định đa thức. Hơn thế nữa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log |X_t| \leq - \left(l - \frac{1}{2} \right) \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Vậy là, mặc dù ổn định điển hình của phương trình vi phân thường

$$dX_t = -lX_t dt,$$

các hệ số phân rã dạng đa thức của tiếng ồn là không đủ để đảm bảo ổn định mũ của hệ nhiễu ngẫu nhiên của nó.

Nhận xét 2.2. Bằng phương pháp tương tự, với Ví dụ 0.2 chúng ta dễ dàng xây dựng một hàm Lyapunov như sau. Với $\delta > 0$ tùy ý, giả sử

$$V(x, t) = (\log(1 + t))^{2q+\delta} x^2, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Sử dụng Định lý 2.1 và cho $\delta \rightarrow 0$, chúng ta thu được là nếu $q > 0$, nghiệm là ổn định lôgarít hầu chắc chắn. Hơn thế nữa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log \log t} \log |X_t| \leq -q \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Ví dụ 2.2. Cho W_t là một chuyển động Brown hai chiều. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên hai chiều sau đây

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= (t+1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} dt \\ &\quad + (t+1)^{-0.5} f(x, y, t) dW_t \end{aligned}$$

với điều kiện đầu $x(0) = x_0$ và $y(0) = y_0$, trong đó $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ là liên tục Lipschitz và

$$|f(x, y, z)|^2 \leq \frac{K}{1 + x^2 + y^2} (|x| + |y|)^{\frac{1}{2}},$$

với K là một hằng số dương.

Xét hàm Lyapunov sau:

$$V(x, y, t) = 100(1 + t)^4 (17x^2 + 26xy + 10y^2).$$

Chúng ta có

1. $V(x, y, t) \geq (1 + t)^4 (x^2 + y^2),$
2. $LV(x, y, z) + (1 + t)^{-3.75} QV(x, y, z) \leq 100(1 + t)^3 (4 [17x^2 + 26xy$

$$\begin{aligned}
& +10y^2] - 70x^2 - 1008xy - 42y^2) + c_1(1+t)^{4-1}(|x|+|y|)^{\frac{1}{2}} \\
& + c_2(1+t)^{8-1-3.75}(|x|+|y|)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq c_3(1+t)^{3.25}(|x|+|y|)^{\frac{1}{2}} \leq c_4(1+t)^{0.25}V(x,y,t)^{\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

trong đó c_i ($1 \leq i \leq 4$) là tất cả các hằng số dương.

Do đó, áp dụng định lý 2.2 ta suy ra

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log (x^2(t) + y^2(t)) \leq -0.125 \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Ví dụ 2.3. Cho các số thực $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, xét phương trình vi phân ngẫu nhiên một chiều sau đây

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + \beta X_t dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 = x_0 \neq 0, \end{cases}$$

với W_t là quá trình Wiener chuẩn một chiều.

Đầu tiên, từ phương trình đã cho, ta có $f(0, t) = 0$ và $g(0, t) = 0$. Vì nghiệm của phương trình là duy nhất, từ $x_0 = 0$ suy ra $X_t = 0$, $t \geq 0$, hầu chắc chắn. Do đó, lý luận đơn giản như trong Tài liệu tham khảo [13], ta có

$$P\{\omega : X_t(x_0) \neq 0 \text{ với mọi } t \geq 0\} = 1$$

với điều kiện là $x_0 \neq 0$ hầu chắc chắn.

Xét hàm Lyapunov sau

$$V(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng với mọi $x \in \mathbb{R}^1, t \geq 0$,

$$LV(x, t) = -2\alpha x^2 + \beta^2 x^2 = [-2\alpha + \beta^2] V(x)$$

và

$$QV(x, t) = 4\beta^2 V^2(x).$$

Do đó, áp dụng Hệ quả 2.3 ta suy ra với bất kì số thực $\beta \in \mathbb{R}^1$, nghiệm của phương trình là ổn định mũ hầu chắc chắn. Hơn thế nữa,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(x_0)|}{t} \leq - \left[\frac{\beta^2}{2} + \alpha \right] \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Nhận xét 2.3. Chú ý là kết quả trong Ví dụ 2.3 trực quan rõ ràng. Thực vậy, dễ thấy phương trình có nghiệm hiển sau

$$X_t = x_0 \exp \left\{ \beta W_t - \left(\alpha + \frac{\beta^2}{2} \right) t \right\}, \quad t \geq 0.$$

Do đó, với bất kì $\beta \in \mathbb{R}^1$ nghiệm là ổn định hầu chắc chắn. Tuy nhiên, bằng tính toán trực tiếp, nghiệm là ổn định mũ mômen cấp hai chỉ nếu $\alpha > \frac{\beta^2}{2}$. Trong Tài liệu tham khảo [9], dựa vào lý luận nửa nhóm của phương trình tiến hóa, để nhận được các kết quả về sự ổn định hầu chắc chắn cho một số phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2 ngẫu nhiên, Haussmann chỉ ra rằng dưới giả thiết khá hạn chế thì nghiệm nhẹ (mild solution) là ổn định mũ hầu chắc chắn. Điều này được suy ra như hệ quả của ổn định mô men cấp hai.

Ví dụ 2.4. Giả sử $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ là bị chặn và đặt

$$\|A\| = \sup \{ \|A(t)\| : t \geq 0 \}.$$

Lấy W_t là một chuyển động Brown giá trị thực và μ là một hằng số sao cho $\mu^2 > 2\|A\|$. Khi đó, phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$dX_t = A(t) X_t dt + \mu X_t dW_t$$

là ổn định mũ hầu chắc chắn và mũ Lyapunov của nó hầu chắc chắn không lớn hơn $-(\mu^2/2 - \|A\|)$.

Thực vậy, chúng ta xây dựng một hàm Lyapunov $V(x, t) = |x|^2$. Khi đó

$$LV(x, t) = 2x^T A(t) x + \mu^2 |x|^2 \leq (\mu^2 + 2\|A\|) |x|^2,$$

$$QV(x, t) = 4\mu^2 |x|^4.$$

Vì vậy, áp dụng hệ quả 2.3 chúng ta dễ dàng suy ra

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t|}{t} \leq -\left(\frac{\mu^2}{2} - \|A\|\right) \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Có nghĩa là, một hệ tuyến tính bất kì $\dot{X}_t = A(t) X_t$ có thể được ổn định hóa bởi chuyển động Brown mà không cần thay đổi giá trị trung bình của nghiệm với điều kiện là $A(t)$ là bị chặn.

CHƯƠNG 3

SỰ ỔN ĐỊNH HẦU CHẮC CHẮN CỦA HỆ NHIỄU

3.1 Định lý

Trong chương này chúng ta sẽ xét phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:

$$dY_t = f(Y_t, t) dt + g(Y_t, t) dW_t + F(Y_t, t) dt + G(Y_t, t) dW_t \quad (3.1)$$

với $t \geq t_0 > 0$ và hệ không nhiễu tương ứng của nó là

$$dX_t = f(X_t, t) dt + g(X_t, t) dW_t \quad (3.2)$$

trong đó $f(x, t)$, $g(x, t)$ và W_t là các hàm được cho như trong chương 2 còn $F = (F^1, \dots, F^n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $G = (G^{ij})_{n \times m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ là hai hàm Borel. Cho một hệ ổn định, trong lý thuyết điều khiển ngẫu nhiên, nhiệm vụ cơ bản của giải tích vững là xác định loại nhiễu nào làm hệ không mất tính ổn định. Nói cách khác, nếu hệ (3.2) là ổn định (theo nghĩa thích hợp), thì với những giả thiết nào hệ (3.1) sẽ ổn định?

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu tính ổn định vững hầu chắc chắn của hệ tiến hóa ngẫu nhiên (3.1) và (3.2) với một hàm phân

ĩa tổng quát. Các phương trình sử dụng trong chương này đều được giả thiết là thỏa mãn các điều kiện thông thường để đảm bảo tính tồn tại và duy nhất của nghiệm toàn cục. Chúng ta kí hiệu các nghiệm là $Y_t(t_0, y_0)$ và $X_t(t_0, x_0)$ với điều kiện ban đầu lần lượt là $Y_{t_0} = y_0$ và $X_{t_0} = x_0$. Ta cũng lưu ý rằng trong chương này ta sử dụng $\tau \geq 0$ trong Định nghĩa 1.1, tức là tồn tại hằng số không âm $\tau \geq 0$ sao cho $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} \leq \tau$.

Định lý 3.1. *Giả sử tồn tại các hằng số dương δ, ρ, M , và hàm các không âm $\alpha(t), \beta(t), \nu(t)$ và $\xi(t)$ sao cho với mọi t_0 đủ lớn, $t \geq t_0$, tất cả $x, y \in \mathbb{R}^n$ và vectơ $X_{t_0} \in \mathbb{R}^n$ là $\mathcal{F}_{t_0}$ - đo được:*

$$1. |X_t(X_{t_0})|^2 \leq \rho |X_{t_0}|^2 \lambda(t - t_0)^{-\delta}, \quad \text{hầu chắc chắn, } t > t_0;$$

$$2. |f(x, t) - f(y, t)| \leq \alpha(t) |x - y|;$$

$$3. |g(x, t) - g(y, t)|^2 \leq \beta(t) |x - y|^2;$$

$$4. |F(x, t)| \leq \nu(t), \quad |G(x, t)|^2 \leq \beta(t);$$

$$5. \sup_{s \geq t_0} \int_s^{s+1} \alpha(u) du \leq M;$$

$$6. \int_{t-1}^t \nu(u) du \vee \int_{t-1}^t \beta(u) du \leq \xi(t);$$

trong đó $\xi(t) \downarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$ và thỏa mãn điều kiện là tồn tại một hằng số dương $p > \tau$ sao cho

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \leq -p.$$

Khi đó, nghiệm của Phương trình (3.1) có tính chất là

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |Y_t(y_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{\delta \wedge (p - \tau)}{2} \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

với y_0 là vectơ bất kì cho trước trong $\mathbb{R}^n$ và là $\mathcal{F}_{t_0}$ - đo được.

Chứng minh. Lấy $\epsilon > 0$ tùy ý và $T > 0$ là đủ lớn sao cho mọi giả thiết đúng với t , $t_0 \geq T$ và $4\rho T^{-\epsilon} \leq 1$.

Cố định $t_0 \geq T$ và một vectơ tùy ý $X_{t_0} = x_0$ là $\mathcal{F}_{t_0}$ - đo được.

Bước 1.

Vì tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$, ta suy ra với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên dương $N = N(\epsilon)$ và một số nguyên $k_1 = k_1(\epsilon) > 0$ sao cho với $\frac{k}{2^N} \leq t \leq \frac{k+1}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon)$, chúng ta có

$$\left| \log \lambda \left(\frac{k}{2^N} \right) - \log \lambda(t) \right| \leq \epsilon.$$

Đặt $Y_t(t_0, y_0) = Y_t$ và

$$X_t^k = X_t \left(\frac{kt_0}{2^N}, Y_{\frac{kt_0}{2^N}} \right), \quad t \geq \frac{kt_0}{2^N}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Đầu tiên ta sẽ chứng minh rằng với $\epsilon > 0$ ở trên, tồn tại một hằng số $C = C(\epsilon, \omega)$ và một số nguyên $\tilde{k} = \tilde{k}(\omega) > 0$ sao cho với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k \geq \tilde{k}$ ta có

$$|Y_t - X_t^k|^2 \leq C \cdot \lambda \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)}.$$

Áp dụng công thức Itô ta có

$$\begin{aligned} & |Y_t - X_t^k|^2 \\ &= 2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)] dW_s \\ &\quad + 2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T [f(Y_s, s) - f(X_s^k, s) + F(Y_s, s)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t \text{tr} [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)] [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) \\
& + G(Y_s, s)]^T ds
\end{aligned} \tag{3.3}$$

đúng với mọi $t \geq \frac{kt_0}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon)$.

Áp dụng bất đẳng thức mactingale dạng mũ ta có

$$\begin{aligned}
P \left\{ \omega : \sup_{\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq w} \left[\int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)] dW_s \right. \right. \\
- \frac{u}{2} \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T (g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)) \\
\cdot (g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s))^T (Y_s - X_s^k) ds \Big] > v \Big\} \leq e^{-uv}.
\end{aligned}$$

với bất kì các hằng số dương u , v và w .

Đặc biệt, lấy

$$u = \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1}, \quad v = 2\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N}, \quad w = \frac{(k+1)t_0}{2^N}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

và áp dụng bổ đề Borel – Cantelli ta suy ra: tồn tại một số nguyên $k_0(\epsilon, \omega) > 0$ với hầu hết mọi $\omega \in \Omega$ sao cho

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)] dW_s \\
& \leq 2\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + \frac{n}{2} \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t |Y_s - X_s^k|^2 |g(Y_s, s) - g(X_s^k, s)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +G(Y_s, s)|^2 ds \leq 2\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + n\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \\
& \times \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t \beta(s) \left[|Y_s - X_s^k|^2 + 1 \right] |Y_s - X_s^k|^2 ds
\end{aligned} \tag{3.4}$$

với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Mặt khác, từ giả thiết (2) và (4) trong định lý ta có

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t (Y_s - X_s^k)^T [f(Y_s, s) - f(X_s^k, s) + F(Y_s, s)] ds \\
& \leq \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t |Y_s - X_s^k| [\alpha(s) |Y_s - X_s^k| + v(s)] ds \\
& \leq \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t [\alpha(s) |Y_s - X_s^k|^2 + v(s) |Y_s - X_s^k|^4 + v(s)] ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Lại sử dụng giả thiết (3) và (4) trong định lý ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t \text{tr} [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)] \\
& \quad \times [g(Y_s, s) - g(X_s^k, s) + G(Y_s, s)]^T ds \\
& \leq 2n^2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t \beta(s) \left[|Y_s - X_s^k|^2 + 1 \right] ds. \\
& \leq 2n^2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^t \beta(s) \left[|Y_s - X_s^k|^4 + 2 \right] ds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Thay (3.3), (3.4), (3.5) vào (3.6) ta có hầu chắc chắn

$$\begin{aligned}
|Y_t - X_t^k|^2 &\leq 4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 2n\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \\
&\quad \times \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \beta(s) \left[|Y_s - X_s^k|^2 + 1 \right] |Y_s - X_s^k|^2 ds \\
&\quad + 4 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \left[\alpha(s) |Y_s - X_s^k|^2 + v(s) |Y_s - X_s^k|^4 + v(s) \right] ds \\
&\quad + 2n^2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \beta(s) \left[|Y_s - X_s^k|^4 + 2 \right] ds \\
&\leq 4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 4 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} (v(s) + \beta(s)) ds \\
&\quad + \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \left(2n\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \beta(s) + 4\alpha(s) + 4v(s) + 2n^2\beta(s) \right) \\
&\quad \cdot \left[|Y_s - X_s^k|^2 + 1 \right] |Y_s - X_s^k|^2 ds \\
&\leq 4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 4 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} (v(s) + \beta(s)) ds \\
&\quad + 2n^2 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \left[\left(1 + \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \right) (\beta(s) + v(s)) + \alpha(s) \right] \\
&\quad \cdot \left[|Y_s - X_s^k|^2 + 1 \right] |Y_s - X_s^k|^2 ds \tag{3.7}
\end{aligned}$$

với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Chú ý giả thiết 5 và 6, chúng ta có

$$\begin{aligned} \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} (v(s) + \beta(s)) ds &\leq \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \left\{ \int_s^{s+1} (v(u) + \beta(u)) du \right\} ds \\ &\leq 2 \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right) \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \end{aligned}$$

và

$$\int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} \alpha(s) ds \leq M \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right).$$

Do đó tồn tại một số nguyên ngẫu nhiên $k_2(\epsilon, \omega) > 0$ sao cho nếu $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$ thì

$$\begin{aligned} &\left[4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 4 \int_{\frac{kt_0}{2^N}}^{\frac{(k+1)t_0}{2^N}} (v(s) + \beta(s)) ds \right] \\ &\quad \cdot \exp \left(n^2 \int_{kt_0}^{(k+1)t_0} \left[\left(1 + \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-1} \right) (\beta(s) + v(s)) + \alpha(s) \right] ds - 1 \right) \\ &\leq \left[4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 8 \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right) \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left(\left[2n^2 \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right) (M + 1) \right] - 1 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng Bổ đề 1.2 cho (3.7) ta có

$$\begin{aligned} |Y_t - X_t^k|^2 &\leq 2 \left[4\xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \log \frac{kt_0}{2^N} + 8 \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right) \xi \left(\frac{kt_0}{2^N} \right) \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[2n^2 \left(\frac{t_0}{2^N} + 1 \right) (M + 1) \right], \end{aligned}$$

với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$.

Từ đó suy ra: với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên ngẫu nhiên $\tilde{k}(\sigma) \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$ sao cho

$$|Y_t - X_t^k|^2 \leq \frac{1}{4} \lambda \left(\frac{kt_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)}$$

với mọi $\frac{kt_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(k+1)t_0}{2^N}$, $k(\omega) \geq \tilde{k}(\omega)$ như yêu cầu.

Bước 2.

Bây giờ ta đi chứng minh

$$|Y_t|^2 \leq \left(1 + |Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}}|^2 \right) \lambda \left(\frac{it_0}{2^n} \right)^{-[(\delta-\epsilon) \wedge (p-\tau-\epsilon)]} \quad (3.8)$$

với mọi $\frac{(\tilde{k}+i)t_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(\tilde{k}+i+1)t_0}{2^N}$, $i \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Đầu tiên, sử dụng điều kiện 1 và kết quả chứng minh trong bước 1, với bất kì $\frac{(\tilde{k}+i)t_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(\tilde{k}+i+1)t_0}{2^N}$, ta có

$$\begin{aligned} |Y_t|^2 &\leq 2 \left| Y_t - X_t^{\tilde{k}} \right|^2 + 2 \left| X_t \left(\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}, Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\tilde{k}t_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)} + 2\rho \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \lambda \left(\frac{\tilde{k}t_0}{2^N} \right)^{-\delta} \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\tilde{k}t_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)} + \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\tilde{k}t_0}{2^N} \right)^{-(\delta-\epsilon)} \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \\ &\leq \left(1 + \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \right) \lambda \left(\frac{t_0}{2^N} \right)^{-[(p-\tau-\epsilon) \wedge (\delta-\epsilon)]}, \end{aligned}$$

có nghĩa là (3.8) đúng với mọi $i = 1$.

Giả sử nó đúng với $i \geq 1$ nào đó. Ta có, nếu $\frac{(\tilde{k}+i+1)t_0}{2^N} \leq t \leq \frac{(\tilde{k}+i+2)t_0}{2^N}$ thì

$$|Y_t|^2 \leq 2 \left| Y_t - X_t^{\tilde{k}+i} \right|^2 + 2 \left| X_t \left(\frac{(\tilde{k}+i)t_0}{2^N}, Y_{\frac{(\tilde{k}+i)t_0}{2^N}} \right) \right|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{(\tilde{k} + i) t_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)} + 2\rho \left| Y_{\frac{(\tilde{k}+i)t_0}{2^N}} \right|^2 \lambda \left(\frac{t_0}{2^N} \right)^{-\delta} \\
&\leq \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{(i+1) t_0}{2^N} \right)^{-(p-\tau-\epsilon)} + \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{t_0}{2^N} \right)^{-(\delta-\epsilon)} \\
&\quad \times \left(1 + \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \right) \lambda \left(\frac{it_0}{2^N} \right)^{-[(p-\tau-\epsilon) \wedge (\delta-\epsilon)]} \\
&\leq \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{(i+1) t_0}{2^N} \right)^{-[(p-\tau-\epsilon) \wedge (\delta-\epsilon)]} + \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{t_0}{2^N} \right)^{-[(\delta-\epsilon) \wedge (p-\tau-\epsilon)]} \\
&\quad \times \left(1 + \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \right) \cdot \lambda \left(\frac{it_0}{2^N} \right)^{-[(p-\tau-\epsilon) \wedge (\delta-\epsilon)]} \\
&\leq \left(1 + \left| Y_{\frac{\tilde{k}t_0}{2^N}} \right|^2 \right) \lambda \left(\frac{(i+1) t_0}{2^N} \right)^{-[(p-\tau-\epsilon) \wedge (\delta-\epsilon)]}.
\end{aligned}$$

Có nghĩa là (3.8) cũng đúng với $i+1$. Do đó (3.8) đã được chứng minh.

Bây giờ từ (3.8) suy ra

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |Y_t(y_0)|^2}{\log \lambda(t)} \leq -[(\delta - \epsilon) \wedge (p - \tau - \epsilon)] \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Vì ϵ là tùy ý, chúng ta có điều phải chứng minh

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |Y_t(y_0)|}{\log \lambda(t)} \leq -\frac{\delta \wedge (p - \tau)}{2} \quad \text{hầu chắc chắn,}$$

với mọi $t > t_0$ và vectơ y_0 là $\mathcal{F}_{t_0}$ - đo được. □

3.2 Ví dụ

Ví dụ 3.1. Xét dao động ngẫu nhiên tuyến tính

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = p(t)e^{-\rho t}\dot{W}_t, \quad t \geq t_0 (\geq 0),$$

trong đó $p(t)$ là một đa thức theo t , và a , b , và ρ là ba số thực dương.

W_t kí hiệu cho một chuyển động Brown một chiều.

Đặt $y = \dot{x}$, phương trình Itô tương ứng là

$$d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ p(t) e^{-\rho t} \end{bmatrix} dW_t,$$

phương trình này được xem như phương trình nhiễu của phương trình sau

$$d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} dt,$$

trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Chú ý là B và $-B$ có các giá trị riêng lần lượt là $\frac{1}{2} \left\{ -a \pm (a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \right\}$ và $\frac{1}{2} \left\{ a \pm (a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \right\}$.

Đặt $\lambda = \frac{1}{2} \left\{ -a \pm (a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \right\}$ và $\lambda_0 = \frac{1}{2} \left\{ a \pm (a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \right\}$. Từ Định lý 3.1, chúng ta có:

1. Nếu $a^2 \geq 4b$ và $\rho < \frac{a}{2}$, thì

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log (x^2(t) + \dot{x}^2(t)) &\leq -2\lambda + 2(\lambda_0 - \rho) \\ &= -2\rho + (a^2 - 4b)^{\frac{1}{2}} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

2. Nếu $a^2 < 4b$ và $\rho < \frac{a}{2}$, thì

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log (x^2(t) + \dot{x}^2(t)) \leq -2\rho \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

CHƯƠNG 4

SỰ ỔN ĐỊNH HẦU CHẮC CHẮN CỦA HỆ TRỄ NGẪU NHIÊN

4.1 Định lý

Lấy $l > 0$ và kí hiệu $C([-l, 0], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục xác định trên $[-l, 0]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$. Chúng ta giới thiệu một chuẩn trên không gian này:

$$\|u\|_l = \max \{|u(s)| : -l \leq s \leq 0\}, \quad u \in C([-l, 0], \mathbb{R}^n).$$

Kí hiệu $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; C([-l, 0], \mathbb{R}^n))$ là tất cả các biến ngẫu nhiên $\eta(t)$ nhận giá trị trên $C([-l, 0], \mathbb{R}^n)$, là $\mathcal{F}_0$ đo được với $E \|\eta\|_l^2 < \infty$.

Trong chương này chúng ta sẽ sử dụng hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định hầu chắc chắn cho một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên với thời gian trễ:

$$dX_t = f(X_t, X_{t-\delta(t)}, t) dt + g(X_t, X_{t-\delta(t)}, t) dW_t, \quad (4.1)$$

với điều kiện ban đầu $X_t = \eta(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; C([-l, 0], \mathbb{R}^n))$, $-l \leq t \leq 0$. Ở đây $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P; C([-l, 0], \mathbb{R}^n))$ và $\delta(t)$ được định nghĩa như trong Chương

1. Chúng ta cũng sẽ giả sử rằng Phương trình (4.1) có một nghiệm toàn cục duy nhất, kí hiệu là $X_t(\eta) \in \mathbb{R}^n$, và giả sử tồn tại một hằng số không âm $\tau \geq 0$ sao cho $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} \leq \tau$.

Giả sử $V(x, t)$ là một hàm dương thuộc $C^{2,1}$, chúng ta định nghĩa các toán tử L và Q như sau:

$$\begin{aligned} LV(x, y, t) &= \frac{\partial}{\partial t} V(x, t) + \sum_{i=1}^n f^i(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V(x, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(x, y, t) g^{jk}(x, y, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(x, t) \end{aligned}$$

và

$$QV(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(x, y, t) g^{jk}(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x_i} V(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} V(x, t).$$

Định lý 4.1. Lấy $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ và $\psi_3(t)$ là ba hàm liên tục không âm.

Giả sử với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và $t \geq 0$, tồn tại các hằng số dương $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $p > 0$, $m > 0$, các số thực μ, ν, θ, γ và $\xi(t) > 0$ là một hàm không tăng sao cho

$$1. c_1 |x|^p \lambda(t)^m \leq V(x, t) \leq c_2 |x|^p \lambda(t)^m, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+;$$

$$2. LV(x, y, t) + \xi(t) QV(x, y, t) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t) V(x, t) + \psi_3(t) V(y, t), \\ x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty);$$

$$3. \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\log \lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \theta, \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_3(s) ds}{\log \lambda(t)} \leq \gamma, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$$

Khi đó nghiệm của Phương trình (4.1) thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(\eta)|}{\log \lambda(t)} \\ &\leq -\frac{m - [\tau + (\nu \vee \mu) + (c_2/c_1)\theta + (c_2/c_1)\lambda(l)^m \gamma]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ công thức Itô và định nghĩa của L và Q , ta có

$$\begin{aligned} V(X_t, t) &= V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \\ &\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Do tính liên tục đều của $\log \lambda(t)$ suy ra: với bất kì $\epsilon > 0$ tồn tại một số nguyên dương $N = N(\epsilon)$ và một số nguyên ngẫu nhiên $k_1 = k_1(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon)$ thì ta có

$$\left| \log \lambda \left(\frac{k}{2^N} \right) - \log \lambda(t) \right| \leq \epsilon.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức mactinganle dạng mũ ta có

$$\begin{aligned} P \left\{ \omega : \sup_{0 \leq t \leq w} \left[\int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \frac{u}{2} QV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \right] > v \right\} \leq e^{-uv} \end{aligned}$$

với u, v và w là các hằng số dương bất kì.

Đặc biệt, lấy

$$u = 2\xi \left(\frac{k}{2^N} \right), \quad v = \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

và áp dụng bổ đề Borel-Cantelli ta suy ra: tồn tại một số nguyên $k_0(\epsilon, \omega) > 0$ với hầu hết $\omega \in \Omega$ sao cho

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m g^{ik}(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) \frac{\partial}{\partial x_i} V(X_s, s) dW_s^k \\ \leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right) \int_0^t QV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \end{aligned}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Thay điều này vào Phương trình (4.2) và sử dụng điều kiện 2, chúng ta

thấy hầu chắc chắn

$$\begin{aligned}
V(X_t, t) &\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \\
&\quad + \int_0^t \xi \left(\frac{k}{2^N} \right) QV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \\
&\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) + \int_0^t LV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \\
&\quad + \int_0^t \xi(s) QV(X_s, X_{s-\delta(s)}, s) ds \\
&\leq \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + V(x_0, 0) + \int_0^t (\psi_1(s) + \psi_2(s) V(X_s, s) \\
&\quad + \psi_3(s) V(X_{s-\delta(s)}, s)) ds
\end{aligned} \tag{4.3}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Sử dụng kết quả này, điều kiện 1 trong định lý và bổ đề 1.4, ta có hầu chắc chắn

$$\begin{aligned}
c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m &\leq V(X_t, t) \\
&\leq \left[V(x_0, 0) + \xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) + \int_0^t \psi_1(s) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m \int_0^t \psi_3(s) ds \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} |\eta(r)|^p \right] \right] \\
&\quad \cdot \exp \left(\int_0^t \frac{c_2}{c_1} \psi_2(s) ds + \int_0^t \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m \psi_3(s) ds \right)
\end{aligned}$$

với mọi $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon)$.

Do đó, sử dụng điều kiện 3 ta suy ra: với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên dương $k_2(\epsilon, \omega)$ sao cho với bất kì $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_0(\epsilon, \omega) \vee k_1(\epsilon) \vee k_2(\epsilon, \omega)$ ta có

$$\log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m) \leq \log \left[V(x_0, 0) + \lambda(t)^{(\mu+\epsilon)(1+\epsilon)} \log \frac{k-1}{2^N} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m \int_0^t \psi_3(s) ds \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} |\eta(r)|^p \right] + \lambda(t)^{(\nu+\epsilon)} \Big] \\
& + \frac{c_2}{c_1} \int_0^t \psi_2(s) ds + \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m \int_0^t \psi_3(s) ds \\
& \leq \log \left[V(x_0, 0) + \lambda(t)^{(\mu+\epsilon)(1+\epsilon)} + \lambda(t)^{(\nu+\epsilon)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m \int_0^t \psi_3(s) ds \left[\sup_{-l \leq r \leq 0} |\eta(r)|^p \right] \right] \\
& + \log \log \frac{k-1}{2^N} + \frac{c_2}{c_1} (\theta + \epsilon) \log \lambda(t) \\
& + \frac{c_2}{c_1} \lambda(l)^m (\gamma + \epsilon) \log \lambda(t).
\end{aligned}$$

Do đó, ta suy ra hầu chắc chắn

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)}{\log \lambda(t)} & \leq (\nu + \epsilon) \vee (\mu + \epsilon)(1 + \epsilon) + \tau + \epsilon \\
& + (c_2/c_1)(\theta + \epsilon) + (c_2/c_1) \lambda(t)^m (\gamma + \epsilon).
\end{aligned}$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta được

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)}{\log \lambda(t)} \\
\leq \nu \vee \mu + \tau + (c_2/c_1)\theta + (c_2/c_1) \lambda(t)^m \gamma \quad \text{hầu chắc chắn.}
\end{aligned}$$

Cuối cùng, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(\eta)|}{\log \lambda(t)} & \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \frac{\log [\lambda(t)^{-m} (c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)]}{\log \lambda(t)} \\
& \leq - \frac{m - [\tau + (\nu \vee \mu) + (c_2/c_1)\theta + (c_2/c_1) \lambda(l)^m \gamma]}{p} \\
& \quad \text{hầu chắc chắn.}
\end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. $\square$

Định lý 4.2. Lấy $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ và $\psi_3(t)$ là ba hàm liên tục không âm.

Giả sử với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $t \geq 0$, tồn tại các hằng số dương $c_1 > 0$, $c_2 >$

$0, p > 0, m > 0$, các số thực $\mu, \theta, \nu, \rho, 0 < \alpha < 1$ và $\xi(t) > 0$ là một hàm không tăng sao cho

1. $c_1|x|^p\lambda(t)^m \leq V(x, t) \leq c_2|x|^p\lambda(t)^m, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+;$
2. $LV(x, y, t) + \xi(t)QV(x, y, t) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(x, t) + \psi_3(t)V(y, t)^\alpha,$
 $x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty);$
3. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\int_0^t \psi_1(s)ds)}{\log \lambda(t)} \leq \theta, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s)ds}{\log \lambda(t)} \leq \nu(1 - \alpha),$
 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\int_0^t \psi_3(s)ds)}{\log \lambda(t)} \leq \rho(1 - \alpha), \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \xi(t)}{\log \lambda(t)} \geq -\mu.$

Khi đó nghiệm của Phương trình 4.1 thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(\eta)|}{\log \lambda(t)} \\ & \leq -\frac{m - [\tau + (c_2/c_1)\nu + \mu \vee \theta \vee \rho]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như Định lý 4.1, từ (4.3), điều kiện 1 trong định lý và bổ đề 1.5 ta suy ra hầu chắc chắn: với $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại $N > 0$ và $k_0(\epsilon, \omega) > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} & c_1|X_t|^p\lambda(t)^m \\ & \leq \exp \left\{ \left(\frac{c_2}{c_1(1-\alpha)} \right) \int_0^t \psi_2(s) ds \right\} \cdot \left\{ \left(\xi \left(\frac{k}{2^N} \right)^{-1} \log \left(\frac{k-1}{2^N} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + V(x_0, 0) + \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} |\eta(r)|^p \right]^\alpha \right. \right. \\ & \quad \left. \cdot \left(\frac{c_2^\alpha}{c_1} \right) \lambda(l)^{\alpha m} \int_0^t \psi_3(s) ds + \int_0^t \psi_1(s) ds \right)^{1-\alpha} \\ & \quad \left. + \left(\frac{c_2^\alpha}{c_1} \right) 2^\alpha \lambda(l)^{\alpha m} \int_0^t \psi_3(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{hầu chắc chắn} \end{aligned}$$

với mọi $0 \leq t \leq \frac{k}{2^N}, k \geq k_0(\epsilon, \omega).$

Do đó, từ điều kiện 3 trong định lý ta suy ra với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số nguyên ngẫu nhiên $k_1 = k_1(\epsilon)$ sao cho nếu $\frac{k-1}{2^N} \leq t \leq \frac{k}{2^N}$, $k \geq k_1(\epsilon) \vee k_0(\epsilon, \omega)$ thì ta có

$$\begin{aligned} \log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m) &\leq \frac{c_2}{c_1} (\nu + \epsilon) \log \lambda(t) \\ &\quad + \log \left[\left(\lambda(t)^{(\mu+\epsilon)(1+\epsilon)} \log \frac{k-1}{2^N} + V(x_0, 0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda(t)^{(\theta+\epsilon)} + \frac{c_2^\alpha}{c_1} \lambda(l)^{\alpha m} \left[2 \sup_{-l \leq r \leq 0} |\eta(r)|^p \right]^\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_0^t \psi_3(s) ds \right)^{1-\alpha} + \frac{c_2^\alpha}{c_1} 2^\alpha \lambda(l)^{\alpha m} \lambda(l)^{(1-\alpha)(\rho+\epsilon)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)}{\log \lambda(t)} &\leq \tau + \epsilon + \frac{c_2}{c_1} (\nu + \epsilon) \\ &\quad + (\theta + \epsilon) \vee (\rho + \epsilon) \vee (\mu + \epsilon) (1 + \epsilon) \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta được

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)}{\log \lambda(t)} &\leq \tau + \frac{c_2}{c_1} \nu + \mu \vee \theta \vee \rho \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Cuối cùng, chúng ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(\eta)|}{\log \lambda(t)} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1 \log [\lambda(t)^{-m} (c_1 |X_t|^p \lambda(t)^m)]}{p \log \lambda(t)} \\ &\leq -\frac{m - [\tau + (c_2/c_1) \nu + \mu \vee \theta \vee \rho]}{p} \quad \text{hầu chắc chắn.} \end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

4.2 Ví dụ

Sau đây ta đưa ra hai ví dụ được để kết thúc chương này

Ví dụ 4.1. Giả sử $\nu > 0$, $l > 0$. Giả sử $\eta(t) : [-2l, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ là một quá trình $\mathcal{F}_0$ đo được và với $t \geq 0$, xét phương trình Itô ngẫu nhiên với thời gian trễ là hằng (có nghĩa là $\delta(t) = 2l > 0$) dưới đây

$$\begin{cases} dX_t = (-\nu X_t + X_{t-2l}) dt + 2t^3 e^{-\nu t} g(t, X_t, X_{t-2l}) dW_t, \\ X_t = \eta(t), t \in [-2l, 0] \end{cases} \quad (4.4)$$

trong đó W_t là chuyển động Brown một chiều và tồn tại một hằng số dương $M > 0$ sao cho $|g(t, X_t, X_{t-2l})|^2 \leq M$.

Để áp dụng Định lý 4.1, trước tiên chúng ta chú ý rằng

$$|X_t X_{t-2l}| \leq \gamma |X_t|^2 + \frac{4}{\gamma} |X_{t-2l}|^2,$$

trong đó γ là hằng số dương sẽ được cố định sau đó.

Mặt khác, để kết quả sau đúng

$$h(\gamma) = \nu - \gamma - \frac{4e^{2\nu l}}{\gamma} > 0,$$

chỉ cần điều kiện sau là đủ

$$\frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 16e^{2\nu l}}}{2} < \gamma < \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 16e^{2\nu l}}}{2}.$$

Do đó, sử dụng Định lý 4.1 và xét hàm Lyapunov $V(x, t) = e^t x^2$, ta suy ra: nếu $\nu > 4e^{\nu l}$, $h(\gamma)$ luôn luôn dương để chọn một xấp xỉ γ sao cho Phương trình (4.4) là ổn định mũ hầu chắc chắn. Hơn nữa, chúng ta có hầu chắc chắn

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |X_t(\eta)|}{t} \leq - \left(\nu - \gamma - \frac{4e^{2\nu l}}{\gamma} \right).$$

Ví dụ 4.2. Ta xét phương trình vi phân trễ một chiều sau

$$dX_t = -\frac{p}{1+t}dt + \frac{1}{1+t}X_{t-l} + \frac{(1+t)^{-p}}{1+|X_{t-l}|}dW_t$$

với điều kiện ban đầu $X_t = \xi(t)$, $t \in [-l, 0]$. Ở đây W_t là một chuyển động Brown một chiều và p, l là hai số dương.

Xét hàm Lyapunov như sau:

$$V(x, t) = (1+t)^{2p}x^2, t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^1.$$

Từ đó suy ra: với bất kì $\delta > 1$,

$$\begin{aligned} LV(x, y, t) + \frac{1}{4(1+t)^\delta}QV(x, y, t) \\ \leq \left(\frac{1}{(1+t)^\delta} + \frac{1}{1+t} \right) V(x, t) + \frac{1}{1+t}V(y, t) + 1. \end{aligned}$$

Sử dụng Định lý 4.1 và cho $\delta \rightarrow 1$, ta có với bất kì $p > \frac{3}{2}$ nghiệm là ổn định đa thức hầu chắc chắn.

Hơn thế nữa, chúng ta có

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\log t} \log |X_t| \leq -\left(p - \frac{3}{2}\right) \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

KẾT LUẬN

Kết quả chính của luận văn này là nghiên cứu tính ổn định hầu chắc chắn của các phương trình vi phân ngẫu nhiên Itô hữu hạn chiều. Theo quan điểm giải tích để giải quyết nhiều tình huống thực tế, chúng ta quan tâm đặc biệt tới hàm phân rã ổn định tổng quát nào đó (có trường hợp đặc biệt là hàm mũ thông thường). Luận văn đã đưa ra các điều kiện đủ cho các loại phương trình vi phân ngẫu nhiên khác nhau để thỏa mãn tính tiệm cận của chúng. Trong luận văn, một số ví dụ đã được nghiên cứu để minh họa cho lý thuyết.

Hướng phát triển trong tương lai của Tác giả về đề tài luận văn này là nghiên cứu tính ổn định tiệm cận hầu chắc chắn cho mômen cấp p .

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những khiếm khuyết, sai sót, vì vậy Tác giả rất mong được các Thầy Cô giáo và bạn bè đồng nghiệp góp ý kiến chân thành để kết quả luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Arnold, L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*; Wiley: New York, 1974.
- [2] Bell, D.R.; Mohammed, E.A. *On the Solution of Stochastic Ordinary Differential Equations via Small Delays*. *Stochastics*. 1989, 29, 293–299.
- [3] Has'minskii, R.Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*; Sijthoff and Noordhoff: Alphen, 1980.
- [4] Ladde, G.S.; Lakshmikantham, V. *Random Differential Inequalities*; Academic Press: New York, 1980.
- [5] Lakshmikantham, V.; Leeda, S.; Martynyuk, A.A. *Stability Analysis of Nonlinear Systems*; Marcel Dekker: New York, 1989.
- [6] Kolmanovskii, V.B.; Myshkis, A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1992.
- [7] Kolmonovskii, V.B.; Nosov, V.R. *Stability of Functional Differential Equations*; Academic Press: New York, 1986.
- [8] Chow, P.L. *Stability of Nonlinear Stochastic Evolution Equations*. *J. Math. Anal. Appl.* 1982, 89, 400–419.

- [9] Haussmann, U.G. *Asymptotic Stability of the Linear Itô Equation in Infinite Dimensional*. J. Math. Anal. Appl. 1978, 65, 219–235.
- [10] Ichikawa, A. *Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations*. J. Math. Anal. Appl. 1982, 90, 12–44.
- [11] Friedman, A. *Stochastic Differential Equations and Applications*; Academic Press: New York, 1975; Vols. 1/2.
- [12] Mao, X.R. *Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semimartingales*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 251; Longman Scientific and Technical: New York, 1991.
- [13] Friedman, A.; Pinsky, M. *Asymptotic Stability and Spiraling Properties of Stochastic Equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 1973, 186, 331–358.
- [14] Liu, K. *On Stability for a Class of Semilinear Stochastic Evolution Equations*. Stoch. Proc. Appl. 1997, 70, 219–241.
- [15] Arnold, L. *A New Example of an Unstable System being Stabilized by Random Parameter Noise*. Infor. Com. Math. Chem. 1979, 133–140.
- [16] Arnold, L.; Crauel, H.; Wihstutz, V. *Stabilization of Linear Systems by Noise*. SIAM J. Control Optim. 1983, 21, 451–461.
- [17] Has'minskii, R.Z. *Necessary and Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Linear Stochastic Systems*. Theory Probab. Appl. 1969, 12, 144–147.

- [18] Lakshmikantham, V.; Matrosov, V.M.; Sivasundaram, S. *Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1991.
- [19] Liu, K. *Asymptotic Stability with General Rate Function of Nonlinear Stochastic Evolution Equations*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 1997, 63,128–144.
- [20] Mao, X.R. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*; Marcel Dekker, Inc.: New York, 1994.
- [21] Mao, X.R. *Stochastic Differential Equations and their Applications*; Horwood Publishing Chichester, 1997