

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Xuân Linh

VỀ MỞ RỘNG PHƯƠNG TRÌNH THUE

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội-2008

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Xuân Linh

VỀ MỞ RỘNG PHƯƠNG TRÌNH THUE

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS TẠ THỊ HOÀI AN

Hà Nội-2008

Lời mở đầu

Năm 1909, Thue [24] đưa ra kết quả sau đây: “Cho $f(x, y)$ là đa thức thuần nhất bậc n lớn hơn 2, bất khả quy với hệ số nguyên trên trường các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ và g là số nguyên khác không. Khi đó, phương trình Diophantine

$$f(x, y) = g \tag{1}$$

chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên”. Phương trình (1) thường được gọi là phương trình Thue và kết quả của Thue đã được Landau xem như là “phát hiện quan trọng nhất trong Lý thuyết số”.

Câu hỏi về số nghiệm nguyên của phương trình (1) là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà toán học có tên tuổi trên thế giới, ví dụ như: Thue và Siegel đã chứng minh rằng với điều kiện thích hợp phương trình $ax^n - by^n = c$ có nhiều nhất một nghiệm. Năm 1982, Silverman [22] đã chứng minh với $n = 3$ phương trình Thue $F(x, y) = c$ có ít hơn

$$\chi^{R_F(c)+1}$$

nghiệm nguyên với $|c|$ đủ lớn, trong đó $\chi > 1$ và $R_F(c)$ là hạng của nhóm Mordell-Weil của các điểm hữu tỷ trên đường cong

$$F(x, y) = cz^n.$$

Năm 1991, Stewart [23] đã ước lượng số nghiệm cho trường hợp $F(x, y)$ là dạng đa thức bậc n : “nếu $F(x, y)$ là đa thức thuần nhất bậc n , bất khả

quy và c là số nguyên thì số nghiệm của bất phương trình Thue

$$|F(x, y)| \leq c$$

bị chặn bởi $nc^{2/n}(1 + \log c^{1/n})$.”

Roth đã mở rộng cho trường hợp g là đa thức bậc nhỏ hơn $r - 2$.

Không chỉ dừng lại ở đa thức thuần nhất hai biến, Schmidt đã tổng quát hóa định lý Thue trong trường hợp nhiều biến. Schmidt [19] đã xét cho trường hợp phương trình $f_1 \dots f_r = g$, với f_i là các dạng tuyến tính (thuần nhất bậc nhất) n biến và g là hằng số. Hơn nữa, Schmidt [17], [18] đã chứng minh cho trường hợp f_i là các dạng tuyến tính n biến và bậc của đa thức g nhỏ hơn $r - n$.

Câu hỏi đặt ra là số nghiệm nguyên của phương trình (1) sẽ như thế nào nếu các đa thức f_i, g không nhất thiết thuần nhất, với bậc và số biến tùy ý?

Corvaja và Zannier trong bài báo [6] đã trả lời một phần của câu hỏi này.

Mục đích chính của luận văn này là chứng minh tính không trù mật theo tô pô Zariski của tập các nghiệm nguyên của phương trình $f_1 \dots f_r = g$, trong đó f_i, g là các đa thức n biến với hệ số là các số đại số, khi bậc của f_i và g thỏa mãn một số điều kiện cụ thể. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra một cách có hệ thống các kiến thức cơ sở về không gian tô pô, tập đại số, giá trị tuyệt đối, định giá, tập thực sự, độ cao, dãy chính quy, Định lý Không gian con và Định lý Siegel.

Luận văn trình bày các kết quả quan trọng của bài báo [6] theo bố cục riêng của chúng tôi.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Được trình bày với mục đích cung

cấp các kiến thức cần thiết để cho người đọc dễ theo dõi chứng minh các kết quả của chương sau. Trong phần đầu của chương này, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và kết quả cơ bản về Hình học đại số và Đại số giao hoán. Chúng tôi chỉ điểm qua những khái niệm và kết quả chính có sử dụng trong chương sau. Kết quả quan trọng nhất trong phần này là Mệnh đề 1.2.16., Nhận xét 1.2.21. Phần còn lại của chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm và các kết quả chính của Lý thuyết số như: giá trị tuyệt đối, định giá rời rạc, tập thực sự, tô pô v -*adic*, Định lý Ostrowski.

Chương 2. Mở rộng phương trình Thue. Đây là chương chính của luận văn. Trong chương này, chúng tôi sẽ chứng minh về tính không trù mật theo tô pô Zariski của tập nghiệm nguyên của phương trình Thue mở rộng khi bậc của các đa thức tham gia thỏa mãn một số điều kiện cụ thể.

Chương này được chia thành hai phần. Phần thứ nhất, chúng tôi trình bày khái niệm Độ cao, Định lý Không gian con, Định lý Siegel và chứng minh một số bổ đề được sử dụng nhiều trong các chứng minh sau.

Phần thứ hai, trình bày chứng minh tính không trù mật theo tô pô Zariski của $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ trong $\mathcal{Z}$ và $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ trong $\mathcal{X}$. Các kết quả chính của chương này và cũng là của luận văn là hai định lý: Định lý 2.2.15 và Định lý 2.2.16

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Tạ Thị Hoài An. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng, ngưỡng mộ và lòng biết ơn vô hạn của mình đến Cô.

Tôi xin gửi lời cảm ơn đến các thầy giáo, cô giáo của Khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội và Viện Toán học đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong khoá học Cao học. Tôi xin cảm ơn Khoa Khoa học Tự nhiên và Xã hội - Đại học Thái

Nguyên nay là Trường Đại học Khoa học và bộ môn Toán của Trường Đại học Xây dựng đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện kế hoạch học tập của mình. Tôi xin gửi lời cảm ơn Thầy giáo TS. Lê Minh Hà đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi rất nhiều trong cả khóa học. Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến bạn bè và đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi hoàn thành khoá học.

Cuối cùng, tôi xin được bày tỏ sự biết ơn tới gia đình: mẹ, em gái và vợ đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi được học tập và hoàn thành luận văn này.

Hà Nội, ngày ... tháng ... năm 2009
Tác giả

Nguyễn Xuân Linh

Bảng ký hiệu

$[E : k]$	bậc của E trên k .
A_∞	tập tất cả các giá trị tuyệt đối Ácsimét trên k .
S	tập chứa hữu hạn các giá trị tuyệt đối trên k bao gồm cả A_∞ .
$\mathcal{O}_{S,k}$	vành các điểm S -nguyên trên k .
$\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$	$= \mathcal{X} \cap \mathcal{O}_S^n$.
V_N^*	$= \frac{V_N}{(G_1, G_2, \dots, G_b) \cap V_N}$
$\overline{V}_N$	tập các đa thức thuần nhất bậc N trong $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$.
$\mathcal{O}_k$	vành định giá trên trường k .
$\oplus$	hợp rời.
$f \ll g$	xem Định nghĩa 2.2.10

Mục lục

1	Kiến thức chuẩn bị	1
1.1	Không gian tô pô	1
1.2	Không gian xạ ảnh	2
1.3	Giá trị tuyệt đối	7
2	Mở rộng phương trình Thue	16
2.1	Độ cao Weil	16
2.2	Mở rộng của phương trình Thue	19
2.2.1	Các kết quả bổ trợ	19
2.2.2	Các kết quả chính	29
	Tài liệu tham khảo	45

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số tính chất cơ bản của không gian xạ ảnh, định giá và những kiến thức liên quan khác nhằm giúp cho người đọc dễ theo dõi. Các khái niệm và kết quả của chương này được trích dẫn từ [2], [8], [9], [10], [13], [14], [26], ...

1.1 Không gian tô pô

Định nghĩa 1.1.1. *Không gian tô pô* là một cặp (X, τ) trong đó X là một tập hợp và τ là một họ những tập hợp con của X ($\tau \subseteq 2^X$) thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;
- (ii) Nếu $U_1 \in \tau$ và $U_2 \in \tau$ thì $U_1 \cap U_2 \in \tau$;
- (iii) Nếu $\{U_t\}_{t \in T}$ là một họ những tập hợp con của X và $U_t \in \tau$ với mọi $t \in T$ thì $\bigcup_{t \in T} U_t \in \tau$.

Tập hợp X gọi là *không gian*, phần tử của X gọi là *điểm* của không gian, mỗi phần tử của τ gọi là *tập hợp mở* trong không gian X . Họ τ gọi là *tô pô* trên tập hợp X .

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử (X, τ) là một không gian tô pô và $A \subseteq X$.

(i) Tập hợp A được gọi là một *tập hợp đóng* trong X nếu phần bù của nó $X \setminus A$ là một tập hợp mở trong X .

(ii) Giao của họ tất cả các tập hợp đóng chứa A được gọi là *bao đóng* của tập hợp A , kí hiệu $\bar{A}$.

Tập trù mật

Định nghĩa 1.1.3. Giả sử X là không gian tô pô và $A \subseteq B$ là các tập con của X . Tập A được gọi là *trù mật* trong B nếu $\bar{A} \supseteq B$.

Định lý 1.1.4. (Xem [2], Chương II, Định lý 3.4) *Giả sử A là một tập hợp con của một không gian tô pô X . Khi đó, A trù mật trong X khi và chỉ khi mỗi tập hợp mở khác rỗng trong X đều có điểm chung với A .*

1.2 Không gian xạ ảnh

Định nghĩa 1.2.1. Cho k là một trường. *Không gian xạ ảnh n - chiều* trên k , kí hiệu $\mathbb{P}_k^n$, hay đơn giản $\mathbb{P}^n$ là tập hợp các lớp tương đương của bộ $(a_0, \dots, a_n)$ các phần tử của k , không đồng thời bằng không theo quan hệ tương đương $(a_0, \dots, a_n) \sim \lambda(a_0, \dots, a_n)$ với mọi λ thuộc $k \setminus \{0\}$.

Mỗi phần tử của $\mathbb{P}^n$ được gọi là một *điểm*.

Định nghĩa 1.2.2. Giả sử T là một họ các đa thức thuần nhất trong $k[X_0, \dots, X_n]$. Tập

$$\mathcal{Z}(T) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \text{ với mọi } f \in T\}$$

được gọi là *tập không điểm* của họ các đa thức thuần nhất của vành $k[X_0, \dots, X_n]$.

Tập không điểm của một đa thức thuần nhất F được gọi là *siêu mặt* xác định bởi F . Đặc biệt, nếu F là đa thức thuần nhất bậc 1 thì siêu mặt $\mathcal{Z}(F)$ được gọi là *siêu phẳng* xác định bởi F .

Tập đại số

Định nghĩa 1.2.3. Tập con Y của $\mathbb{P}^n$ được gọi là một *tập đại số* nếu tồn tại họ các đa thức thuần nhất T của $k[X_0, \dots, X_n]$ sao cho $Y = \mathcal{Z}(T)$.

Mệnh đề 1.2.4. (i) *Hợp của hai tập đại số là một tập đại số.*

(ii) *Giao của một họ tùy ý những tập đại số là tập đại số.*

(iii) *Tập hợp rỗng và toàn bộ không gian là những tập đại số.*

Chứng minh. (i). Giả sử $Y_1 = \mathcal{Z}(T_1)$ và $Y_2 = \mathcal{Z}(T_2)$.

Đặt $T_1 T_2 = \{fg \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \in T_1, g \in T_2\}$.

Ta sẽ chứng minh $Y_1 \cup Y_2 = \mathcal{Z}(T_1 T_2)$.

Giả sử $P \in Y_1 \cup Y_2$ thì hoặc $P \in Y_1$ hoặc $P \in Y_2$. Vì vậy, P là một không điểm của mọi đa thức trong $T_1 T_2$.

Ngược lại, giả sử $P \in \mathcal{Z}(T_1 T_2)$ và $P \notin Y_1$. Khi đó tồn tại $f \in T_1$ sao cho $f(P) \neq 0$. Với mọi $g \in T_2$, ta có $(fg)(P) = 0$. Do đó, $g(P) = 0$ hay $P \in Y_2$.

(ii). Giả sử $Y_\alpha = \mathcal{Z}(T_\alpha)$ là họ tùy ý các tập đại số. Ta sẽ chứng minh $\cap Y_\alpha = \mathcal{Z}(\cup T_\alpha)$. Thật vậy,

nếu $P \in \cap Y_\alpha$ thì $P \in Y_\alpha$ với mọi α hay $f(P) = 0$ với mọi $f \in \cup T_\alpha$. Do đó, $P \in \mathcal{Z}(\cup T_\alpha)$.

Nếu $P \in \mathcal{Z}(\cup T_\alpha)$ thì $f(P) = 0$ với mọi $f \in \cup T_\alpha$ hay $P \in Y_\alpha$ với mọi α . Do đó, $\cap Y_\alpha$ là tập đại số.

(iii). Tập rỗng $\emptyset = \mathcal{Z}(1)$ và toàn bộ không gian $\mathbb{P}^n = \mathcal{Z}(0)$. Vì vậy, tập rỗng và toàn bộ không gian cũng là tập đại số. $\diamond$

Định nghĩa 1.2.5. Trên $\mathbb{P}^n$ xác định tô pô với các tập mở là phần bù của các tập đại số được gọi là *tô pô Zariski*.

Định nghĩa 1.2.6. Một tập con khác rỗng Y của không gian tô pô X được gọi là *khả quy* nếu nó biểu diễn được thành hợp của hai tập con đóng thực sự trong Y . Trái lại, Y được gọi là *bất khả quy*.

Định nghĩa 1.2.7. Đa tạp đại số xạ ảnh (hay đơn giản đa tạp xạ ảnh) là một tập con đóng, bất khả quy trong $\mathbb{P}^n$.

Định nghĩa 1.2.8. Giả sử Y là một tập con của $\mathbb{P}^n$. Idêan

$I(Y) := \{f \in k[X_0, \dots, X_n] \mid f \text{ là đa thức thuần nhất và } f(P) = 0 \text{ với mọi } P \in Y\}$ được gọi là *idêan thuần nhất* của Y trong $k[X_0, \dots, X_n]$.

Định nghĩa 1.2.9. Giả sử X là một không gian tô pô. Chiều của X là supremum của tất cả các số nguyên n sao cho tồn tại một dãy $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ của các tập con phân biệt, đóng, bất khả quy của X .

Chiều của một đa tạp W được xác định là chiều của không gian tô pô cảm sinh trên W .

Ví dụ 1.2.10. Chiều của $\mathbb{P}^n$ bằng n (Xem [9], Hệ quả 4.1.8).

Mệnh đề 1.2.11. (Xem [14], Mệnh đề 1.21) Một siêu mặt bất khả quy trong $\mathbb{P}^n$ có $n - 1$ chiều.

Định nghĩa 1.2.12. Một đa tạp r -chiều Y trong $\mathbb{P}^n$ được gọi là *giao đầy đủ* nếu idêan thuần nhất $I(Y)$ của Y được sinh bởi $n - r$ đa thức thuần nhất.

Định nghĩa 1.2.13. Giả sử Y là tập đại số trong $\mathbb{P}^n$. Vành $S(Y) = k[X_0, \dots, X_n]/I(Y)$ được gọi là *vành tọa độ thuần nhất* của Y .

Mệnh đề 1.2.14. (Xem [10], Mệnh đề 1.2)

(i) Nếu $\mathfrak{a}$ là idêan sinh bởi họ các đa thức thuần nhất T thì $\mathcal{Z}(T) = \mathcal{Z}(\mathfrak{a})$.

(ii) Nếu $T_1 \subseteq T_2$ là các tập con của vành đa thức $k[X_0, \dots, X_n]$ thì $\mathcal{Z}(T_2) \subseteq \mathcal{Z}(T_1)$.

(iii) Nếu $Y_1 \subseteq Y_2$ là các tập con của $\mathbb{P}^n$ thì $I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$.

(iv) Nếu Y_1, Y_2 là các tập con của $\mathbb{P}^n$ thì $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(v) Nếu Y là tập con của $\mathbb{P}^n$ thì $\mathcal{Z}(I(Y)) = \bar{Y}$ (bao đóng của Y).

Mệnh đề 1.2.15. Một tập đại số $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ là bất khả quy khi và chỉ khi $I(Y)$ là ideal nguyên tố.

Chứng minh.

Điều kiện cần: Giả sử Y là tập đại số bất khả quy và $fg \in I(Y)$. Khi đó, $Y \subseteq \mathcal{Z}(fg)$. Theo Mệnh đề 1.2.14, ta có $\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$. Do đó, $Y \subseteq \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$ và $Y = (Y \cap \mathcal{Z}(f)) \cup (Y \cap \mathcal{Z}(g))$. Vì Y bất khả quy và $(Y \cap \mathcal{Z}(f)), (Y \cap \mathcal{Z}(g))$ là các tập con đóng của Y nên hoặc $Y = (Y \cap \mathcal{Z}(f))$ hoặc $Y = (Y \cap \mathcal{Z}(g))$. Vì vậy, hoặc $Y \subseteq \mathcal{Z}(f)$ hoặc $Y \subseteq \mathcal{Z}(g)$. Suy ra, hoặc $f \in I(Y)$ hoặc $g \in I(Y)$, hay $I(Y)$ nguyên tố.

Điều kiện đủ: Giả sử $I(Y)$ nguyên tố và $Y = Y_1 \cup Y_2$ với Y_1, Y_2 là các tập đại số. Theo Mệnh đề 1.2.14, ta có $I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Vì $I(Y)$ nguyên tố nên $I(Y)$ bất khả quy. Do đó, hoặc $I(Y) = I(Y_1)$ hoặc $I(Y) = I(Y_2)$. Vì Y, Y_1, Y_2 đóng nên theo Mệnh đề 1.2.14 ta có $\mathcal{Z}(I(Y)) = Y$, $\mathcal{Z}(I(Y_1)) = Y_1$ và $\mathcal{Z}(I(Y_2)) = Y_2$. Vì vậy, hoặc $Y = Y_1$ hoặc $Y = Y_2$, hay Y bất khả quy. $\diamond$

Mệnh đề 1.2.16. (Xem [9], Mệnh đề 4.2.4) Cho X là đa tạp xạ ảnh của $\mathbb{P}^n$ và $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ là đa thức thuần nhất khác hằng không triệt tiêu hoàn toàn trên X . Khi đó, $\dim(X \cap \mathcal{Z}(f)) = \dim X - 1$.

Hệ quả 1.2.17. Giả sử $\bar{Z} \subset \mathbb{P}^n$ là giao đầy đủ r -chiều không chứa siêu phẳng tại vô cực $X_0 = 0$. Khi đó giao của $\bar{Z}$ với siêu phẳng $X_0 = 0$ là một đa tạp $r - 1$ chiều.

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 1.2.16 với $X = \bar{Z}$ và $f = X_0$. $\diamond$

Định lý 1.2.18. (Xem [13], Chương 5, Định lý 22) Cho R là vành Noether và $R[X_1, \dots, X_n]$ là vành đa thức n biến. Khi đó

$$\dim R[X_1, \dots, X_n] = \dim R + n.$$

Hệ quả 1.2.19. Giả sử k là trường. Khi đó $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$.

Định nghĩa 1.2.20. Cho R là vành giao hoán có đơn vị và M là một R -môđun hữu hạn sinh.

(i) Ta nói rằng $x \in R$ là phần tử M -chính quy nếu $xm = 0$ với $m \in M$ kéo theo $m = 0$, nói cách khác, nếu x không là ước của không của M .

(ii) Dãy $x_1, \dots, x_n \in R$ được gọi là một M -dãy chính quy (hoặc M -dãy) nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

- a) x_i là phần tử $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ -chính quy với mọi $i = 1, \dots, n$;
- b) $M/(x_1, \dots, x_n)M \neq 0$.

Từ Định nghĩa 1.2.20 ta có ngay nhận xét sau.

Nhận xét 1.2.21. 1. Nếu $x \in R$ là phần tử M -chính quy thì $x^k \in R, k \in \mathbb{N}$ cũng là phần tử M -chính quy.

2. Nếu dãy $a_1, a_2, \dots, a_m$ là R -dãy chính quy thì $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m$, trong đó $\bar{a}_i = a_i + (a_1) \in R/(a_1)R, i = \overline{2, m}$ là $R/(a_1)R$ -dãy chính quy.

Định lý 1.2.22. (Xem [13], Chương 6, Định lý 31) Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Cohen - Macaulay. Khi đó dãy $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ là R -dãy chính quy khi và chỉ khi

$$\dim R/(a_1, \dots, a_r)R = \dim R - r.$$

Định nghĩa 1.2.23. Giả sử R là một vành giao hoán và M là một R -môđun. Một dãy $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$, trong đó M_n là các môđun con của M , được gọi là một *lọc* của M và ký hiệu là (M_n) .

Định nghĩa 1.2.24. Giả sử $M = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} M_l$ là một S -môđun phân bậc trên vành đa thức $S = k[X_0, \dots, X_n]$. Hàm Hilbert H_M của môđun M được xác định bởi

$$H_M(l) = \dim_k M_l$$

với mỗi $l \in \mathbb{Z}$.

1.3 Giá trị tuyệt đối

Định nghĩa 1.3.1. Cho k là một trường. Ánh xạ $|\cdot|_v : k \rightarrow \mathbb{R}^+$ được gọi là *giá trị tuyệt đối* trên trường k nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $|x|_v \geq 0$, với mọi $x \in k$;
- (ii) $|x|_v = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
- (iii) $|xy|_v = |x|_v |y|_v$; với mọi $x, y \in k$;
- (iv) $|x + y|_v \leq |x|_v + |y|_v$, với mọi $x, y \in k$.

Nếu thay điều kiện (iv) bằng điều kiện mạnh hơn

(v) $|x + y|_v \leq \max(|x|_v, |y|_v)$, với mọi $x, y \in k$ thì $|\cdot|_v$ được gọi là *giá trị tuyệt đối phi Ácsimet*.

Giá trị tuyệt đối mà $|x|_v = 1$ với mọi $x \in k^*$ được gọi là *giá trị tuyệt đối tầm thường*.

Ví dụ 1.3.2.

(a) Các giá trị tuyệt đối thông thường trên trường số thực $\mathbb{R}$ và trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là các giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ và $\mathbb{Q}$.

(b) Cho p là một số nguyên tố. Ánh xạ

$$\begin{aligned} v_p : \quad \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x = p^r \frac{m}{n} &\longmapsto \frac{1}{p^r} \end{aligned}$$

trong đó $(m, p) = 1, (n, p) = 1, m, n, r \in \mathbb{Z}, v_p(0) = 0$, là giá trị tuyệt đối phi Ácsimet trên $\mathbb{Q}$ và được gọi là *giá trị tuyệt đối p -adic*.

(c) Cho k là một trường số bất kỳ và các phép nhúng

$$\begin{aligned} \sigma_1 : k &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ \sigma_2 : k &\longrightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Khi đó, ánh xạ

$$|\cdot|_v : k \rightarrow \mathbb{R}^+$$

xác định bởi với mọi $a \in k$, $|a|_v = |\sigma_1(a)|$ hoặc $|a|_v = |\sigma_2(a)|^2$ là các giá trị tuyệt đối trên k và tương ứng được gọi là các *giá trị tuyệt đối thực hoặc phức*.

Nhận xét 1.3.3. Một giá trị tuyệt đối $|\cdot|_v$ trên k xác định một metric trên k với hàm khoảng cách $d(x, y) = |x - y|_v$. Do đó, xác định trên k một tô pô. Tô pô xác định bởi giá trị tuyệt đối p -adic được gọi là *tô pô p -adic*. Tô pô xác định bởi giá trị tuyệt đối v được gọi là *tô pô v -adic*.

Mệnh đề 1.3.4. Cho k là trường cùng với giá trị tuyệt đối phi Ácsimet $|\cdot|_v$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k, |\alpha_i|_v < |\alpha_1|_v$, với mọi $i > 1$. Khi đó,

$$(i) \quad |1| = 1, |-1| = 1, |-x| = |x|, \text{ với mọi } x \in k;$$

$$(ii) \quad \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right|_v = |\alpha_1|_v;$$

$$(iii) \quad \text{nếu chuỗi } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \text{ hội tụ thì } \left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right|_v = |\alpha_1|_v.$$

Chứng minh. (i) Ta có, $|1|^2 = |1.1| = |1|$. Suy ra, $|1| = 1$. Hơn nữa, do $|-1|^2 = |(-1).(-1)| = |1| = 1$ nên $|-1| = 1$. Với mọi $x \in k$, $|-x| = |-1||x| = |x|$.

(ii) Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

- Với $n = 2$, giả sử $|\alpha_1|_v > |\alpha_2|_v$, ta có

$$|\alpha_1|_v = |(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_2|_v \leq \max(|\alpha_1 + \alpha_2|_v, |\alpha_2|_v)$$

Ta lại có,

$$|\alpha_1 + \alpha_2|_v \leq \max(|\alpha_1|_v, |\alpha_2|_v) = |\alpha_1|_v.$$

Như vậy,

$$|\alpha_1|_v \leq |\alpha_1 + \alpha_2|_v \leq |\alpha_1|_v.$$

Do đó, $|\alpha_1 + \alpha_2|_v = |\alpha_1|_v$.

- Giả sử đúng đến $n - 1$, ta cần chứng minh đúng với n .

Ta có, $\left| \sum_{i=2}^n \alpha_i \right|_v \leq \max_{2 \leq i \leq n} |\alpha_i|_v < |\alpha_1|_v$.

Khi đó, $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right|_v = \left| \sum_{i=2}^n \alpha_i + \alpha_1 \right|_v = |\alpha_1|_v$.

(iii) Vì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ hội tụ nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, trong đó, $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Đặt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$. Do đó, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

với mọi $n \geq n_0$ ta luôn có,

$$|S_n - \alpha|_v < \epsilon$$

hay

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k - \alpha \right|_v < \epsilon.$$

Do đó,

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \right|_v < |\alpha|_v + \epsilon.$$

Theo (i) ta có, $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right|_v = |\alpha_1|_v$. Vì vậy, $|\alpha_1|_v < |\alpha|_v + \epsilon$.

Cho $\epsilon \rightarrow 0$, ta được $|\alpha_1|_v = |\alpha|_v$.

◇

Mệnh đề 1.3.5. (Xem [15], Mệnh đề 7.8) *Cho các giá trị tuyệt đối $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ trên k với $|\cdot|_1$ không tầm thường. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (i) $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ xác định cùng một tô pô trên k ;
- (ii) nếu $|\alpha|_1 < 1$ thì $|\alpha|_2 < 1$, với mọi $\alpha \in k$.
- (iii) tồn tại số $\lambda > 0$ sao cho $|\alpha|_1 = |\alpha|_2^\lambda$, với mọi $\alpha \in k$.

Định nghĩa 1.3.6. Hai giá trị tuyệt đối được gọi là *tương đương* nếu chúng thỏa mãn một trong các điều kiện của Mệnh đề 1.3.5.

Định lý 1.3.7. (Định lý Ostrowski, xem [15, Định lý 7.10]) *Giả sử $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối không tầm thường trên $\mathbb{Q}$. Khi đó,*

- (i) *Nếu $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối Ácsimet thì $|\cdot|$ tương đương với giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbb{Q}$.*
- (ii) *Nếu $|\cdot|$ là một giá trị tuyệt đối phi Ácsimet thì $|\cdot|$ tương đương với một giá trị tuyệt đối p -adic.*

Định nghĩa 1.3.8. Giả sử k là một trường số. Một lớp tương đương các giá trị tuyệt đối trên k được gọi là một *định giá* (nếu không sợ nhầm lẫn, đơn giản ta chỉ nói là giá trị tuyệt đối) của k .

Từ Định nghĩa 1.3.8 và Mệnh đề 1.3.5 ta có ngay nhận xét sau.

Nhận xét 1.3.9. Giả sử v, w là hai giá trị tuyệt đối thuộc cùng một định giá của trường số k thì chúng xác định cùng một tô pô trên k .

Định lý 1.3.10. (Xem [15], Định lý 7.12) *Cho k là một trường số. Khi đó tồn tại đúng một định giá của k*

- (i) cho mỗi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$;
- (ii) cho mỗi phép nhúng thực;
- (iii) cho mỗi cặp phép nhúng phức.

Sự chuẩn hóa các giá trị tuyệt đối

Trong mỗi lớp tương đương các giá trị tuyệt đối của k , chúng ta chọn một giá trị tuyệt đối chuẩn hóa như sau:

- (i) Đối với một ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathcal{O}_k$

$$|a|_{\mathfrak{p}} = (1/\mathbb{N}\mathfrak{p})^{ord_{\mathfrak{p}}(a)} = (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} : (a))^{-1};$$

- (ii) Đối với một phép nhúng thực $\sigma : k \rightarrow \mathbb{R}, |a| = |\sigma(a)|$;
- (iii) Đối với một phép nhúng thuần ảo $\sigma : k \rightarrow \mathbb{C}, |a| = |\sigma(a)|^2$.

Định nghĩa 1.3.11. *Định giá rời rạc* (discrete valuation) trên trường k là một hàm $v : k \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ thỏa mãn:

- (i) $v(a) = \infty$ khi và chỉ khi $a = 0$;
- (ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$;
- (iii) $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$, với mọi $a, b \in k$.

Ví dụ 1.3.12. (a) Cho p là một số nguyên tố. Hàm $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ xác định bởi $v_p(p^r \frac{m}{n}) = r$, trong đó $(m, p) = 1, (n, p) = 1, m, n, r \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}, v_p(0) = \infty$, là một định giá rời rạc. Thật vậy, các điều kiện (i), (ii) dễ dàng kiểm tra. Đối với điều kiện (iii), giả sử $a = p^{r_1} \frac{m_1}{n_1}, b = p^{r_2} \frac{m_2}{n_2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $r_2 \geq r_1$. Khi đó

$$a + b = p^{r_1} \left(\frac{m_1 n_2 + p^{r_2 - r_1} m_2 n_1}{n_1 n_2} \right).$$

Vì $(n_1, p) = 1, (n_2, p) = 1$ nên $(n_1 n_2, p) = 1$. Do đó, $v_p(a + b) \geq r_1 = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

(b) Hàm $\deg : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ xác định bởi $\deg(f(x)) = \deg f(x)$ không phải là định giá rời rạc vì không thỏa mãn điều kiện (iii).

Định nghĩa 1.3.13. Giả sử k là một trường, v là giá trị tuyệt đối không tầm thường. Một dãy các phần tử (a_n) của k được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$|a_n - a_m|_v < \epsilon \text{ với mọi } m, n > N.$$

Trường k được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy có giới hạn trong k .

Ví dụ 1.3.14. Dãy số (a_n) :

$$8, 68, 668, 6668, \dots$$

là dãy Cauchy với giá trị tuyệt đối 5-adic trên $\mathbb{Q}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3}$.

Thật vậy, ta có

$$|a_m - a_n|_5 = 5^{-n}, (m > n).$$

Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$, chọn $N = \lceil \log_5 \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$. Do đó, dãy (a_n) là dãy Cauchy.

Hơn nữa, ta có

$$6.8 - 8 = 40 = 5^2 \cdot 2^3; 6.68 - 8 = 400 = 5^3 \cdot 2^4; 6.668 - 8 = 4000 = 5^4 \cdot 2^5, \dots$$

Do đó, $|6a_n - 8|_5 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Vì vậy, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3}$.

Mệnh đề 1.3.15. (Xem [11], Chương XII, Mệnh đề 2) *Tồn tại cặp (k_v, i) gồm trường k_v đầy đủ đối với một giá trị tuyệt đối nào đó và phép nhúng $i : k \rightarrow k_v$ sao cho giá trị tuyệt đối trên k được cảm sinh bởi giá trị tuyệt đối trên k_v (tức là $|x|_v = |ix|$ với $x \in k$). Ngoài ra, ik trù mật trong k_v . Nếu (k'_v, i') là một cặp khác thì tồn tại một đẳng cấu $\psi : k_v \rightarrow k'_v$ bảo toàn các giá trị tuyệt đối sao cho biểu đồ sau giao hoán:*

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{i'} & k'_v \\ & \searrow i & \nearrow \psi \\ & k_v & \end{array}$$

Từ Mệnh đề 1.3.15 ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3.16. Cặp (k_v, i) trong Mệnh đề 1.3.15 được gọi là *bao phủ* của k .

Định nghĩa 1.3.17. Giả sử v là một giá trị tuyệt đối trên k và E là một mở rộng của k . Chúng ta nói rằng ω là giá trị tuyệt đối trên E được mở rộng từ một giá trị tuyệt đối v trên k , kí hiệu $\omega|v$, nếu hạn chế của ω trên k chính là v .

Định nghĩa 1.3.18. Nếu v là một giá trị tuyệt đối trên k sao cho với mọi mở rộng hữu hạn E của trường k ta có đẳng thức $[E : k] = \sum_{\omega|v} [E_\omega : k_v]$ thì ta nói v *ngoan* (well behaved).

Định lý 1.3.19. (Xem [11], Chương XII, Mệnh đề 11) *Giả sử v là một giá trị tuyệt đối ngoan trên k , E là mở rộng hữu hạn của k và $\alpha \in k$. Với mỗi giá trị tuyệt đối ω trên E mở rộng của v , đặt*

$$N_\omega = [E_\omega : k_v].$$

Khi đó,

$$\prod_{\omega|v} |\alpha|_\omega^{N_\omega} = |N_k^E(\alpha)|_v,$$

trong đó $N_k^E(\alpha)$ là chuẩn của phần tử $\alpha \in k$.

Định nghĩa 1.3.20. (i) Cho k là một trường. Một giá trị tuyệt đối trên k được gọi là *thực sự* (proper) nếu nó không tầm thường, ngoạn và nếu k là trường đặc số 0 thì hạn chế của nó xuống $\mathbb{Q}$ hoặc là giá trị tuyệt đối tầm thường hoặc là giá trị tuyệt đối thông thường hoặc là giá trị tuyệt đối p -adic.

(ii) Tập M_k gồm các giá trị tuyệt đối trên k được gọi là *thực sự* (proper) nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

- (a) mọi giá trị tuyệt đối trong nó đều thực sự;
- (b) nếu hai giá trị tuyệt đối phân biệt bất kỳ thì không tương đương;
- (c) với bất kỳ $x \in k^*$ thì chỉ tồn tại một số hữu hạn các giá trị tuyệt đối $v \in M_k$ sao cho $|x|_v \neq 1$.

Vì với mỗi $x \in k^*$ chỉ tồn tại hữu hạn $v \in M_k$ sao cho $|x|_v \neq 1$ nên với mọi số thực $\lambda_v > 0$, tích $\prod_{v \in M_k} |x|_v^{\lambda_v}$ hữu hạn. Đó là cơ sở cho khái niệm sau.

Định nghĩa 1.3.21. Cho M_k là tập các giá trị tuyệt đối thực sự trên k . Với mỗi $v \in M_k$, đặt λ_v là một số thực dương. Chúng ta nói rằng M_k thỏa mãn *công thức nhân với bội* λ_v nếu với mỗi $x \in k^*$, chúng ta có

$$\prod_{v \in M_k} |x|_v^{\lambda_v} = 1.$$

Để thuận tiện chúng ta đặt

$$||x||_v = |x|_v^{\lambda_v}.$$

Khi đó, công thức nhân với bội λ_v được viết lại là

$$\prod_{v \in M_k} ||x||_v = 1.$$

Chúng ta nói rằng M_k thỏa mãn *công thức nhân* nếu tất cả $\lambda_v = 1$, với mọi $v \in M_k$.

Ví dụ 1.3.22. Xét $k = \mathbb{Q}$ và $\lambda_v = 1$ với mọi $v \in M_{\mathbb{Q}} = \{\infty, 2, 3, 5, \dots\}$. Với mọi $x \in \mathbb{Q}^*$, ta viết

$$x = \pm \prod_{p \in P} p^{\nu(x)}$$

trong đó, P là tập các số nguyên tố, ν là định giá rời rạc trên $\mathbb{Q}$. Khi đó

$$\|x\|_{\infty} = |x| = \prod_{p \in P} p^{\nu(x)} \text{ (giá trị tuyệt đối thông thường)}$$

và

$$\|x\|_p = |x|_p = p^{-\nu_p(x)}, \text{ với } p \in P.$$

Do đó, $\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \|x\|_v = 1$ hay $M_{\mathbb{Q}}$ thỏa mãn công thức nhân.

Định lý 1.3.23. *Giả sử E là mở rộng hữu hạn của k và M_k thỏa mãn công thức nhân. Khi đó, M_E thỏa mãn công thức nhân với bội $N_{\omega} = [E_{\omega} : k_{\omega}]$, trong đó $\omega \in E, v \in M_k$, với $\omega|v$.*

Chứng minh. Giả sử $x \in E^*$, ta có

$$\prod_{\omega \in M_E} |x|_{\omega}^{N_{\omega}} = \prod_{v \in M_k} \prod_{\omega|v, \omega \in M_E} |x|_{\omega}^{N_{\omega}}.$$

Theo Định lý 1.3.19, ta có $\prod_{\omega|v} |x|_{\omega}^{N_{\omega}} = |N_k^E(x)|_v$.

Do đó,

$$\prod_{\omega \in M_E} |x|_{\omega}^{N_{\omega}} = \prod_{v \in M_k} |N_k^E(x)|_v = 1.$$

◇

Mệnh đề 1.3.24. (Xem [15], Mệnh đề 7.2) *Một giá trị tuyệt đối $|\cdot|_v$ là giá trị tuyệt đối phi Ácsimet khi và chỉ khi tập $\{|m|_v | m \in \mathbb{Z}\}$ bị chặn.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử $|\cdot|_v$ là một giá trị tuyệt đối phi Ácsimet. Khi đó, với $m > 0$ ta luôn có,

$$|m|_v = |1 + 1 + \dots + 1|_v \leq \max\{|1|_v, |1|_v, \dots, |1|_v\} = |1|_v = 1.$$

Hơn nữa, ta có, $|-1|_v = |1|_v$. Do đó, $|-m|_v = |m|_v \leq 1$.

Vì vậy, với mọi số nguyên m ta luôn có $|m|_v \leq 1$ hay nói cách khác tập $\{|m|_v | m \in \mathbb{Z}\}$ bị chặn.

Điều kiện đủ. Giả sử $|m|_v \leq N$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Khi đó, với mọi $x, y \in k$

$$|x + y|_v^n = |(x + y)^n|_v = \left| \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r} \right|_v \leq \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} |x^r|_v |y^{n-r}|_v.$$

Hơn nữa, $|x|_v^r |y|_v^{n-r} \leq \max\{|x|_v^n, |y|_v^n\} = \max\{|x|_v, |y|_v\}^n$ và $\binom{n}{r}$ là một số nguyên. Do đó,

$$|x + y|_v^n \leq N(n + 1) \max\{|x|_v, |y|_v\}^n.$$

Lấy căn bậc n hai vế, ta được

$$|x + y|_v \leq N^{\frac{1}{n}} (n + 1)^{\frac{1}{n}} \max\{|x|_v, |y|_v\}.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta được $|x + y|_v \leq \max\{|x|_v, |y|_v\}$. Do đó, giá trị tuyệt đối $|\cdot|_v$ là một giá trị tuyệt đối phi Ácsimet. $\diamond$

Từ Mệnh đề 1.3.24 ta có nhận xét sau.

Nhận xét 1.3.25. Một giá trị tuyệt đối $|\cdot|_v$ là giá trị tuyệt đối phi Ácsimet khi và chỉ khi $|m|_v \leq 1$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

Chương 2

Mở rộng phương trình Thue

Đây là chương chính của luận văn. Trong chương này, chúng tôi sẽ chứng minh về tính không trù mật của $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ trong $\bar{\mathcal{Z}}$. Chương này được chia thành hai phần. Phần thứ nhất đưa ra định nghĩa về điểm nguyên, độ cao Weil và một số kết quả cơ bản liên quan đến phần sau. Phần thứ hai là các kết quả chính của bài báo, chúng tôi chứng minh tính không trù mật của $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ trong $\bar{\mathcal{Z}}$. Kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.15, Định lý 2.2.16 và Định lý 2.2.19.

2.1 Độ cao Weil

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử k là một trường số, S là tập hữu hạn các giá trị tuyệt đối chứa giá trị tuyệt đối Ácsimet A_∞ .

(i) Phần tử $x \in k$ được gọi là S -nguyên trên k nếu $|x|_v \leq 1$, với mọi $v \notin S$. Tập hợp các phần tử S -nguyên trên k cùng với hai phép toán trên k lập thành một vành được gọi là *vành S -nguyên*, kí hiệu $\mathcal{O}_{k,S}$ hoặc $\mathcal{O}_S$ (nếu k đã được hiểu).

(ii) Một điểm $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n$ được gọi là *một điểm nguyên* nếu tất cả các thành phần $x_i, i = \overline{0, n}$ của nó là S -nguyên trên k .

(iii) Giả sử $\mathcal{Z}$ là một siêu mặt, R được gọi là *tập các điểm S -nguyên* trên $\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}$ nếu tồn tại một phép nhúng affine $i : \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ sao cho mọi điểm $P \in R$ có các tọa độ đều nguyên.

Ví dụ 2.1.2. Xét $k = \mathbb{Q}$, $S = A_\infty$. Giả sử $v \notin S$ là một giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{Q}$. Khi đó, theo Định lý Ostrowski, v là một giá trị tuyệt đối p -adic trên $\mathbb{Q}$. Do đó, với mọi $a \in \mathbb{Q}$, $v(a) \leq 1$ với mọi $v \notin S$ khi và chỉ khi $a \in \mathbb{Z}$. Suy ra, $\mathcal{O}_S = \mathbb{Z}$. Như vậy, tập các phần tử A_∞ -nguyên trên $\mathbb{Q}$ chính là tập các số nguyên $\mathbb{Z}$.

Để phát biểu một số kết quả nổi tiếng liên quan đến điểm nguyên, chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa độ cao của Weil.

Định nghĩa 2.1.3. Giả sử $P(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_k^n$. Số

$$H(P) = \prod_{v \in M_k} \max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v)$$

được gọi là *độ cao Weil* của điểm P .

Chú ý 2.1.4.

(i) Định nghĩa 2.1.3 là xác định tốt (tức là $H(P)$ không phụ thuộc vào việc chọn tọa độ thuần nhất của P). Thật vậy, giả sử $P^1(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda \in k$, $P^1 \equiv P$. Khi đó,

$$\begin{aligned} H(P^1) &= \prod_{v \in M_k} \max(|\lambda x_0|_v, \dots, |\lambda x_n|_v) \\ &= \prod_{v \in M_k} |\lambda|_v \max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v) \\ &= \prod_{v \in M_k} \max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v) \quad (\text{vì } \prod_{v \in M_k} |\lambda|_v = 1) \\ &= H(P). \end{aligned}$$

(ii) $H(P)$ phụ thuộc vào trường số. Thật vậy, giả sử E là mở rộng hữu hạn của k . Khi đó,

$$H_E(P) = H_k(P)^{[E:k]} \quad (\text{vì } \prod_{\omega|v, \omega \in M_E} ||x||_\omega = ||x||_v^{[E:k]}).$$

Vì vậy, $H(P)$ còn được gọi là *độ cao tương đối*.

Định nghĩa 2.1.5. Giả sử $P(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_k^n$. Số

$$h(P) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \log H(P)$$

được gọi là *độ cao lôgarít*.

Chú ý 2.1.6. Định nghĩa 2.1.5 không phụ thuộc vào trường số. Thật vậy, giả sử E là mở rộng hữu hạn của k thì

$$\begin{aligned} h_E(P) &= \frac{1}{[E : \mathbb{Q}]} \log H(P) \\ &= \frac{1}{[E : k][k : \mathbb{Q}]} \log H_k(P)^{[E:k]} \\ &= \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \log H_k(P) = h_k(P). \end{aligned}$$

Vì vậy, $h(P)$ còn được gọi là *độ cao tuyệt đối*.

Định lý 2.1.7. (Định lý Không gian con, xem [19] hoặc [26]). *Giả sử k là trường số, S là tập hữu hạn các định giá của k bao gồm cả các giá trị tuyệt đối Ácsimet, $d \geq 2$ là một số nguyên. Với $v \in S$, giả sử họ $L_{v,1}, \dots, L_{v,d}$ các đa thức thuần nhất tuyến tính d biến, độc lập tuyến tính, xác định trên k . Khi đó, với mỗi $\epsilon > 0$, các nghiệm S -nguyên $Q \in \mathcal{O}_S^d$ của bất đẳng thức*

$$\sum_{v \in S} \log \left(\prod_{t=2}^d |L_{v,t}(Q)|_v \right) \leq -\epsilon h(Q)$$

nằm trong hợp hữu hạn các siêu phẳng của k^d xác định trên k .

Định lý 2.1.8. (Định lý Siegel, xem [27, Định lý 19.1]) *Cho C là một đường cong affine trơn trên trường số k . Giả sử C có ít nhất 3 điểm tại vô cực. Khi đó, tất cả tập các điểm nguyên trên C là hữu hạn.*

2.2 Mở rộng của phương trình Thue

2.2.1 Các kết quả bổ trợ

Bổ đề sau là một kết quả nổi tiếng của lý thuyết vành Cohen-Macaulay.

Bổ đề 2.2.1. Cho $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ là các đa thức thuần nhất trong $k[X_0, \dots, X_n]$ xác định đa tạp $n - m$ chiều trong $\mathbb{P}^n$. Khi đó $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ là một dãy chính quy.

Chứng minh. Áp dụng các Định lý 1.2.18 và Định lý 1.2.22. $\diamond$

Bổ đề 2.2.2. Cho R là vành giao hoán, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ là dãy chính quy trong R sinh ra ideal $I \subseteq R$. Giả sử $q, q_1, \dots, q_h \in R$ và

$$\varphi_1^{i_1} \dots \varphi_m^{i_m} q = \sum_{r=1}^h \varphi_1^{j_1(r)} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r, \quad (2.1)$$

trong đó, $(j_1(r), \dots, j_m(r)) > (i_1, \dots, i_m), r = 1, \dots, h$ (theo thứ tự từ điển). Khi đó $q \in I$.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh quy nạp theo m .

Với $m = 1$, ta có $\varphi_1^{i_1} q = \sum_{r=1}^h \varphi_1^{j_1(r)} q_r, j_1(r) > i_1$. Vì φ_1 là chính quy nên $\varphi_1^{i_1}$ cũng là chính quy. Mặt khác, vì $j_1(r) > i_1$, với mọi r mà $\varphi_1^{i_1}$ chính quy nên ta có

$$q = \sum_{r=1}^h \varphi_1^{j_1(r)-i_1} q_r \in I.$$

Giả sử bổ đề đúng đến $m - 1$. Ta cần chứng minh đúng với m .

Tiến hành đánh số lại các chỉ số $1, \dots, h$. Giả sử $j_1(r) > i_1$ với $r = 1, \dots, s$ (có thể $s = 0$) và $j_1(r) = i_1$ với $r = s + 1, \dots, h$ (trường hợp $j_1(r) < i_1$ không xảy ra vì $(j_1(r), \dots, j_m(r)) > (i_1, \dots, i_m), r = 1, \dots, h$).

Khi đó, biểu thức (2.1) được viết lại như sau:

$$\varphi_1^{i_1} \dots \varphi_m^{i_m} q = \sum_{r=1}^s \varphi_1^{j_1(r)} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r + \sum_{r=s+1}^h \varphi_1^{i_1} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r. \quad (2.2)$$

Vì φ_1 không là ước của không của vành R nên từ (2.2) ta có,

$$\varphi_2^{i_2} \dots \varphi_m^{i_m} q = \sum_{r=1}^s \varphi_1^{j_1(r)-i_1} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r + \sum_{r=s+1}^h \varphi_2^{j_2(r)} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r$$

hay

$$\varphi_2^{i_2} \dots \varphi_m^{i_m} q = \varphi_1 \sigma + \sum_{r=s+1}^h \varphi_2^{j_2(r)} \dots \varphi_m^{j_m(r)} q_r, \quad (2.3)$$

trong đó, $\sigma \in R$.

Xét vành $R^1 := R/(\varphi_1)$. Khi đó, từ (2.3) ta có,

$$\bar{\varphi}_2^{i_2} \dots \bar{\varphi}_m^{i_m} \bar{q} = \sum_{r=s+1}^h \bar{\varphi}_2^{j_2(r)} \dots \bar{\varphi}_m^{j_m(r)} \bar{q}_r,$$

trong đó $\bar{\varphi}_i = \varphi_i + (\varphi_1) \in R^1$.

Vì $(j_1(r), \dots, j_m(r)) > (i_1, \dots, i_m)$, $r = 1, \dots, h$ và $j_1(r) = i_1$ với $r = s+1, \dots, h$ nên $(j_2(r), \dots, j_m(r)) > (i_2, \dots, i_m)$, $r = s+1, \dots, h$.

Hơn nữa, theo Nhận xét 1.2.21 (2), dãy $\bar{\varphi}_2 \dots \bar{\varphi}_m$ là dãy chính quy trong R^1 . Theo giả thiết quy nạp ta được $\bar{q} \in (\bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$. Tức là,

$$\bar{q} = \sum_{i=2}^m \bar{a}_i \bar{\varphi}_i, \bar{a}_i \in R^1, i = 2, \dots, m.$$

Do đó, $q - \sum_{i=2}^m a_i \varphi_i \in (\varphi_1)$. Vì vậy, $q \in I$. ◇

Các Bổ đề 2.2.3 và Bổ đề 2.2.5 được chúng tôi trích từ [3, Bổ đề 5]. Để tiện theo dõi chúng tôi trình bày nội dung Bổ đề 5 của bài báo thành hai bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.2.3. (Xem [3], Bổ đề 5) Giả sử $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ là các đa thức thuần nhất trong $k[X_0, \dots, X_n]$ và xác định một đa tạp 0- chiều của $\mathbb{P}^n$. Khi đó, nếu $0 \leq l \leq n$ và $N \geq \sum_{j=1}^l \deg \varphi_j$ thì

$$H_{P_{n,l}}(N) = \sum_{m=0}^l \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{l,m}} (-1)^m \binom{n+N - \sum_{j=1}^m \deg \varphi_{i_j}}{n}$$

trong đó, $I_{l,m}$ là tập con gồm m phần tử của tập $\{1, 2, \dots, l\}$, $P_{n,0} = k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ và $P_{n,i} = P_{n,i-1}/(\varphi_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Chứng minh. Vì $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ xác định một đa tạp chiều 0 nên theo Bổ đề 2.2.1 dãy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ là dãy chính quy. Khi đó, bằng cách truy hồi ta được

$$P_{n,i} = k[X_0, X_1, \dots, X_n]/(\varphi_1, \dots, \varphi_i).$$

Hơn nữa, theo định nghĩa hàm Hilbert ta có,

$$H_{P_{n,i}}(N) = \dim \frac{\overline{V}_N}{(\varphi_1, \dots, \varphi_i) \cap \overline{V}_N}. \quad (2.4)$$

Đặt $\delta_i = \deg \varphi_i$, $C(m, n) = \binom{m}{n}$. Ta chứng minh bổ đề quy nạp theo l .

Với $l = 0$, ta có $H_{P_{n,0}}(N) = \dim \overline{V}_N = C(n+N, n)$. Suy ra bổ đề đúng với trường hợp $l = 0$.

Giả sử bổ đề đúng đến $l-1$ và ta cần chứng minh bổ đề đúng với l . Thật vậy, xét dãy khớp ngắn:

$$0 \rightarrow P_{n,l-1}(-\delta_l) \xrightarrow{\varphi_l} P_{n,l-1} \rightarrow P_{n,l-1}/(\varphi_l) \rightarrow 0$$

với $\delta_l = \deg \varphi_l$. Ta lại có, $P_{n,l-1}/(\varphi_l) = P_{n,l}$. Do đó, với $N \geq \sum_{j=1}^l \deg \varphi_j$

ta có,

$$\begin{aligned}
 H_{P_{n,l}}(N) &= H_{P_{n,l-1}}(N) - H_{P_{n,l-1}(-\delta_l)}(N) \\
 &= H_{P_{n,l-1}}(N) - H_{P_{n,l-1}}(N - \delta_l) \\
 &= \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{l-1,m}} (-1)^m \binom{n + N - \sum_{j=1}^m \delta_{i_j}}{n} \\
 &\quad - \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{l-1,m}} (-1)^m \binom{n + N - \delta_l - \sum_{j=1}^m \delta_{i_j}}{n} \\
 &= \sum_{m=0}^l \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{l,m}} (-1)^m \binom{n + N - \sum_{j=1}^m \delta_{i_j}}{n}.
 \end{aligned}$$

◇

Ví dụ 2.2.4. Cho $\varphi_1 = X_1^2 + X_2^2$, $\varphi_2 = X_0^4 + X_1^4 + X_2^4$ trong $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$. Ta có, $\varphi_1 \cap \varphi_2 = (0, 0, 0)$, $\deg \varphi_1 = 2$, $\deg \varphi_2 = 4$. Khi đó, φ_1, φ_2 là các đa thức thuần nhất và xác định đa tạp chiều 0.

Với $0 \leq l \leq 2$, $N \geq \sum_{j=1}^n \deg \varphi_j = 6$, ta có

$$\begin{aligned}
 H_{P_{2,0}}(N) &= \binom{2+N}{2} = \frac{N^2 + 3N + 2}{2} \\
 H_{P_{2,1}}(N) &= \binom{2+N}{2} - \binom{N}{2} = 2N + 1 \\
 H_{P_{2,2}}(N) &= \binom{2+N}{2} - \binom{N}{2} - \binom{N-2}{2} + \binom{N-4}{2} = 8.
 \end{aligned}$$

Trong bài báo [6, Lemma 2.3] các tác giả khẳng định với N đủ lớn thì ta có (2.5) mà không đưa ra một cận dưới nào cho N . Bổ đề sau đây chỉ ra một cách tường minh bị chặn của N , bổ đề này được trích dẫn từ bài báo [3].

Bổ đề 2.2.5. *Giả sử $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ là các đa thức thuần nhất trong $k[X_0, \dots, X_n]$*

và xác định một đa tạp 0–chiều của $\mathbb{P}^n$. Khi đó, với $N \geq \sum_{j=1}^n \deg \varphi_j$

$$\dim \frac{\overline{V}_N}{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cap \overline{V}_N} = \deg \varphi_1 \dots \deg \varphi_n. \quad (2.5)$$

Chứng minh. Từ (2.4) ta có, $H_{P_{n,n}}(N) = \dim \frac{\overline{V}_N}{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cap \overline{V}_N}$.
Hơn nữa, từ Bổ đề 2.2.3 ta có

$$H_{P_{n,n}}(N) = \sum_{m=0}^n \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{n,m}} (-1)^m \binom{n + N - \sum_{j=1}^n \deg \varphi_{i_j}}{n}.$$

Do đó, để chứng minh bổ đề ta chỉ cần chứng minh

$$H_{P_{n,n}}(N) = \Pi_{i=1}^n \delta_i \text{ với } N \geq \sum_{j=1}^n \deg \varphi_j \text{ với } \delta_i = \deg \varphi_i, i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Chúng ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n .

Với $n = 1$ và $N \geq \delta_1$, từ Bổ đề 2.2.3 ta có,

$$H_{P_{1,1}}(N) = C(1 + N, 1) - C(1 + N - \delta_1, 1) = \delta_1.$$

Giả sử (2.6) đúng đến $n - 1$, ta chứng minh (2.6) đúng với n . Thật vậy,

ta có

$$\begin{aligned}
 H_{P_{n,n}}(N) &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{n,m}} (-1)^m [C(n + N - \sum_{j=1}^n \delta_{i_j}, n) \\
 &\quad - C(n + N - \sum_{j=1}^n \delta_{i_j} - \delta_n, n)] \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{n-1,m}} (-1)^m \sum_{i=1}^{\delta_n} C(n + N - \sum_{j=1}^n \delta_{i_j} - i, n-1) \\
 &= \sum_{i=1}^{\delta_n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_m\} \in I_{n-1,m}} (-1)^m C(n + N - \sum_{j=1}^n \delta_{i_j} - i, n-1) \\
 &= \sum_{i=1}^{\delta_n} H_{P_{n-1,n-1}}(N - i). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Vì $N \geq \sum_{j=1}^n \delta_j$ nên với $1 \leq i \leq \delta_n$ ta có, $N - i \geq \sum_{i=1}^{\delta_{n-1}} \delta_i$.

Do đó, với $1 \leq i \leq \delta_n$ theo giả thiết quy nạp ta có,

$$H_{P_{n-1,n-1}}(N) = \prod_{i=1}^{n-1} \delta_i.$$

Từ (2.7) suy ra

$$H_{P_{n,n}}(N) = \delta_n \prod_{i=1}^{n-1} \delta_i = \prod_{i=1}^n \delta_i.$$

◇

Giả sử h là một đa thức trong $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$, chúng ta ký hiệu $\bar{h}$ là đa thức thuần nhất của h trong $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ nghĩa là $\bar{h}$ là đa thức thuần nhất duy nhất trong $k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ cùng bậc với h và sao cho $\bar{h}(1, X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n)$.

Bổ đề 2.2.6. *Giả sử $X_0, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ là các đa thức thuần nhất trong $k[X_0, \dots, X_n]$ và xác định một đa tạp $n - b - 1$ chiều. Khi đó,*

$$\frac{\bar{V}_N}{(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N} \cong V_N^*$$

trong đó

$$V_N^* = V_N / V_N \cap (G_1, \dots, G_b), G_i = \bar{G}_i(1, X_1, \dots, X_n), \text{ với mọi } i = 1, \dots, b.$$

Hơn nữa, ta có đẳng thức:

$$(G_1, \dots, G_b) \cap V_N = \{A_1 G_1 + \dots + A_b G_b\}$$

trong đó $A_i \in k[X_1, \dots, X_n]$, $\deg A_i \leq N - \deg G_i$, với mọi $i = 1, \dots, b$.

Chứng minh. Xét ánh xạ $\varphi : \bar{V}_N \rightarrow V_N^* = V_N / V_N \cap (G_1, \dots, G_b)$ xác định bởi $\varphi(F(X_0, \dots, X_n)) = [F(1, X_1, \dots, X_n)]$, trong đó $F(X_0, \dots, X_n)$ là đa thức thuần nhất bậc N . Khi đó φ là một k -đồng cấu.

Giả sử $\bar{q} \in V_N^*$, $\bar{q} = q(X_1, \dots, X_n) + V_N \cap (G_1, \dots, G_b)$.

Đặt $H(X_0, \dots, X_n) = X_0^{N-\deg q} q(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}) \in \bar{V}_N$.

Khi đó $\varphi(H(X_0, \dots, X_n)) = \bar{q}$. Do đó, φ toàn cấu.

Tiếp theo, ta chứng minh $\ker \varphi = (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$. Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh $\ker \varphi \subseteq (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$.

Giả sử $q \in \ker \varphi$ tức $\varphi(q) = 0$ hay $q(1, X_1, \dots, X_n) \in V_N \cap (G_1, \dots, G_b)$. Khi đó, $X_0^d q \in (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$ với $d = N - \deg q$. Theo giả thiết, $X_0, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ xác định đa tạp $n - b - 1$ chiều. Khi đó, theo Bổ đề 2.2.1, ta có dãy $X_0, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ là dãy chính quy. Do đó, $q \in (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$, trái lại X_0 là ước của $k[X_0, \dots, X_n] / (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b)$. Do đó, $\ker \varphi \subseteq (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$. Vì vậy, $\ker \varphi = (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$. Theo định lý đồng cấu mô đun, ta có

$$\frac{\bar{V}_N}{(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N} \cong V_N^*.$$

Cuối cùng, ta chứng minh

$$(G_1, \dots, G_b) \cap V_N = \{A_1 G_1 + \dots + A_b G_b\}$$

trong đó $A_i \in k[X_1, \dots, X_n]$, $\deg A_i \leq N - \deg G_i$, với mọi $i = 1, \dots, b$.

Đặt $W = \{A_1 G_1 + \dots + A_b G_b : A_i \in k[X_1, \dots, X_n], \deg A_i \leq N - \deg G_i\}$.

Ta chỉ cần chứng minh, $(G_1, \dots, G_b) \cap V_N \subseteq W$. Thật vậy, giả sử $q_1 \in (G_1, \dots, G_b) \cap V_N$. Ta có, $q = X_0^{N-\deg q_1} \bar{q}_1 \in \bar{V}_N$. Ta có, $\varphi(\bar{q}) = 0$ hay

$\bar{q} \in \ker \varphi = (\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_N$. Do đó, $\bar{q} = B_1 \bar{G}_1 + \dots + B_b \bar{G}_b$, với $\deg B_i \leq N - \deg G_i, i = 1, \dots, b$. Cho $X_0 = 1$, ta có, $q_1 = A_1 G_1 + \dots + A_b G_b \in W$, với $A_i = B_i(1, X_1, \dots, X_n), i = 1, \dots, b$. Do đó, $(G_1, \dots, G_b) \cap V_N \subseteq W$. Khi đó, $(G_1, \dots, G_b) \cap V_N = \{A_1 G_1 + \dots + A_b G_b : A_i \in k[X_1, \dots, X_n], \deg A_i \leq N - \deg G_i, i = 1, \dots, b\}$. $\diamond$

Giả sử $\deg f_i = \delta$, với mọi $i = \overline{1, r}$. Trong các mệnh đề, định lý trong mục 2.2 nếu không nói gì thêm ký hiệu δ được dùng trong trường hợp tất cả các đa thức $f_i, i = \overline{1, r}$ có cùng bậc δ . Cố định N , sắp xếp bộ các số nguyên không âm $(i) = (i_1, \dots, i_{n-b})$ theo thứ tự từ điển thỏa mãn $\sigma(i) := \sum_j i_j \leq \frac{N}{\delta}$.

Đặt

$$W_{(i)} = \sum_{(e) \geq (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} V_{N-\delta\sigma(e)}^*, \text{ trong đó}$$

$$V_N^* = \frac{V_N}{(G_1, \dots, G_b) \cap V_N}.$$

Bổ đề 2.2.7. *Giả sử $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ xác định đa tạp chiều 0, $\deg \bar{\gamma}_i = \delta$ với mọi $i = \overline{1, n-b}$ và $(i) \leq (i')$ là hai bộ liên tiếp. Khi đó,*

$$\frac{W_{(i)}}{W_{(i')}} \cong \frac{\bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}}{(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}}. \quad (2.8)$$

Chứng minh. Giả sử $q(X_0, \dots, X_n) \in \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}$. Khi đó, $q(1, X_1, \dots, X_n) \in V_{N-\delta\sigma(i)}$. Gọi q^* là rút gọn của $q(1, \dots, X_n)$ modulo $(G_1, \dots, G_b)$. Khi đó, $q^* \in V_{N-\delta\sigma(i)}^*$. Do đó, $\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^* \in W_{(i)}$.

Xét ánh xạ $\varphi : \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)} \rightarrow \frac{W_{(i)}}{W_{(i'')}}$ xác định bởi $\varphi(q) = [\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^*]$.

Khi đó, φ là một k -đồng cấu.

Giả sử $\bar{q} + W_{(i')} \in \frac{W_{(i)}}{W_{(i'')}}$, $\bar{q} \in W_{(i)}$. Ta có, $\bar{q} = \sum_{(e) \geq (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} q_{N-\delta\sigma(e)}^*$,

với $q_{N-\delta\sigma(e)}^* = q_{N-\delta\sigma(e)}(X_1, \dots, X_n) + (G_1, \dots, G_b) \cap V_{N-\delta\sigma(e)} \in V_{N-\delta\sigma(e)}^*$.

Đặt

$$a(e) = N - \delta\sigma(i) - \deg q_{N-\delta\sigma(e)}.$$

$$q = \sum_{(e) \geq (i)} q_{N-\delta\sigma(e)}(X_1, \dots, X_n) X_0^{a(e)} \in \overline{V}_{N-\delta\sigma(i)}.$$

Khi đó, $\varphi(q) = \bar{q} + W_{(i')}$. Do đó, φ là toàn cầu.

Tiếp theo, ta chứng minh $\ker \varphi = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \overline{V_{N-\delta\sigma(i)}}$.

Giả sử $q \in \ker \varphi$ tức $\varphi(q) = 0$. Do đó, $\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^* \in W_{(i')}$, trong đó q^* là rút gọn của $q(1, \dots, X_n)$ modulo $(G_1, \dots, G_b)$. Vì $(i) \leq (i')$ là hai bộ liên tiếp nên $W_{(i')} = \sum_{(e) \geq (i')} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} V_{N-\delta\sigma(e)}^* = \sum_{(e) > (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} V_{N-\delta\sigma(e)}^*$.

Khi đó, $\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^* = \sum_{(e) > (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} q_{N-\delta\sigma(e)}$ với $q_{N-\delta\sigma(e)} \in V_{N-\delta\sigma(e)}^*$.

Gọi $q_{N-\delta\sigma(e)}, q^*$ lần lượt là các phần tử đại diện của các lớp $q_{N-\delta\sigma(e)} \in V_{N-\delta\sigma(e)}^*, q^* \in V_{N-\delta\sigma(i)}$.

Khi đó, theo Bổ đề 2.2.6, ta có thể giả sử $\deg(A_i G_i) \leq N$, với mọi $i = 1, \dots, b$, ta được

$$\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^* = \sum_{(e) > (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} q_{N-\delta\sigma(e)} + A_1 G_1 + \dots + A_b G_b \quad (2.9)$$

là đẳng thức trong $k[X_1, \dots, X_n]$.

Ta có,

$$\deg(\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^*) \leq (i_1 + \dots + i_{n-b})\delta + N - \delta\sigma(i) = \sigma(i)\delta + N - \delta\sigma(i) = N.$$

$$\deg(\gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} q_{N-\delta\sigma(e)}) \leq (e_1 + \dots + e_{n-b})\delta + N - \delta\sigma(e) = \sigma(e)\delta + N - \delta\sigma(e) = N.$$

Như vậy, tất cả các số hạng của (2.9) có bậc $\leq N$.

$$\text{Đặt } a(e) = N - (\deg q(e) + \delta\sigma(e)) \geq N - (N - \delta\sigma(e) + \delta\sigma(e)) = 0.$$

Thuần nhất hóa bậc N và rút gọn theo modulo $(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b)$, ta được

$$\bar{\gamma}_1^{i_1} \dots \bar{\gamma}_{n-b}^{i_{n-b}} \bar{q} = \sum_{(e) > (i)} \bar{\gamma}_1^{e_1} \dots \bar{\gamma}_{n-b}^{e_{n-b}} X_0^{a(e)} q_{N-\delta\sigma(e)} \pmod{(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b)}. \quad (2.10)$$

$$\text{Ta có, } \deg(X_0^{a(e)} \bar{q}(e)) = N - \deg(\gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}}) = N - \delta\sigma(e).$$

Theo giả thiết, các phần tử $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ xác định đa tạp chiều

0 của $\mathbb{P}^n$. Theo Bổ đề 2.2.1, các phần tử đó lập thành một dãy chính quy trong vành đa thức $k[X_0, \dots, X_n]$. Như vậy, $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}$ xác định một dãy chính quy trong $k[X_0, \dots, X_n]/(\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b)$.

Theo Bổ đề 2.2.2, từ (2.10) ta có $q \in (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}$ hay $\ker \varphi \subseteq (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}$.

Giả sử $q \in (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}$ tức $q = \sum_{j=1}^{n-b} \alpha_j \bar{\gamma}_j + \sum_{l=1}^b A_l \bar{G}_l$ với $\alpha_j, A_l \in k[X_0, \dots, X_n]$. Vì $q, \bar{\gamma}_j, \bar{G}_l$ là thuần nhất nên ta có thể giả sử các A_l, α_j là các đa thức thuần nhất với bậc $\deg \alpha_j = \deg q - \delta = N - \delta(\sigma(i) + 1)$.

Cho $X_0 = 1$ và rút gọn modulo $(G_1, \dots, G_b)$, ta được $q^* = \sum \alpha_j^* \gamma_j$, với $\alpha_j^* \in V_{N-\delta(\sigma(i)+1)}^*$.

Ta có, $\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q^* \in W_{(i')}$ hay $\varphi(q) = 0$. Do đó, $q \in \ker \varphi$.

Vì vậy, $(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)} \subseteq \ker \varphi$.

Theo định lý đồng cấu mô đun, ta có

$$\frac{W_{(i)}}{W_{(i')}} \cong \frac{\bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}}{(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b) \cap \bar{V}_{N-\delta\sigma(i)}}.$$

◇

Bổ đề sau cho chúng ta xác định được số chiều của $\frac{W_{(i)}}{W_{(i')}}$.

Bổ đề 2.2.8. *Giả sử $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{n-b}, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_b$ xác định đa tạp chiều 0, $\deg \bar{\gamma}_i = \delta$ với mọi $i = 1, n-b$, $\deg \bar{G}_i = e_i$ với mọi $i = 1, b$ và $(i) \leq (i')$ là hai bộ liên tiếp. Khi đó, tồn tại số nguyên N_0 chỉ phụ thuộc vào $f_1, \dots, f_r, g, G_1, \dots, G_b$ sao cho với $\delta\sigma(i) < N - N_0$*

$$\Delta_{(i)} := \dim \frac{W_{(i)}}{W_{(i')}} = e_1 \dots e_b \delta^{n-b}.$$

Hơn nữa, với các bộ (i) còn lại, $\dim \frac{W_{(i)}}{W_{(i')}}$ bị chặn (bởi $\dim \bar{V}_{N_0}$).

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 2.2.7 và Bổ đề 2.2.5 ta có điều phải chứng minh. ◇

2.2.2 Các kết quả chính

Cho k là trường số và $f_1, \dots, f_r, g$ là các đa thức khác không trong $k[X_1, \dots, X_n]$ với $n \geq 2$ và $\deg g = e$. Trong luận văn này, chúng ta sẽ xét một siêu mặt $\mathcal{X}$ trong $\mathbb{A}^n$ xác định bởi phương trình

$$f_1(X_1, \dots, X_n) \dots f_r(X_1, \dots, X_n) = g(X_1, \dots, X_n). \quad (2.11)$$

Giả sử $\overline{\mathcal{Z}} \subset \mathbb{P}^n$ là giao đầy đủ $n - b$ chiều ($n > b$), không chứa siêu phẳng tại vô cực $X_0 = 0$. Do đó, theo Hệ quả 1.2.17, giao của $\overline{\mathcal{Z}}$ với siêu phẳng $X_0 = 0$ là đa tạp $n - b - 1$ chiều. Hơn nữa, vì $\overline{\mathcal{Z}}$ là giao đầy đủ $n - b$ chiều nên theo định nghĩa tồn tại b đa thức $G_1, G_2, \dots, G_b$ với bậc tương ứng $e_1, e_2, \dots, e_b$ sao cho idêan của $\overline{\mathcal{Z}}$ được sinh bởi $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_b$. Giả sử $\mathcal{Z}$ là đa tạp xác định bởi $\overline{\mathcal{Z}} \cap \mathbb{A}^n$ (đồng nhất $\mathbb{A}^n$ với phần bù của siêu phẳng $X_0 = 0$). Khi đó, idêan của $\mathcal{Z}$ được sinh bởi $G_1, G_2, \dots, G_b$.

Bổ đề 2.2.9. *Giả sử với mọi tập vô hạn $\{P_1, \dots, P_n, \dots\}$ các điểm S -nguyên trên $\mathcal{Z}$, tồn tại tập đại số đóng thực sự của $\mathcal{Z}$ xác định trên k chứa một tập con vô hạn của các điểm. Khi đó, $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ không trù mật Zariski trong $\mathcal{Z}$.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ trù mật Zariski trong $\mathcal{Z}$ tức

$$\overline{\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)} = \overline{\mathcal{Z} \cap \mathcal{O}_S^n} \supseteq \mathcal{Z}.$$

Sắp xếp tất cả các tập con đóng thực sự của $\mathcal{Z}$ xác định trên k thành một dãy $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots$. Đặt $W_j = \bigcup_{k=1}^j \mathcal{Z}_k$ là tập con đóng trong $\mathcal{Z}$. Vì $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ trù mật Zariski trong $\mathcal{Z}$ nên $\overline{\mathcal{Z} \cap \mathcal{O}_S^n} \supseteq \mathcal{Z} \supset W_j$, với mọi $j = 1, 2, \dots$. Do đó, với mỗi j tồn tại điểm S -nguyên $P_j \in \mathcal{Z} \setminus W_j$. Khi đó, theo giả thiết của bổ đề, tồn tại tập đại số đóng $\mathcal{Z}_m$ chứa vô hạn các điểm $P_j, j = 1, 2, \dots$. Theo cách lấy $P_j, j = 1, 2, \dots$, điểm $P_{m+1} \in \mathcal{Z} \setminus W_{m+1} = \bigcap_{k=1}^{m+1} (\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_k)$. Do đó, $P_{m+1} \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_m$ hay $P_{m+1} \notin \mathcal{Z}_m$, mâu thuẫn với $\mathcal{Z}_m$ chứa tất cả các điểm. $\diamond$

Để thuận tiện trong các phát biểu, ta đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.2.10. Cho f và g là hai hàm không âm. Nếu $f < cg$ với c là số dương nào đó thì chúng ta viết $f \ll g$ hoặc $g \gg f$. Và khi đó c được gọi là *hằng số kéo theo*.

Bổ đề 2.2.11. Giả sử $\bar{\mathcal{Z}} \subseteq \bar{\mathcal{X}}$ xác định như trên và bất kỳ $n - b$ trong số các đa thức $\bar{f}_i$ xác định trong $\bar{\mathcal{Z}}$ một tập hữu hạn điểm; Hơn nữa, giả sử các đa thức $f_i, i = 1, \dots, r$ cùng bậc δ và mọi tập $s + 1$ các đa thức $\bar{f}_i$ không có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ và $\{P_1, P_2, \dots, P_m, \dots\}$ là dãy vô hạn các điểm S -nguyên trên $\mathcal{Z}$ và $v \in S$ sao cho với mọi i thỏa mãn

$$0 < |f_1(P_i)|_v \leq |f_2(P_i)|_v \leq \dots \leq |f_r(P_i)|_v.$$

Khi đó,

$$\sum_{j=1}^s \log |f_j(P_i)|_v \leq \log(\|P_i\|_v)(e - \delta(r - s)) + O(1) \quad (2.12)$$

với mọi i đủ lớn, trong đó, hằng số $O(1)$ chỉ phụ thuộc vào $f_1, \dots, f_r, g$ và $v \in S$.

Chứng minh. Vì $\bar{\mathcal{Z}}(k_v)$ compact nên với dãy con vô hạn xét ở trên, với mỗi $v \in S$, tồn tại điểm $P^v \in \bar{\mathcal{Z}}(k_v)$ sao cho $P_i \rightarrow P^v$ theo tô pô v -adic. Đặt $S = S' \uplus S''$ trong đó, S' là tập các $v \in S$ sao cho $P^v \notin \mathcal{Z}$ tức P^v nằm tại vô cực với $v \in S'$.

Nếu $v \in S''$ thì dãy $\{P_i\}$ hội tụ v -adic đến điểm $P^v \in \mathcal{Z}$. Do đó, $|\log(\|P_i\|_v)|_v$ và $|f_j(P_i)|_v$ bị chặn khi $i \rightarrow \infty$. Khi đó, ta có (2.12).

Nếu $v \in S'$ thì dãy $\{P_i\}$ hội tụ v -adic đến điểm $P^v \in \bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$. Giả sử $P^v = (0, \alpha_1^v, \dots, \alpha_n^v)$, trong đó, $\alpha_h^v \in k_v$ thỏa mãn $|\alpha_h^v|_v \leq 1$. Ta có thể giả sử $\alpha_1^v = 1$.

Chúng ta đồng nhất điểm $P(x_1, \dots, x_n) \in A^n(k_v)$ với điểm xạ ảnh $(1, x_1, \dots, x_n)$. Khi đó, một dãy các điểm P như thế hội tụ v -adic đến điểm P^v khi $|x_1|_v \rightarrow \infty$ và $\frac{x_h}{x_1} \rightarrow \alpha_h^v$.

Đặc biệt, $\frac{|x_1|_v}{\|P\|_v} \rightarrow 1$ vì

$$\frac{|x_1|_v}{\|P\|_v} = \frac{|x_1|_v}{\max\{1, |x_1|_v, \dots, |x_n|_v\}} = \frac{1}{\max\{|\frac{1}{x_1}|_v, 1, \dots, |\frac{x_n}{x_1}|_v\}},$$

và $\frac{x_h}{x_1} \rightarrow \alpha_h^v$ đồng thời $|\alpha_h^v|_v \leq 1$. Giả sử $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ là đa thức khác không bậc δ . Với điểm P ở trên, ta có,

$$f(P) = \bar{f}(1, x_1, \dots, x_n) = x_1^\delta \bar{f}\left(\frac{1}{x_1}, 1, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Giả sử $\bar{f}(P^v) \neq 0$, tức là $\bar{f}(0, \alpha_1^v, \dots, \alpha_h^v) \neq 0$. Khi đó,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|f(P_i)|_v}{||P_i||_v^\delta} = |\bar{f}(0, \alpha_1^v, \dots, \alpha_h^v)|_v \neq 0.$$

Do đó, với i đủ lớn, ta có,

$$|f(P_i)|_v \gg ||P_i||_v^\delta,$$

trong đó, hằng số kéo theo chỉ phụ thuộc vào f .

Vì với mọi $s + 1$ các đa thức $\bar{f}_i$ không có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ nên có nhiều nhất s các đa thức $\bar{f}_i$ có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$. Do đó, có ít nhất $r - s$ các đa thức $\bar{f}_i$ không có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$. Vì vậy, có ít nhất $r - s$ các đa thức $\bar{f}_i$ không triệt tiêu tại P^v . Tiến hành đánh số lại sao cho các đa thức $\bar{f}_{s+1}, \dots, \bar{f}_r$ không triệt tiêu tại P^v . Khi đó, với i đủ lớn ta có,

$$|f_1(P_i) \dots f_s(P_i)|_v = \left| \frac{g(P_i)}{f_{s+1}(P_i) \dots f_r(P_i)} \right|_v \ll \frac{|g(P_i)|_v}{||P_i||_v^{(r-s)\delta}} \ll ||P_i||_v^{e-(r-s)\delta}. \quad (2.13)$$

hay

$$\prod_{j=1}^s |f_j(P_i)|_v \ll ||P_i||_v^{e-(r-s)\delta}. \quad (2.14)$$

Lấy lôgarít hai vế của (2.14) ta được (2.12). $\diamond$

Mệnh đề 2.2.12. *Giả sử $\bar{\mathcal{Z}} \subseteq \bar{\mathcal{X}}$ xác định như trên và bất kỳ $n - b$ trong số các đa thức $\bar{f}_i$ xác định trong $\bar{\mathcal{Z}}$ một tập hữu hạn điểm; Hơn nữa, giả sử các đa thức $f_i, i = 1, \dots, r$ cùng bậc δ và mọi tập $s + 1$ các đa thức $\bar{f}_i$ không có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ và bất đẳng thức sau thỏa mãn:*

$$r > \frac{s(n - b + 1)}{n - b} + \frac{\deg g}{\delta}.$$

Khi đó, $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ không trù mật Zariski trong $\mathcal{Z}$.

Chứng minh. Giả sử $\{P_1, P_2, \dots, P_m, \dots\}$ là dãy vô hạn các điểm S -nguyên trên $(k)Z$. Để ý rằng $g = 0$ xác định trong $\bar{Z}$ một đa tạp con thực sự có chiều $\leq n-b-1$. Thật vậy, giả sử $g(x) = 0$ trên $\mathcal{X}$. Vì $f_1(x)\dots f_r(x) = g(x)$ nên tồn tại $i \in \{1, \dots, r\}$ sao cho $f_i(x) = 0$. Nhưng mỗi $f_i = 0$ xác định một đa tạp con thực sự của Z . Khi đó, ta có thể thêm $n-b-1$ phương trình $\bar{f}_j = 0$ để xác định trong $\bar{Z}$ một đa tạp chiều dương, mâu thuẫn giả thiết. Vì vậy, ta có thể giả sử $g(P_j) \neq 0$, với mọi P_j .

Xét một dãy con vô hạn của dãy $\{P_j\}$, với mỗi giá trị tuyệt đối $v \in S$, luôn tồn tại một cách đánh số lại $l_v = l_v^{(1)}, \dots, l_v^{(r)}$ của các số $\{1, 2, \dots, r\}$ sao cho với mọi i và tất cả $j \in \{1, \dots, r\}$ thỏa mãn

$$0 < |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v \leq |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v \leq \dots \leq |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v.$$

Hơn nữa, $\bar{Z}(k_v)$ compact. Vì vậy, với dãy con vô hạn xét ở trên, với mỗi $v \in S$, tồn tại điểm $P^v \in \bar{Z}(k_v)$ sao cho $P_i \rightarrow P^v$ theo tô pô v -adic.

Tiếp theo chúng ta sẽ xây dựng một lọc của V_N^* .

Đặt $S = S' \uplus S''$ trong đó, S' là tập các $v \in S$ sao cho $P^v \notin Z$ tức P^v nằm tại vô cực với $v \in S'$. Cố định $v \in S$ và số nguyên N .

Đặt $\gamma_j = f_{l_v^{(j)}}$. Sắp xếp bộ $n-b$ các số nguyên $(i) = (i_1, \dots, i_{n-b})$ theo thứ tự từ điển sao cho $\sigma(i) = \sum_j i_j \leq \frac{N}{\delta}$. Đặt

$$W_{(i)} = \sum_{(e) \geq (i)} \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_{n-b}^{e_{n-b}} V_{N-\delta\sigma(e)}^*.$$

Khi đó $W_{(0, \dots, 0)} = V_N^*$ và nếu $(i') \geq (i)$ thì $W_{(i)} \supset W_{(i')}$. Vì vậy, $\{W_{(i)}\}$ là một lọc của V_N^* . Đặt $d = d_N = \dim V_N^*$.

Ta sẽ chọn một cơ sở $\{\psi_1 = \psi_1^v, \dots, \psi_d = \psi_d^v\}$ theo quy nạp. Chúng ta bắt đầu với $W_{(i)}$ cuối cùng khác không và ta chọn cơ sở của nó. Giả sử $(i) < (i')$ là hai bộ $n-b$ số nguyên không âm liên tiếp sao cho $\delta\sigma(i), \delta\sigma(i') \leq N$ và giả sử chúng ta đã chọn được các phần tử đầu tiên trong cơ sở của chúng ta sao cho chúng là một cơ sở của $W_{(i')}$. Theo Bổ đề 2.2.7, ta có thể lấy các phần tử đại diện trong $W_{(i)}$ đối với không gian thương $\frac{W_{(i)}}{W_{(i'')}}$ dạng $\gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q$ trong đó, $q \in V_{N-\delta\sigma(i)}^*$. Chúng ta thêm

các phần tử đại diện vào các phần tử đã xây dựng trước được một cơ sở của $W_{(i)}$ và tiến hành quy nạp cho đến khi $W_{(i)} = V_N^*$ thì dừng.

Giả sử ψ là một phần tử của cơ sở ứng với $\frac{W_{(i)}}{W_{(i')}}$. Vì vậy, $\psi = \gamma_1^{i_1} \dots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q$, trong đó $q \in V_{N-\delta\sigma(i)}^*$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |\psi(P_i)|_v &\leq |\gamma_1(P_i)|_v^{i_1} \dots |\gamma_{n-b}(P_i)|_v^{i_{n-b}} |q(P_i)|_v \\ &\ll |\gamma_1(P_i)|_v^{i_1} \dots |\gamma_{n-b}(P_i)|_v^{i_{n-b}} \|P_i\|_v^{N-\delta\sigma(i)}, \end{aligned}$$

trong đó, hằng số kéo theo chỉ phụ thuộc ψ mà không phụ thuộc điểm P_i .

Lấy tích trên tất cả các hàm trong cơ sở và sau đó lấy lôgarít ta được,

$$\begin{aligned} \log \prod_{t=1}^d |\psi_t(P_i)|_v &\leq \sum_{(i)} \Delta_{(i)} (i_1 \log |\gamma_1(P_i)|_v + \dots + i_{n-b} \log |\gamma_{n-b}(P_i)|_v) \\ &\quad + \log(\|P_i\|_v) \left(\sum_{(i)} \Delta_{(i)} (N - \delta\sigma(i)) \right) + c_1, \end{aligned}$$

trong đó, c_1 chỉ phụ thuộc vào ψ mà không phụ thuộc vào điểm P_i .

Áp dụng Bổ đề 2.2.8, ta có

$$d = \sum_{(i)} \Delta_{(i)} = e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b}}{(n-b)!} + O(N^{n-b-1}). \quad (2.15)$$

Giả sử N chia hết cho δ . Vì số bộ m số nguyên không âm có tổng $\leq T \in \mathbb{Z}$ bằng số bộ $m+1$ số nguyên không âm có tổng T và cùng bằng $\binom{T+m}{m}$ nên với $j \in \{1, 2, \dots, n-b\}$ cố định,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(i) \leq \frac{N}{\delta}} i_j &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{(\hat{i})} \sum_{k=1}^{n-b+1} i_k = \frac{1}{n-b+1} \binom{\frac{N}{\delta} + n-b}{n-b} \frac{N}{\delta} \\ &= \frac{N^{n-b+1}}{\delta^{n-b+1} (n-b+1)!} + O(N^{n-b}), \end{aligned}$$

trong đó, tổng $\sum_{(\hat{i})}$ được lấy theo bộ $n-b+1$ số không âm có tổng bằng

$$\frac{N}{\delta}.$$

Như vậy, tổng $\sum_{\sigma(i) \leq \frac{N}{\delta}} i_j$ không phụ thuộc vào j . Kết hợp với Bổ đề 2.2.8 ta được

$$\sum_{(i)} i_j \Delta_{(i)} = e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{\delta(n-b+1)!} + O(N^{n-b}). \quad (2.16)$$

Từ (2.15) và (2.16), ta được

$$\begin{aligned} \log \prod_{j=1}^d |\psi_t^v(P_i)|_v &\leq \sum_{j=1}^{n-b} \left(\log |\gamma_j(P_i)|_v e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{\delta(n-b+1)!} (1 + O(N^{-1})) \right) \\ &\quad + \log(\|P_i\|_v) e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{(n-b+1)!} (1 + O(N^{-1})) + c_1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Vì dãy $\{|\gamma_j(P_i)|_v\}, j = 1, \dots, r$ là dãy tăng và theo giả thiết $s \geq n-b$ nên

$$\frac{1}{n-b} \sum_{j=1}^{n-b} \log |\gamma_j(P_i)|_v \leq \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \log |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v. \quad (2.18)$$

Từ (2.17) và Bổ đề 2.2.11, với N đủ lớn ta có,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-b} (\log |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v) (1 + O(N^{-1})) &\leq \frac{n-b}{s} \left(\sum_{j=1}^s \log |f_{l_v^{(j)}}(P_i)|_v \right) + O\left(\frac{\log(\|P_i\|_v)}{N}\right) \\ &\leq \frac{(n-b)(e - \delta(r-s))}{s} \log(\|P_i\|_v) + O(1) \\ &\quad + O\left(\frac{\log(\|P_i\|_v)}{N}\right). \end{aligned}$$

Ta có, $h(P_i) = \sum_{v \in S} \log(\|P_i\|_v)$. Khi đó, lấy tổng (2.17) theo $v \in S$ ta được,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \log \prod_{j=1}^d |\psi_t^v(P_i)|_v &\leq \frac{(n-b)(e - \delta(r-s))}{s} h(P_i) e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{\delta(n-b+1)!} \\ &\quad + h(P_i) e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{\delta(n-b+1)!} (1 + O(N^{-1})) + c_2 \#S, \end{aligned}$$

hay

$$\sum_{v \in S} \log \prod_{j=1}^d |\psi_t^v(P_i)|_v \leq \left(\frac{(n-b)(e - \delta(r-s))}{s} + \delta \right. \\ \left. + O(N^{-1}) \right) h(P_i) e_1 \dots e_b \frac{N^{n-b+1}}{\delta(n-b+1)!} + c_2 \#S.$$

Theo giả thiết, $r > \frac{s(n-b+1)}{n-b} + \frac{\deg g}{\delta}$ nên ta có

$$\frac{(n-b)(e - \delta(r-s))}{s} + \delta < 0.$$

Vì vậy, với N đủ lớn,

$$\frac{(n-b)(e - \delta(r-s))}{s} + \delta + O(N^{-1}) < 0.$$

Khi đó, tồn tại số dương c_3 không phụ thuộc các điểm P_i sao cho

$$\sum_{v \in S} \log \left(\prod_{j=1}^d |\psi_t^v(P_i)|_v \right) \leq -c_3 h(P_i). \quad (2.19)$$

Giả sử $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ là một cơ sở của V_N^* với các đa thức đại diện lấy hệ số trong $\mathcal{O}_S$.

Đặt $Q = (\varphi_1(P_i), \dots, \varphi_d(P_i)) \in k^d$. Hơn nữa, với mọi $v \in S$, xây dựng các phần tử $\psi_1^v, \dots, \psi_d^v$ là một cơ sở của V_N^* (phụ thuộc v). Khi đó, chúng ta có thể biểu diễn các dạng tuyến tính độc lập tuyến tính $L_{v,1}, \dots, L_{v,d}$ trong $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ sao cho $\psi_t^v(P_i) = L_{v,t}(Q)$.

Ta có, $h(Q) \leq Nh(P_i) + c_4$, trong đó c_4 chỉ phụ thuộc vào N mà không phụ thuộc P_i . Khi đó, vì $h(P_i) \rightarrow \infty$ và từ (2.19), nên với i đủ lớn ta có

$$\sum_{v \in S} \log \left(\prod_{j=1}^d |L_{v,t}(Q)|_v \right) \leq -\frac{c_3}{2N} h(Q).$$

Áp dụng Định lý 2.1.7 (Định lý không gian con), ta có quan hệ tuyến tính không tầm thường $\lambda_1 \varphi_1(P_i) + \dots \lambda_d \varphi_d(P_i) = 0$ chứa tất cả các điểm P_i . Áp dụng Bổ đề 2.2.9, ta có điều phải chứng minh. $\diamond$

Định nghĩa 2.2.13. Giả sử $D_1, \dots, D_q$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n$, gọi Q_j là các đa thức thuần nhất xác định D_j tương ứng.

Các siêu mặt $D_1, \dots, D_q, q \geq n+1$ được gọi là ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$ nếu với mỗi bộ $n+1$ chỉ số phân biệt $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta có

$$\{x \in \mathbb{P}^n : Q_{i_j}(x) = 0, j = 1, \dots, n\} = \emptyset.$$

Nhận xét 2.2.14. $D_1, \dots, D_q$ là các siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$ ở vị trí tổng quát khi và chỉ khi với bất kỳ $n+1$ siêu phẳng độc lập tuyến tính.

Tiếp theo chúng ta xét trường hợp các đa thức f_i có bậc bất kỳ.

Định lý 2.2.15. *Giả sử $\bar{\mathcal{Z}} \subseteq \bar{\mathcal{X}}$ xác định như trên và bất kỳ $n-b$ trong số các đa thức $\bar{f}_i$ xác định trong $\bar{\mathcal{Z}}$ một tập hữu hạn điểm; Hơn nữa, giả sử không $s+1$ các đa thức $\bar{f}_i$ có không điểm chung trong $\bar{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$ và bất đẳng thức sau thỏa mãn:*

$$\sum_{i=1}^r \deg f_i > \frac{s(n-b+1)}{n-b} \max(\deg f_i) + \deg g.$$

Khi đó, $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_S)$ không trù mật Zariski trong $\mathcal{Z}$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ áp dụng Mệnh đề 2.2.12 để chứng minh định lý này.

Đặt $\delta_i = \deg f_i, \delta = \max_i \delta_i, e = \deg g$. Trước hết ta chứng minh, với $j_1, \dots, j_h \in \{1, \dots, r\}, 1 \leq h \leq n-b$, đa tạp $\nu(j_1, \dots, j_h)$ xác định trong $\bar{\mathcal{Z}}$ bởi $\bar{f}_{j_1} = \dots = \bar{f}_{j_h} = 0$ có chiều bằng $n-b-h$. Thật vậy, theo Mệnh đề 1.2.16 ta có, $\dim \nu(j_1, \dots, j_h) \geq n-b-h$. Giả sử, $\dim \nu(j_1, \dots, j_h) > n-b-h$. Khi đó, tồn tại các số nguyên $j_{h+1}, \dots, j_{n-b} \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j_1, \dots, j_h\}$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.2.16, các đa thức $\bar{f}_\mu, \mu = 1, \dots, n-b$ xác định trong $\bar{\mathcal{Z}}$ một đa tạp có chiều ≥ 1 , Mâu thuẫn giả thiết của định lý.

Chọn r siêu phẳng $\{\rho_1 = 0\}, \dots, \{\rho_r = 0\}$, ở vị trí tổng quát tương ứng với đa tạp $\nu_J, J \subseteq \{1, \dots, r\}$. Khi đó, $\rho_1, \dots, \rho_r$ là các dạng tuyến tính $k[X_1, \dots, X_n]$ và bất kỳ đa tạp con của $\bar{\mathcal{Z}}$ được cho bởi phương trình dạng:

$$\bar{\rho}_{j_1} = \dots = \bar{\rho}_{j_h} = \bar{f}_{j_{h+1}} = \bar{f}_{j_s},$$

trong đó, $0 \leq h \leq s \leq n-b$, theo chứng minh trên đa tạp này có $n-b-s$ chiều. Hơn nữa, không $s+1$ các đa thức $\overline{f_i}\rho_i$ có không điểm chung trong $\overline{\mathcal{Z}} \setminus \mathcal{Z}$.

Đặt $f_i^* = f_i\rho_i^{\delta-\delta_i}$, $i = \overline{1, r}$, $g^* = g\rho_1^{\delta-\delta_1} \dots \rho_r^{\delta-\delta_r}$ và $\mathcal{X}^*$ là đa tạp xác định bởi $f_1^* \dots f_r^* - g^* = 0$. Vì $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^*$ nên $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}^*$. Ta lại có, $\deg f_i^* = \delta$. Theo giả thiết, ta có

$$\sum_{i=1}^r \delta_i > \frac{s(n-b+1)}{n-b} \delta + e. \quad (2.20)$$

Thêm số hạng $\sum_{i=1}^r (\delta - \delta_i)$ vào cả hai vế của bất đẳng thức (2.20) ta được

$$\sum_{i=1}^r \delta > \frac{s(n-b+1)}{n-b} \delta + (e + \sum_{i=1}^r (\delta - \delta_i)).$$

hay

$$r > \frac{s(n-b+1)}{n-b} + \frac{\deg g^*}{\delta}.$$

Áp dụng Mệnh đề 2.2.12, ta có điều phải chứng minh. $\diamond$

Tiếp theo chúng ta sẽ xét tính trù mật trên toàn bộ $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ trong $\mathcal{X}$.

Định lý 2.2.16. *Giả sử tập các không điểm chung trong $\mathbb{P}^n$ của $X_0\bar{g}$ và bất kỳ $n-1$ các đa thức thuần nhất $\bar{f}_i$ đều là hữu hạn và không có n đa thức thuần nhất $\bar{f}_i$ có không điểm chung ở vô cực. Hơn nữa, giả sử*

$$\sum_{i=1}^r \deg f_i > n \max(\deg f_i) + \deg g.$$

Khi đó, $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ không trù mật Zariski trong $\mathcal{X}$.

Chứng minh. Gọi G là nhân tử bất khả quy của $f_1 \dots f_r - g$ và $\overline{\mathcal{Z}}$ là đa tạp xác định bởi $\overline{G} = 0$. Vì G bất khả quy nên $\overline{G}$ cũng bất khả quy. Khi đó, theo Mệnh đề 1.2.11, $\overline{\mathcal{Z}}$ là đa tạp $n-1$ chiều. Hơn nữa, $\overline{\mathcal{Z}} \subseteq \overline{\mathcal{X}}$. Ta có, giao của $\overline{\mathcal{Z}}$ với bất kỳ $n-1$ trong số các đa thức $\bar{f}_i$ xác định trong $\overline{\mathcal{Z}}$ một tập hữu hạn điểm. Áp dụng Định lý 2.2.15, ta có điều phải chứng minh. $\diamond$

Với $n = 3$ ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.17. *Giả sử tập các không điểm chung trong $\mathbb{P}^3$ của $X_0\bar{g}$ và bất kỳ hai đa thức thuần nhất $\bar{f}_i$ đều là hữu hạn và không có ba đa thức thuần nhất $\bar{f}_i$ có không điểm chung ở vô tận. Khi đó, nếu $\sum_{i=1}^r \deg f_i > 4 \max(\deg f_i) + \deg g$ thì phương trình (2.11) chỉ có hữu hạn nghiệm $x \in \mathcal{O}_S^3$ với $g(x) \neq 0$.*

Chứng minh. Vì giả thiết của hệ quả thỏa mãn các giả thiết của Định lý 2.2.16 nên $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ không trù mật Zariski trong $\mathcal{X}$. Do đó, các điểm $x \in \mathcal{O}_S^3$ là nghiệm của phương trình (2.11) sẽ nằm trên đường cong trên $\mathcal{X}$. Theo Định lý 2.1.8 (Định lý Siegel) nếu một thành phần bất khả quy của đường cong này có vô hạn điểm như thế, nó không thể có nhiều hơn hai điểm tại vô cực. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại một đường cong $\mathcal{C}$ trên $\mathcal{X}$ không nằm trên siêu mặt $g = 0$ có nhiều nhất hai điểm tại vô cực. Khi đó, tồn tại các hàm hữu tỷ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trên $\tilde{\mathcal{C}}$ với các điểm cực nằm trong tập $\{P_1, P_2\} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ trong đó có ít nhất một hàm khác hằng sao cho:

$$\psi_1 \dots \psi_r = g(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad (2.21)$$

trong đó, $\psi_j = f_j(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Khi đó, $\psi_j \neq 0$, với mọi $j = 1, 2, 3$.

Gọi v_1, v_2 là các hàm bậc tại P_1, P_2 và đặt $m_i = -\min(v_i(\varphi_1), v_i(\varphi_2), v_i(\varphi_3))$.

Khi đó, tồn tại $i \in \{1, 2\}$ sao cho $m_i > 0$. Thật vậy, giả sử $m_i \leq 0$, với mọi $i = 1, 2$. Do đó, với mỗi $i = 1, 2, v_i(\varphi_j) \geq 0$, với mọi $j = 1, 2, 3$. Vì vậy, với mọi $j = 1, 2, 3, \varphi_j$ không có điểm cực trên $\tilde{\mathcal{C}}$. Do đó, tất cả $\varphi_j, j = 1, 2, 3$ là hàm hằng, mâu thuẫn với sự tồn tại của các φ_j .

Không mất tính tổng quát, giả sử $m_1 \geq \max(1, m_2)$.

Giả sử t là tham số địa phương tại P_1 , ta có

$$\varphi_j = \alpha_j t^{-m_1} + O(t^{-m_1+1}), j = 1, 2, 3,$$

trong đó, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k$ không đồng thời bằng không.

Ta có, $v_1(\psi_j) = -(\deg f_j)m_1$, ngoại trừ nhiều nhất hai chỉ số j .

Đánh số lại các chỉ số sao cho các chỉ số loại trừ liên quan đến P_j nằm trong tập $\{1, 2\}$. Do đó, lấy hàm bậc v_1 hai vế của (2.21), ta có,

$$v_1(\psi_1\psi_2) \geq m_1(\deg f_3 + \dots + \deg f_r - \deg g). \quad (2.22)$$

Mặt khác, hàm $\psi_1\psi_2$ là hàm khác không, xác định trên $\tilde{\mathcal{C}}$ có nhiều nhất hai cực điểm P_1, P_2 . Khi đó, vì ước của nó có bậc 0 trên $\tilde{\mathcal{C}}$ nên

$$v_1(\psi_1\psi_2) + v_2(\psi_1\psi_2) \leq 0. \quad (2.23)$$

Từ (2.22) và (2.23), ta có

$$v_2(\psi_1\psi_2) \leq -m_1(\deg f_3 + \dots + \deg f_r - \deg g). \quad (2.24)$$

Ta luôn có,

$$v_2(\psi_1\psi_2) \geq \min(0, -m_2(\deg f_1 + \deg f_2)).$$

Vì vậy,

$$\max(0, m_2(\deg f_1 + \deg f_2)) \geq m_1(\deg f_3 + \dots + \deg f_r - \deg g). \quad (2.25)$$

Hơn nữa, theo giả thiết $\sum_{i=1}^r \deg f_i > 4 \max(\deg f_i) + \deg g$ suy ra

$$\deg f_3 + \dots + \deg f_r - \deg g > 4 \max(\deg f_i) - (\deg f_1 + \deg f_2). \quad (2.26)$$

Từ (2.25), (2.26) và $m_1 \geq \max(1, m_2)$, ta có

$$2(\deg f_1 + \deg f_2) > 4 \max(\deg f_j) \quad (2.27)$$

Ta lại có,

$$2(\deg f_1 + \deg f_2) \leq 4 \max(\deg f_j) \quad (2.28)$$

Từ (2.27) và (2.28), ta có điều phải chứng minh. $\diamond$

Nhận xét 2.2.18. Nếu trong Hệ quả 2.2.17 ta thay bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^r \deg f_i > 4 \max(\deg f_i) + \deg g$$

bằng bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^r \deg f_i > 3 \max(\deg f_i) + \deg g$$

thì kết quả không còn đúng nữa. Thật vậy, xét siêu mặt xác định bởi đa thức $X_1 X_2 X_3 (X_1 + X_2 - X_3) - 1$ trên $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ và $S \supsetneq A_\infty$.

Với mọi $u \in \mathbb{Q}^*$ ta luôn có,

$$|u|_v |u^{-1}|_v = 1 \text{ với mọi } v \notin S.$$

Như vậy, với mọi $u \in \mathcal{O}_S^*$, u là S -nguyên và u^{-1} là S -nguyên.

Đặt $X_1 = X_3 = u, X_2 = u^{-1}$. Khi đó, bộ (u, u^{-1}, u) luôn là nghiệm S -nguyên của phương trình

$$X_1 X_2 X_3 (X_1 + X_2 - X_3) - 1 = 0$$

với mọi $u \in \mathbb{Q}^*$. Khi đó, tập nghiệm này là vô hạn trái với kết luận của Hệ quả 2.2.17.

Định lý 2.2.19. *Giả sử $v \in S, f_{iv}, i = 1, \dots, n-1$, là các đa thức bậc $\delta_{iv} > 0$ trong $k[X_1, \dots, X_n]$. Đặt $\delta_v = \max_i \delta_{iv}$ và $\mu := \min_{v \in S} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_{iv}}{\delta_v}$. Cố định $\epsilon > 0$ và xét bao đóng Zariski $\mathcal{H}$ trong $\mathbb{P}^n$ của tập các nghiệm $x \in \mathcal{O}_S^n$ của*

$$\prod_{v \in S} \prod_{i=1}^{n-1} |f_{iv}(x)|_v^{\frac{1}{\delta_v}} \leq H(x)^{\mu-n-\epsilon}. \quad (2.29)$$

Giả sử, với $v \in S, x_0$ và $\bar{f}_{iv}, i = 1, \dots, n-1$, xác định đa tạp chiều 0. Khi đó $\dim \mathcal{H} \leq n-1$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{H}'$ là một thành phần của bao đóng $n-1$ chiều $\mathcal{H}$ thì tồn tại $v \in S$ sao cho $\bar{f}_{iv}$ xác định trong $\mathcal{H}'$ một đa tạp 1 chiều.

Chứng minh. Trước hết, chúng ta chứng minh khẳng định $\dim \mathcal{H} \leq n - 1$. Ta chỉ cần chứng minh với $\delta_{iv} = \delta_v$. Cố định $v \in S$, ta định nghĩa lọc như trong Mệnh đề 2.2.12 với tất cả $n - 1$ đa thức

$$W_{(i)} = \sum_{(e) \geq (i)} \gamma_1^{e_1} \cdots \gamma_{n-1}^{e_{n-1}} V_{N-\delta\sigma(e)}^*.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.7 ta được

$$\Delta_{(i)} \sim \delta_v^{n-1} (N - \delta_v \sigma(i)).$$

Xét một cơ sở của V_N bằng cách lấy các đại diện tương ứng với $\frac{W_{(i)}}{W_{(i'')}}$ các phần tử dạng $\gamma_1^{i_1} \cdots \gamma_{n-b}^{i_{n-b}} q$, trong đó q là đa thức bậc $\leq N - \delta_v \sigma(i)$. Áp dụng Bổ đề 2.2.6 ta có đẳng cấu

$$\frac{\overline{V}_{N-\delta_v \sigma(i)}}{(\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_{n-1}) \cap \overline{V}_{N-\delta_v \sigma(i)}} \cong \frac{V_{N-\delta_v \sigma(i)}}{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \cap V_{N-\delta_v \sigma(i)}}.$$

Khi đó theo Bổ đề 2.2.7 ta có thể chọn các đa thức q ở trên trong số tập các đại diện của các lớp trong $\frac{V_{N-\delta_v \sigma(i)}}{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \cap V_{N-\delta_v \sigma(i)}}$. Nhưng

$\frac{V_h}{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \cap V_h}$, $h = 0, 1, \dots$, tạo thành một dãy tăng các không gian có số chiều tương ứng $\sim \delta_v^{n-1} h$. Vì vậy,

$$\sum \deg q \sim \delta_v^{n-1} \frac{(N - \delta_v \sigma(i))^2}{2},$$

trong đó tổng được lấy trên các đại diện đã chọn.

Bằng cách tương tự như cách dẫn đến công thức (2.17) ta có,

$$\begin{aligned} \log \prod_{t=1}^d |\psi_t^v(P_i)|_v &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \left(\log |\gamma_j(P_i)|_v \frac{N^{n+1}}{\delta_v(n+1)!} (1 + O(N^{-1})) \right) \\ &\quad + \log(\|P_i\|_v) \frac{N^{n+1}}{(n+1)!} (1 + O(N^{-1})) + c_1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Từ (2.29) và (2.30), ta được (2.19). Khi đó, áp dụng Định lý 2.1.7 như trong chứng minh Mệnh đề 2.2.12, ta có $\dim \mathcal{H} \leq n - 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh phần còn lại của định lý bằng phản chứng. Giả sử $\mathcal{H}'$ được xác định bởi $\overline{G} = 0$. Khi đó, với mọi $v \in S$, $n - 1$ đa thức $\overline{f}_{iv}$ xác định trong $\mathcal{H}'$ một tập hữu hạn điểm. Áp dụng Mệnh đề 2.2.12 với $\mathcal{H}' = \tilde{\mathcal{Z}}, b = 1$, ta có điều phải chứng minh. $\diamond$

Hệ quả 2.2.20. Cho f là đa thức bậc $\delta > 0$ trong $\overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$ và $\epsilon > 0$. Các véc tơ $x \in \mathbb{Z}^n$ sao cho

$$0 < |f(x)| < H(x)^{-\delta(n-1)-\epsilon} \quad (2.31)$$

tất cả được chứa trong một đa tạp $n - 2$ chiều.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại, bao đóng Zariski của tập các nghiệm thỏa mãn $|f(x)| < H(x)^{-\delta(n-1)-\epsilon}$ chứa một siêu mặt bất khả quy W mà không chứa tập không điểm của $\overline{f}$.

Đặt $f = f_1$ và chọn các đa thức $f_2, \dots, f_{n-1}$ bậc δ trong $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ sao cho các đa thức thuần nhất $\overline{f}_i$ xác định trong W một tập hữu hạn điểm.

Giả sử k là trường số chuẩn tắc trên $\mathbb{Q}$ và chứa các hệ số của f_1 . S là tập các định giá trên k và chuẩn hóa các giá trị tuyệt đối tương ứng với trường k .

Giả sử v là giá trị tuyệt đối tương ứng với phép nhúng của k vào $\mathbb{C}$. Khi đó, tất cả các giá trị tuyệt đối trong S liên hợp Galoa với v theo quy tắc:

$$|\sigma(\alpha)|_{\sigma(v)} := |\alpha|_v, \alpha \in k, \sigma \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q}).$$

Như vậy, với mỗi giá trị tuyệt đối v tương ứng với $\sigma \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$. Khi đó, tồn tại tập $G \subseteq \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ chứa đơn vị sao cho ánh xạ $\sigma \rightarrow \sigma(v)$ là một song ánh giữa G và S .

Với $i = 1, 2, \dots, n - 1, \sigma \in G$, đặt $f_{i\sigma(v)} = \sigma(f_i)$.

Ta có, $\mu = n - 1$ và $|f_{i\sigma(v)}(x)|_{\sigma(v)} = |f_i(x)|_v$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^n$. Do đó,

$$\prod_{v \in S} \prod_{i=1}^{n-1} |f_{iv}(x)|_v = \left(\prod_{i=1}^{n-1} |f_i(x)|_v \right)^{\#S}.$$

Mặt khác, $|\alpha|_v^{\#S} = |\alpha|$. Hơn nữa, theo giả thiết, $|f(x)| < H(x)^{-\delta(n-1)-\epsilon}$ trong khi $|f_i(x)| \ll H(x)^\delta$, với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Như vậy, các đa thức $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2.2.19 với $\mu = n-1$, mâu thuẫn với cách chọn các $\overline{f}_i$ xác định trong W một đa tạp chiều 0. $\diamond$

Kết luận

Luận văn trình bày một cách có hệ thống các kiến thức cơ sở liên quan về Hình học đại số, Đại số giao hoán và Lý thuyết số; các kết quả liên quan đến tính không trù mật của tập nghiệm nguyên của phương trình Thue mở rộng

$$f_1(X_1, \dots, X_n) \dots f_r(X_1, \dots, X_n) = g(X_1, \dots, X_n).$$

khi bậc của các đa thức tham gia thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^r \deg f_i > n \max(\deg f_i) + \deg g$.

Luận văn này được trình bày dựa trên bài báo "*On a general Thue's equation*" của Covaja và Zannier [6].

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số đại cương*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1999.
- [2] Nguyễn Xuân Liêm, *Tô pô đại cương- Độ đo và Tích phân*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.
- [3] T. T. H. An and Wang, J. T. Y., *An effective Schmidt's subspace theorem for non - linear forms over function fields*, Journal of Number Theory, Volume 125, Issue 1 (2007), 210–228.
- [4] Ta Thi Hoai An and Ha Tran Phuong, *An explicit estimate on multiplicity truncation in the second main theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in Projective space*, to appear in Houston J. Math.
- [5] Akhtari, S., *Thue equations and Related topics*, The University of British Columbia, 2008.
- [6] Corvaja, P. and Zannier, U. M., *On a general Thue's equation*, Amer. J. Math. 126 (2004), 1033 - 1055.
- [7] Dolgachev, I. V., *Introduction to Algebraic Geometry*, Lecture Notes at the University of Michigan.
- [8] Fulton, W., *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley Publishing company, INC.

- [9] Gathmann, A., *Algebraic Geometry*, Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern, 2002/2003.
- [10] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, *Grad. Texts in Math.*, vol. 52, Springer - Verlag, New York, 1977.
- [11] Lang, S., *Algebra*, New York, 1968.
- [12] Lang, S., *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer - Verlag, New York, 1983.
- [13] Matsumura, H., *Commutative algebra*, The Benjamin/Cummings Publishing company, 1980.
- [14] Milne, J.S., *Algebraic Geometry*, Notes for a class taught at the University of Michigan, Fall 1993.
- [15] Milne, J.S., *Algebraic Number Theory*, Notes for a course taught at the University of Michigan in F92, 1998.
- [16] Roth, K.F., *Rational approximations to algebraic numbers*, *Mathematika* 2, 1-11, 1955.
- [17] Schmidt, W. M., *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math, vol. 785, Springer - Verlag, New York, 1980.
- [18] Schmidt, W. M., *Diophantine Approximations and Diophantine Equations*, Lecture Notes in Math, vol. 1467, Springer - Verlag, New York, 1991.
- [19] Schmidt, W. M., *Norm form equations*, *Ann. of Math.* 96, 526-551.
- [20] Serre, J. P., *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [21] Shafarevich, I. R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer - Verlag, Berlin, 1977.

- [22] Silverman, J. H., *Integer points and the rank of Thue elliptic curves*, Invest. Math. 66(1982), 395-404.
- [23] Stewart, C. L. , *On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations*, J. Amer. Math. Soc., 4(1991), 793-838.
- [24] Thue, A. *Über Annä herungenswerte algebraischer Zahlen*, J. Reine Angew. Math. 135(1909), 284-305
- [25] Thue, A. *Om en generel i store hele tal ulosbar ligning*, Norske Vid Selsk Skr No. 7 (1908) 1-15.
- [26] Vojta, P., *Diophantine approximations and Value distribution theory*, Lecture Notes in Math, vol. 1239, Springer - Verlag, Berlin, 1987.
- [27] Vojta, P., *Diophantine approximation and Nevanlinna theory*, in Arithmetic Geometry, C.I.M.E. Summer School, Cetraro 2007, Springer Lecture Notes in Mathematics, 2009.

Chỉ dẫn

- Độ cao Weil(độ cao tương đối), 17
Độ cao lôgarít(độ cao tuyệt đối), 18
Định giá
 thực sự , 13
Định giá rời rạc, 10
Định lý Không gian con, 18
Định lý Ostrowski, 9
Định lý Siegel, 18
Đa tạp xạ ảnh, 4
Điểm nguyên, 17
Ở vị trí tổng quát, 36
định giá, 10

Bất khả quy, 3
Bao đủ, 12

Công thức nhân, 13
Chiều của một đa tạp, 4
Chiều của một không gian tô pô, 4

Dãy chính quy, 6

Giá trị tuyệt đối, 7
 p -adic, 7
 ngoan, 12
 phức, 8
 phi Ácsimet, 7
 thực, 8
Giá trị tuyệt đối tầm thường, 7
Giá trị tuyệt đối tương đương, 9
Giao đầy đủ, 4

Idêan thuần nhất, 4

Không điểm của một họ đa thức
 thuần nhất, 2
Không gian xạ ảnh, 2

Lọc, 6

Phần tử S -nguyên, 17

Siêu mặt, 2
Siêu phẳng, 2

Tập đại số, 3
Tập các điểm S - nguyên, 17
Tập thực sự , 13
Tập trừ mật, 2
Tô pô
 p -adic, 8
 v -adic, 8
 Zariski, 3

Vành tọa độ thuần nhất, 4