ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

HỒ VIẾT TÂN

ÁP DỤNG LƯỢNG GIÁC XÂY DỰNG CÁC ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ CÓ ĐIỀU KIỆN.

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội - 2009

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

HỒ VIẾT TÂN

ÁP DỤNG LƯỢNG GIÁC XÂY DỰNG CÁC ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ CÓ ĐIỀU KIỆN.

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

MÃ SỐ: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương

Hà Nội - 2009

MỞ ĐẦU

Toán sơ cấp là một lĩnh vực mà các kết quả được các chuyên gia sáng tạo ra tương đối đầy đủ và hoàn thiện. Chính vì vậy việc nghiên cứu để thu được một kết quả mới có ý nghĩa là điều rất khó. Khi đọc một số tài liệu tham khảo chúng ta sẽ gặp một số bài toán đại số mà khi giải chúng được chuyển thành bài toán lượng giác để giải. Việc sử dụng các phép biến đổi lượng giác đa dạng sẽ giúp chúng ta có nhiều hướng chứng minh hơn. Các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác rất phong phú nếu chuyển được thành đẳng thức, bất đẳng thức đại số chúng ta sẽ có một số lượng lớn các bài toán hay và khó. Tác giả bản luận văn đã tìm được một số điều kiện cho phép chuyển các bài toán lượng giác trong tam giác thành các bài toán đại số. Tác giả cũng đã trình bày một số kỹ năng giải cho các bài toán đại số được xây dựng đó cũng là một đóng góp nhỏ của luận văn. Tác giả cũng đưa ra công cụ cho phép chuyển các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tứ giác lồi thành các đẳng thức, bất đẳng thức đại số.

Nội dung bản luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1: Đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác và xây dựng bài toán đại số.

Trong chương này tác giả đã sưu tầm một số dạng bài toán hay trong tam giác và sử dụng các bài toán này để xây dựng các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện. Một đóng góp nhỏ có ý nghĩa trong chương này là xây dựng kĩ năng giải đại số cho các bài toán mới được xây dựng. Từ các bài toán đại số bằng cách đặc biệt hóa tác giả đưa ra một số bài toán có hướng dẫn giải.

Chương 2: Đẳng thức, bất đẳng thức trong tứ giác lồi.

Tác giả đã chứng minh một số đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác cho tứ giác lồi và chuyển các đẳng thức, bất đẳng thức này thành các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện.

Bản luận văn nghiên cứu một lĩnh vực rất nhỏ của toán học và đã thu được một số kết quả có ý nghĩa. Tuy nhiên bản luận văn chắc chắn còn nhiều thiếu sót, nên rất mong được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và độc giả quan tâm đến nội dung luận văn để bản luận văn của tác giả được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương, người thầy đã hướng dẫn và chỉ bảo tận tình tác giả trong quá trình làm luận văn. Cảm ơn sự giúp đỡ của các thầy, cô giảng dạy tại khoa Toán - Cơ -Tin học và sự góp ý của các bạn đồng nghiệp.

Mục lục

Chương 1
Đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác và xây dựng bài toán đại số

1.1. Một số đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Để chứng minh các bất đẳng thức ta sử dụng một số kết quả về tính lồi, lõm của các hàm số lượng giác.

Kết quả 1.1 Với $0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi$ chứng minh rằng

$$\frac{sinx + siny}{2} \leqslant sin\frac{x+y}{2}$$

$$\frac{sinx + siny + sinz}{3} \leqslant sin\frac{x+y+z}{3}.$$

Kết quả 1.2 Với $0 \leqslant x, y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ chứng minh rằng

$$1)\frac{cosx + cosy}{2} \leqslant cos\frac{x+y}{2}$$

$$2)\frac{tanx + tany}{2} \geqslant tan\frac{x+y}{2}$$

$$3)cotx + coty \geqslant cot\frac{x+y}{2}.$$

Kết quả 1.3 Với $0 \leqslant x, y, z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ chứng minh rằng

$$1)\frac{cosx + cosy + cosz}{3} \leqslant cos\frac{x+y+z}{3}$$

$$2)\frac{tanx + tany + tanz}{3} \geqslant tan\frac{x+y+z}{3}$$

$$3)\frac{cotx + coty + cotz}{3} \geqslant cot\frac{x+y+z}{3}.$$

Xây dựng các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện ta sử dụng một số đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Ví dụ 1.1 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $sinA + sinB + sinC = 4cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}$
2. $cosA + cosB + cosC = 1 + 4sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}sin\dfrac{C}{2}$
3. $sinA + sinB - sinC = 4sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}$.

Ví dụ 1.2 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinAsinBsinC$
2. $cos2A + cos2B + cos2C = -1 - 4cosAcosBcosC$.

Ví dụ 1.3 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $tanA + tanB + tanC = tanAtanBtanC$($\triangle ABC$ không vuông.)
2. $cotAcotB + cotBcotC + cotCcotA = 1$
3. $cot\dfrac{A}{2} + cot\dfrac{B}{2} + cot\dfrac{C}{2} = cot\dfrac{A}{2}cot\dfrac{B}{2}cot\dfrac{C}{2}$.

Ví dụ 1.4 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $sinA + sinB + sinC \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
2. $cosA + cosB + cosC \leqslant \dfrac{3}{2}$
3. $tanA + tanB + tanC \geqslant 3\sqrt{3}$ ($\triangle ABC$ nhọn)
4. $cotA + cotB + cotC \geqslant \sqrt{3}$ ($\triangle ABC$ nhọn).

Ví dụ 1.5 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

$$tan^2A + tan^2B + tan^2C \geqslant 9(\triangle ABC \text{ nhọn}).$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$

Ta có

$$tan^2A + tan^2B + tan^2C \geqslant \frac{1}{3}(tanA + tanB + tanC)^2 \geqslant \frac{1}{3}(3\sqrt{3})^2 = 9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.6 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$
2. $cot\dfrac{A}{2}cot\dfrac{B}{2}cot\dfrac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}.$

Chứng minh

1. Ta có

$$\begin{aligned}
& sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8} \\
\Leftrightarrow\ & 8sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2} - 1 \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4sin\frac{C}{2}\left(cos\frac{A-B}{2} - cos\frac{A+B}{2}\right) - 1 \leqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4sin^2\frac{C}{2} - 4sin\frac{C}{2}cos\frac{A-B}{2} + 1 \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(2sin\frac{C}{2} - cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + sin^2\frac{A-B}{2} \geqslant 0(\text{ luôn đúng}).
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

2. Ta có

$$cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2} \leqslant \left(\frac{cot\frac{A}{2} + cot\frac{B}{2} + cot\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \leqslant \frac{\left(cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}\right)^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.7 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

$$1.\ cosA + cosB + cosC \leqslant sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2}$$
$$2.\ 2sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Chứng minh
1. Ta có

$$cosA + cosB = 2cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2} \leqslant 2cos\frac{A+B}{2} = 2sin\frac{C}{2}$$

Tương tự ta có

$$cosB + cosC \leqslant 2sin\frac{A}{2}$$
$$cosC + cosA \leqslant 2sin\frac{B}{2}.$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Ta có

$$P = 2sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} = 2cos\frac{B+C}{2} + 2sin\frac{B+C}{4}cos\frac{B-C}{4}$$
$$\Leftrightarrow\ 4sin^2\frac{B+C}{4} - 2sin\frac{B+C}{4}cos\frac{B-C}{4} + P - 2 = 0$$

Ta có

$$\triangle' = cos^2\frac{B-C}{2} - 4P + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow P \leqslant 2 + \frac{cos^2\frac{B-C}{4}}{4} \leqslant \frac{9}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} B = C \\ sin\dfrac{B+C}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Ví dụ 1.8 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

$$\frac{35}{4}+2sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}\leqslant cot^2\frac{A}{2}+cot^2\frac{B}{2}+cot^2\frac{C}{2}. \qquad (1.1)$$

Chứng minh

Ta có

$$(1.1)\Leftrightarrow\frac{35}{4}+\frac{1}{2}(cosA+cosB+cosC-1)\leqslant\frac{1}{sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{C}{2}}-3$$

$$\Leftrightarrow\frac{45}{4}+\frac{1}{2}\left(3-2sin^2\frac{A}{2}-2sin^2\frac{B}{2}-2sin^2\frac{C}{2}\right)\leqslant\frac{1}{sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow P=sin^2\frac{A}{2}+sin^2\frac{B}{2}+sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin^2\frac{C}{2}}\geqslant\frac{51}{4}$$

Ta có

$$P\geqslant 3\sqrt[3]{sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}}}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}}\leqslant\frac{1}{4}$

Ta thu được

$$\frac{P}{3}\geqslant t+\frac{1}{t}=16t+\frac{1}{t}-15t\geqslant 8-\frac{15}{4}=\frac{17}{4}\Leftrightarrow P\geqslant\frac{51}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$

Ví dụ 1.9 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $\frac{1}{sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin\frac{C}{2}}\geqslant 6$
2. $cos^2\frac{A}{2}+cos^2\frac{B}{2}+cos^2\frac{C}{2}\geqslant\left(sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\right)^2.$

Chứng minh
1. Ta có
$$\frac{1}{sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin\frac{C}{2}}\geqslant\frac{9}{sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}}\geqslant\frac{9}{\frac{3}{2}}=6$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.
2. Ta có
$$tan\frac{A}{2}sinB+tan\frac{B}{2}sinA\geqslant 2\sqrt{2sin^2\frac{A}{2}2sin^2\frac{B}{2}}=4sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}$$
Suy ra
$$tan\frac{A}{2}(sinB+sinC)+tan\frac{B}{2}(sinC+sinA)+tan\frac{C}{2}(sinA+sinB)$$
$$\geqslant 4\left(sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}+sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}+sin\frac{C}{2}sin\frac{A}{2}\right)\qquad(1.2)$$
Xét
$$tan\frac{A}{2}(sinB+sinC)=tan\frac{A}{2}2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{B-C}{2}$$
$$=cos\frac{B+C}{2}cos\frac{B-C}{2}=cosB+cosC$$
$$(1.2)\ \Leftrightarrow 2(cosA+cosB+cosC)\geqslant 4\left(sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}+sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}+sin\frac{C}{2}sin\frac{A}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ cos^2\frac{A}{2}-sin^2\frac{A}{2}+cos^2\frac{B}{2}-sin^2\frac{B}{2}+cos^2\frac{C}{2}+sin^2\frac{C}{2}$$
$$\geqslant 2\left(sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}+sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}+sin\frac{C}{2}sin\frac{A}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ cos^2\frac{A}{2}+cos^2\frac{B}{2}+cos^2\frac{C}{2}\geqslant\left(sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\right)^2$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$

Ví dụ 1.10 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

1. $P=sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}+\frac{1}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{sin\frac{C}{2}sin\frac{A}{2}}\geqslant\frac{27}{2}$

2. $$Q=\left(1+cos\frac{A}{2}\right)\left(1+cos\frac{B}{2}\right)\left(1+cos\frac{C}{2}\right)>4.$$

Chứng minh
1. Ta có

$$P \geqslant 3\sqrt[3]{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}}}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}} \leqslant \frac{1}{2}$
Ta được

$$P \geqslant 3t + \frac{3}{t^2} \Leftrightarrow \frac{P}{3} \geqslant t + \frac{1}{t^2} \geqslant 12 - 15t = \frac{9}{2} \Leftrightarrow P \geqslant \frac{27}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
Q &= \left(1 + cos\frac{A}{2}\right)\left(1 + cos\frac{B}{2}\right)\left(1 + cos\frac{C}{2}\right) \\
&= \left[\left(1 - cos\frac{A}{2}\right)\left(1 - cos\frac{B}{2}\right) + 2\left(cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2}\right)\right]\left(1 + cos\frac{C}{2}\right) \\
&> 2\left(cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2}\right)\left(1 + cos\frac{C}{2}\right) \\
&> 2\left(cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1 + cos^2\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mặt khác $\quad cosA + cosB + cosC = 1 + 4sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2} > 1$

$$\Leftrightarrow \left(2cos^2\frac{A}{2} - 1\right) + \left(2cos^2\frac{B}{2} - 1\right) + \left(2cos^2\frac{C}{2} - 1\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} > 2 - cos^2\frac{C}{2}$$

Suy ra $\quad Q > 2\left(2 - cos^2\frac{C}{2}\right)\left(1 + cos^2\frac{C}{2}\right) = 2\left(2 + cos^2\frac{C}{2} - cos^4\frac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow Q > 2\left(2 + sin^2\frac{C}{2}cos^2\frac{C}{2}\right) > 4$$

Ví dụ 1.11 Với A, B, C là các góc của tam giác ABC chứng minh rằng

$1.\dfrac{cos\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{B}{2}+cos\dfrac{C}{2}}{sin\dfrac{A}{2}+sin\dfrac{B}{2}+sin\dfrac{C}{2}}<2$

$2.\dfrac{1}{cos\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{cos\dfrac{B}{2}}-\dfrac{1}{cos\dfrac{C}{2}}<1$

$3.\dfrac{sin\dfrac{B}{2}}{sin^2\dfrac{A}{2}}+\dfrac{sin\dfrac{C}{2}}{sin^2\dfrac{B}{2}}+\dfrac{sin\dfrac{A}{2}}{sin^2\dfrac{C}{2}}\geqslant 6$

$4.tanA+tanB\geqslant 2tan\dfrac{C}{2}$.

Chứng minh

1. Ta có

$$cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}>cos\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}+cos\frac{B}{2}sin\frac{A}{2}=sin\frac{A+B}{2}=cos\frac{C}{2}>0$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\left(1-cos\frac{C}{2}\right)\left(sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}\right)>0\\ \left(1-cos\frac{B}{2}\right)\left(sin\frac{C}{2}+sin\frac{A}{2}\right)>0\\ \left(1-cos\frac{A}{2}\right)\left(sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\right)>0\end{aligned}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\begin{aligned}&2\left(sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\right)>sin\frac{A+B}{2}+sin\frac{B+C}{2}+sin\frac{C+A}{2}\\ \Leftrightarrow\ &2\left(sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}\right)>cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}}{sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}}<2\end{aligned}$$

2. Ta có

$$\frac{1}{cos\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{B}{2}}-\frac{1}{cos\dfrac{C}{2}}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{cos\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{B}{2}}<1+\frac{1}{cos\dfrac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}<cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}+\frac{cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}}{sin\dfrac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ \left(1-cos\frac{A}{2}\right)\left(1-cos\frac{B}{2}\right)+\frac{cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}}{sin\dfrac{C}{2}}-1>0$$

$$\Leftrightarrow \ \left(1-cos\frac{A}{2}\right)\left(1-cos\frac{B}{2}\right)+\frac{sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}}{sin\dfrac{C}{2}}>0$$

3. Ta có

$$P=\frac{sin\dfrac{B}{2}}{sin^2\dfrac{A}{2}}+\frac{sin\dfrac{C}{2}}{sin^2\dfrac{B}{2}}+\frac{sin\dfrac{A}{2}}{sin^2\dfrac{C}{2}}=\frac{\dfrac{1}{sin^2\dfrac{A}{2}}}{\dfrac{1}{sin\dfrac{B}{2}}}+\frac{\dfrac{1}{sin^2\dfrac{B}{2}}}{\dfrac{1}{sin\dfrac{C}{2}}}+\frac{\dfrac{1}{sin^2\dfrac{C}{2}}}{\dfrac{1}{sin\dfrac{A}{2}}}$$

$$\geqslant \frac{1}{sin\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{sin\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{sin\dfrac{C}{2}}\geqslant 6$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Ta có

$$\begin{aligned} tanA+tanB &= \frac{sin(A+B)}{cosAcosB}=\frac{2sinC}{cos(A+B)+cos(A-B)} \\ &\geqslant \frac{2sinC}{1-cosC}=2tan\frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$.

1.2. Xây dựng các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện

Ta chứng minh một số kết quả cơ bản sau:

Kết quả 2.1 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ khi đó tồn tại các góc A, B, C của tam giác ABC sao cho

$$a = tan\frac{A}{2}; b = tan\frac{B}{2}; c = tan\frac{C}{2}.$$

Chứng minh

Vì $a, b > 0$ nên tồn tại các góc $0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ sao cho $tan\frac{A}{2} = a$; $tan\frac{B}{2} = b$

Từ điều kiện suy ra

$$c = \frac{1 - ab}{a + b} = \frac{1 - tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}}{tan\frac{A}{2} + tan\frac{B}{2}} \Leftrightarrow c = cot\frac{A + B}{2} = tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}\right)$$

Vì $c > 0$ suy ra $0 < \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2} < \frac{\pi}{2}$ và $c = tan\frac{C}{2}$

Suy ra $0 < A, B, C < \pi$ và $A + B + C = \pi$.

Kết quả 2.2 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$. Khi đó tồn tại các góc A, B, C của tam giác ABC nhọn sao cho $a = tan\frac{A}{2}; b = tan\frac{B}{2}; c = tan\frac{C}{2}$.

Chứng minh

Từ điều kiện $ab + bc + ca = 1$ theo kết quả 2.1 tồn tại các góc A, B, C của tam giác ABC sao cho $a = tan\frac{A}{2}; b = tan\frac{B}{2}; c = tan\frac{C}{2}$.

Tam giác ABC nhọn khi và chỉ khi $cosAcosBcosC > 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 + a^2}\frac{1 - b^2}{1 + b^2}\frac{1 - c^2}{1 + c^2} > 0 \Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc > 0 \\
&\Leftrightarrow abc + a + b + c < 2(\text{ Vì } ab + bc + ca = 1)
\end{aligned}$$

Kết quả 2.3 Trong tam giác ABC với $a = tan\dfrac{A}{2}$ chứng minh rằng

$$sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Chứng minh
Ta có

$$\frac{1}{a^2} = cot^2\frac{A}{2} = \frac{1}{sin^2\frac{A}{2}} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{sin^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{a^2} + 1 = \frac{a^2+1}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{1+a^2} \Leftrightarrow sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Ta có

$$sin^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow cos^2\frac{A}{2} = 1 - sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

Kết quả 2.4 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$, khi đó tồn tại các góc của tam giác ABC sao cho

$$tan\frac{A}{2} = \frac{1}{a}; tan\frac{B}{2} = \frac{1}{b}; tan\frac{B}{2} = \frac{1}{c}.$$

Chứng minh
Ta có điều kiện

$$a + b + c = abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$$

Áp dụng kết quả 2.1 ta suy ra điều phải chứng minh.
Kết quả 2.5 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$, và $1 + ab + bc + ca < 2abc$ khi đó tồn tại các góc của tam giác ABC sao cho

$$tan\frac{A}{2} = \frac{1}{a}; tan\frac{B}{2} = \frac{1}{b}; tan\frac{B}{2} = \frac{1}{c}.$$

Chứng minh

Ta có

$$a+b+c=abc \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$
$$1+a+b+c<2abc \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<2$$

Áp dụng kết quả 2.2 suy ra điều phải chứng minh.

Kết quả 2.6 Trong tam giác ABC với $tan\frac{A}{2}=\frac{1}{a}$ chứng minh rằng $sinA=\frac{2a}{1+a^2}; cosA=\frac{a^2-1}{1+a^2}; sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}; cos\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Chứng minh

Suy ra trực tiếp từ kết quả 2.3

Sử dụng các kết quả trên ta có thể xây dựng được các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện từ các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Từ các đẳng thức $cosA+cosB+cosC=1+4sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}$

$cosA=\frac{1-a^2}{1+a^2}; sin\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.1 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2}=1+\frac{4abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Từ các đẳng thức $sinA+sinB+sinC=4cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}$;

$sinA=\frac{2a}{1+a^2}; cos\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.2 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{a}{1+c^2}=\frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Từ các đẳng thức $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinAsinBsinC$ và $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}; cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}; sin2A = 2\dfrac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.3 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2} + \frac{b(1-b^2)}{(1+b^2)^2} + \frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^2} = \frac{8abc}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Từ đẳng thức $tanA + tanB + tanC = tanAtanBtanC$ $\triangle ABC$ không vuông và $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}; cosA = \dfrac{a^2-1}{a+1}$ với $tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{a}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.4 Với a, b, c là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2-1} + \frac{b}{b^2-1} + \frac{c}{c^2-1} = \frac{4abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}.$$

Từ các đẳng thức $sinA + sinB - sinC = 4sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}$; $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}; sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}; cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{a}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.5 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} - \frac{c}{1+c^2} = 2\frac{c}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Từ đẳng thức $cos2A + cos2B + cos2C = -1 - 4cosAcosBcosC$ và $cos2A = 2cos^2A - 1 = 2\dfrac{(1-a^2)^2}{(1+a^2)^2} - 1; cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.6 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\Big(\frac{1-a^2}{1+a^2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-b^2}{1+b^2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-c^2}{1+c^2}\Big)^2 = 1 - 2\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Từ đẳng thức $cot\dfrac{A}{2} + cot\dfrac{B}{2} + cot\dfrac{C}{2} = cot\dfrac{A}{2}cot\dfrac{B}{2}cot\dfrac{C}{2}$ và $cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{a}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.7Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}.$$

Từ đẳng thức $cotAcotB + cotBcotC + cotCcotA = 1$ và $cotA = \dfrac{1-a^2}{2a}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.8 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{4ab} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4bc} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{4ca} = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$cosA + cosB \leqslant 2sin\dfrac{C}{2}$ và đẳng thức $cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}; sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.9 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$cosA + cosB + cosC \leqslant \dfrac{3}{2}$ và đẳng thức $cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$; với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.10 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$sinA+sinB+sinC \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ và đẳng thức $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.11 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2a + b = a^2b$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$cosA + cosB + cosC \leqslant sin\dfrac{A}{2} + sin\dfrac{B}{2} + sin\dfrac{C}{2}$ và đẳng thức
$cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}; sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.12 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$2sin\dfrac{A}{2} + sin\dfrac{B}{2} + sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{9}{4}$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.13 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$tanA + tanB + tanC \geqslant 3\sqrt{3}$ với $\triangle ABC$ nhọn và đẳng thức
$tanA = \dfrac{2a}{1-a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán

Bài toán 2.14 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$cotA + cotB + cotC \geqslant \sqrt{3}$ với $\triangle ABC$ nhọn và đẳng thức $cotA = \dfrac{1-a^2}{2a}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.15 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{2a} + \frac{1-b^2}{2b} + \frac{1-c^2}{2c} \geqslant \sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$tan^2A + tan^2B + tan^2C \geqslant 9$ với $\triangle ABC$ nhọn và đẳng thức
$tanA = \dfrac{2a}{1-a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.16 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\left(\frac{2a}{1-a^2}\right)^2 + \left(\frac{2b}{1-b^2}\right)^2 + \left(\frac{2c}{1-c^2}\right)^2 \geqslant 9.$$

Từ bất đẳng thức
$sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.17 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$cot\dfrac{A}{2}cot\dfrac{B}{2}cot\dfrac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}$ và đẳng thức $cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{a}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.18 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$3\sqrt{3}abc \leqslant 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{35}{4} + 2sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2} \leqslant cot^2\frac{A}{2} + cot^2\frac{B}{2} + cot^2\frac{C}{2}$ và đẳng thức $sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.19 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{35}{4} + \frac{2abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} \geqslant \left(sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2}\right)^2$ và đẳng thức $sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}; cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.20 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geqslant \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức $sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2} + \frac{1}{sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}} + \frac{1}{sin\frac{C}{2}sin\frac{A}{2}} \geqslant \frac{27}{2}$ và đẳng thức $sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.21 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{1}{c^2}\right)}$$

$$+\sqrt{\left(1+\frac{1}{c^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)} \geqslant \frac{27}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\left(1+cos\dfrac{A}{2}\right)\left(1+cos\dfrac{B}{2}\right)\left(1+cos\dfrac{C}{2}\right) > 4$ và đẳng thức

$cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.22 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{(1+\sqrt{1+a^2})(1+\sqrt{1+b^2})(1+\sqrt{1+c^2})}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} > 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}}{sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}} < 2$ và đẳng thức

$cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}; sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.23 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}} < 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{sin\frac{C}{2}} \geqslant 6$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 2.24 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$ chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \geqslant 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{cos\frac{B}{2}}-\dfrac{1}{sin\frac{C}{2}} < 1$ và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$;

$sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.25 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$ chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \sqrt{1+c^2} < 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\dfrac{sin\frac{B}{2}}{sin^2\frac{A}{2}} + \dfrac{sin\frac{C}{2}}{sin^2\frac{B}{2}} + \dfrac{sin\frac{A}{2}}{sin^2\frac{C}{2}} \geqslant 6$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 2.26 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{b(1+a^2)}{a^2\sqrt{1+b^2}} + \frac{c(1+b^2)}{b^2\sqrt{1+c^2}} + \frac{a(1+c^2)}{c^2\sqrt{1+a^2}} \geqslant 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$tanA + tanB \geqslant 2tan\dfrac{C}{2}$ với $\triangle ABC$ nhọn $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$;
$cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán sau
Bài toán 2.27 Với a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} \geqslant \frac{1}{c}.$$

1.3. Phương pháp giải đại số

Giải các bài toán bằng phương pháp đại số trước hết ta chứng minh một số kết quả sau:

Kết quả 3.1 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}1+a^2 &= (a+b)(a+c)\\ 1+b^2 &= (b+c)(b+a)\\ 1+c^2 &= (c+a)(c+b).\end{aligned}$$

Kết quả 3.2 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Chứng minh

$$(1.3) \Leftrightarrow (1+ab)^2 \leqslant (1+a^2)(1+b^2) \Leftrightarrow 2ab \leqslant a^2+b^2 (\text{đúng}).$$

Kết quả 3.3 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Chứng minh
Ta chứng minh đẳng thức

$$\begin{aligned}&\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a(b+c)+b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1+ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\ \Leftrightarrow\ &a(b+c)+b(c+a) = 1+ab \text{ (Áp dụng kết quả 1.1)}\\ \Leftrightarrow\ &ab+bc+ca=1\end{aligned}$$

Vì $\dfrac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \leqslant 1$ ta suy ra $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$(đpcm)

Bài toán 3.1 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2} = 1+\frac{4abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}. \tag{1.4}$$

Chứng minh

$(1.4) \Leftrightarrow \dfrac{1-a^2}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{1-b^2}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{1-c^2}{(c+a)(c+b)}$

$= 1 + \dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Leftrightarrow (1-a^2)(b+c) + (1-b^2)(c+a) + (1-c^2)(a+b)$

$= 4abc + (a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c) - a(ab+ac) - b(bc+ba) - c(ca+cb) = 4abc + (1+a^2)(b+c)$

$\Leftrightarrow 2a+b+c-a(1-bc)-b(1-ac)-c(1-ab) = 4abc + a(1-bc)$

$\Leftrightarrow a + 3abc = 4abc + a - abc$ (đpcm).

Bài toán 3.2 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} = \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}. \tag{1.5}$$

Chứng minh

$(1.5) \Leftrightarrow \dfrac{a}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{c}{(c+a)(c+b)} = \dfrac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$\Leftrightarrow a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 2 \Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca = 2$

$\Leftrightarrow ab + bc + ca = 1$ (đúng do giả thiết).

Bài toán 3.3 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2} + \frac{b(1-b^2)}{(1+b^2)^2} + \frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^2} = \frac{8abc}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2} &= \frac{a(1-a^2)}{(a+b)^2(a+c)^2} \\
\frac{b(1-b^2)}{(1+b^2)^2} &= \frac{b(1-b^2)}{(b+c)^2(b+a)^2} \\
\frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^2} &= \frac{c(1-c^2)}{(a+c)^2(b+c)^2} \\
\frac{8abc}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} &= \frac{8abc}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}+\frac{b(1-b^2)}{(1+b^2)^2}+\frac{c(1-c^2)}{(1+c^2)^2}=\frac{8abc}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a^2)(b+c)^2+b(1-b^2)(a+c)^2+c(1-c^2)(a+b)^2=8abc$$

$$\Leftrightarrow a(1-a^2)(b+c)^2+b(1-b^2)(a+c)^2+c(1-c^2)(a+b)^2-8abc=0 \quad (1.6)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & a(1-a^2)(b+c)^2 = a(b+c)^2 - a^3(b+c)^2 \\ = \; & (b+c)(ab+ac) - a(ab+ac)^2 = (1-bc)(b+c) - a(1-bc)^2 \\ = \; & b+c-a-bc^2-b^2c+2abc-ab^2c^2 \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$\begin{aligned} & b(1-b^2)(a+c)^2 = a+c-b-a^2c-ac^2+2abc-ba^2c^2 \\ & c(1-c^2)(a+b)^2 = a+b-c-a^2b-ab^2+2abc-ca^2b^2 \\ (1.6) \Leftrightarrow \; & a+b+c-a^2b-a^2c-b^2c-b^2a-c^2a-c^2b-3abc=0 \\ \Leftrightarrow \; & a+b+c-ab(a+b+c)-bc(a+b+c)-ca(a+b+c)=0 \\ \Leftrightarrow \; & a+b+c-(a+b+c)(ab+bc+ca)=0(\text{ đúng vì } ab+bc+ca=1). \end{aligned}$$

Bài toán 3.4 Với a, b, c là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}+\frac{c}{c^2-1}=\frac{4abc}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}. \quad (1.7)$$

Chứng minh

Giả thiết $a+b+c=abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=1$

Đặt $\dfrac{1}{a}=x; \dfrac{1}{b}=y; \dfrac{1}{c}=z$. Khi đó ta có: $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$

Đẳng thức (1.7) trở thành

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

Ta có

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$$

$= \dfrac{x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$
$P = x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$
$= x - xy^2 - xz^2 + xy^2z^2 + y - x^2y - yz^2 + yx^2z^2 + z - x^2z - y^2z + x^2y^2z$
$= x + y + z + xyz(xy+yz+zx) - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y$
$= x+y+z+4xyz - x(xy+yz+zx) - y(xy+yz+zx) - z(xy+yz+zx)$
$= 4xyz$
Suy ra $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} = \dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.
Bài toán 3.5 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} - \frac{c}{1+c^2} = 2\frac{c}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}. \qquad (1.8)$$

Chứng minh
Giả thiết $a+b+c = abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 1$
Đặt $\dfrac{1}{a} = x; \dfrac{1}{b} = y; \dfrac{1}{c} = z$. Khi đó ta có: $x, y, z > 0$ và $xy+yz+zx = 1$
Khi đó đẳng thức (1.8) trở thành
$\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} - \dfrac{z}{1+z^2} = \dfrac{2xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{y}{(y+x)(y+z)} - \dfrac{z}{(z+x)(z+y)} = \dfrac{2xy}{(x+y)(y+z)(z+x)}$
$\Leftrightarrow x(y+z) + y(z+x) - z(x+y) = 2xy$
$\Leftrightarrow 2xy = 2xy$ (đúng).
Bài toán 3.6 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca = 1$ chứng minh rằng

$$\Big(\frac{1-a^2}{1+a^2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-b^2}{1+b^2}\Big)^2 + \Big(\frac{1-c^2}{1+c^2}\Big)^2 = 1 - 2\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(1+a^2)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \qquad (1.9)$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned}(1.9) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{(1-a^2)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}+\frac{(1-b^2)^2}{(b+c)^2(b+a)^2}+\frac{(1-c^2)^2}{(c+a)^2(c+b)^2} \\ = \quad & 1-2\frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & (1-a^2)^2(b+c)^2+(1-b^2)^2(c+a)^2+(1-c^2)^2(a+b)^2 \\ = \quad & (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2-2(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^2(1-c^2)^2 &= (a+b)^2-2c^2(a+b)^2+c^3(b+c)^2 \\ &= (b+a)^2-2(1-ab)^2+c^2(1-ba)^2 \\ &= (a+b)^2-2+4ab-2a^2b^2+c^2-2c^2ab+a^2b^2c^2\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$\begin{aligned}(1-b^2)^2(a+c)^2 &= (a+c)^2-2+4ac-2a^2c^2+b^2-2b^2ac+a^2b^2c^2 \\ (1-a^2)^2(b+c)^2 &= (b+c)^2-2+4bc-2b^2c^2+a^2-2a^2bc+a^2b^2c^2\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}& (1-a^2)^2(b+c)^2+(1-b^2)^2(a+c)^2+(1-c^2)^2(a+b)^2 \\ = \; & (a+b+c)^2-2abc(a+b+c)+2(a^2+b^2+c^2)+3a^2b^2c^2-2 \\ = \; & (a+b+c-abc)^2-2(1-a^2)(1-b^2)^2(1-c^2)^2 \\ = \; & (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2-2(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

Bài toán 3.7 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$$

Chứng minh
Suy ra trực tiếp từ giả thiết.
Bài toán 3.8 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{4ab}+\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4bc}+\frac{(1-c^2)(1-a^2)}{4ca}=1$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{4ab}+\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{4bc}+\frac{(1-c^2)(1-a^2)}{4ca}$$
$$=\frac{(1-a^2)(1-b^2)c+(1-b^2)(1-c^2)a+(1-c^2)(1-a^2)b}{4abc}$$
$$=\frac{a-ab^2-ac^2+ab^2c^2+b-ba^2-bc^2+ba^2c^2+c-cb^2-ca^2+ca^2b^2}{4abc}$$
$$=\frac{a(1-ba-ca)+b(1-cb-ba)+c(1-ca-cb)+abc}{4abc}$$
$$=\frac{4abc}{4abc}=1 \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 3.9 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}\leqslant\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Chứng minh

Ta chứng minh đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}=\frac{2c(1+ab)}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2}{1+a^2}+\frac{2}{1+b^2}=2+\frac{2c(1+ab)}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{b+c+c+a}{(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{c(1+ab)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1\\
\Leftrightarrow\ &a+b+c-abc=(a+b)(b+c)(c+a)\\
\Leftrightarrow\ &a+b+c-abc=(1+a^2)(b+c)\\
\Leftrightarrow\ &a-abc=a^2(b+c)\\
\Leftrightarrow\ &1-bc=ab+ac\\
\Leftrightarrow\ &ab+bc+ca=1
\end{aligned}$$

Theo kết quả 3.2 ta có $\dfrac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}\leqslant 1$

Suy ra $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}+\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\leqslant\dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.10 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$P = \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Chứng minh

Theo bài toán 3.9 ta có $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$

Ta suy ra

$$P \leqslant \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{1-c^2}{1+c^2} = \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + 1 - 2\Big(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)$$

Đặt $\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} = t (0 < t < 1)$

Ta có

$$\begin{aligned} P \leqslant f(t) &= -2t^2 + 2t + 1 \text{ với } t \in (0, 1) \\ &= -2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} \leqslant \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $P \leqslant \dfrac{3}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b \\ \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài toán 3.11 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2a + b = a^2b$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Chứng minh

Xét hiệu

$\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}+a}{2\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{4a + \sqrt{3}(1+a^2) - 2(\sqrt{3}+a)\sqrt{1+a^2}}{4(1+a^2)}$

$= \dfrac{(2a - \sqrt{3}\sqrt{1+a^2})(2 - \sqrt{1+a^2})}{4(1+a^2)}$

$$= \frac{(2a-\sqrt{3}\sqrt{1+a^2})(2-\sqrt{1+a^2})(2a+\sqrt{3}\sqrt{1+a^2})(2+\sqrt{1+a^2})}{4(1+a^2)(2a+\sqrt{3}\sqrt{1+a^2})(2+\sqrt{1+a^2})}$$
$$= \frac{-(3-a^2)^2}{4(1+a^2)(2a+\sqrt{3}\sqrt{1+a^2})(2+\sqrt{1+a^2})} \leqslant 0$$
Suy ra

$$\frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{\sqrt{3}+a}{2\sqrt{1+a^2}} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Áp dụng kết quả 3.3 với 3 số dương $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{a}$ ta được
$$\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a^2}} + \frac{\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{b^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} \Leftrightarrow \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$
Suy ra $P \leqslant \dfrac{3a+\sqrt{3}}{2\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \leqslant \dfrac{\sqrt{(9+3)(1+a^2)}}{2\sqrt{1+a^2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $a = b = \sqrt{3}$.

Bài toán 3.12 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Chứng minh

Theo bài toán 3.9 ta có $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$$
$$\frac{1-c^2}{1+c^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2} \leqslant \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta thu được:
$$2\Big(\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2}\Big) \leqslant \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.13 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$Q = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= 2a\sqrt{\frac{1}{(a+b)(a+c)}} + 2b\sqrt{\frac{1}{4(b+c)(b+a)}} + 2c\sqrt{\frac{1}{4(c+a)(c+b)}} \\ &\leqslant a\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\Big) + b\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{4(b+c)}\Big) + c\Big(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{4(b+c)}\Big) \\ &\leqslant \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{b}{4(b+c)} + \frac{c}{4(b+c)} \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{7}{\sqrt{15}} \\ b = c = \dfrac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$

Bài toán tổng quát Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $\alpha > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ chứng minh rằng

$$P = \frac{\alpha a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \alpha + \frac{1}{2\alpha}.$$

Chứng minh

Ta có

$$2P = 2\alpha a\sqrt{\frac{1}{(a+b)(a+c)}} + 2\alpha b\sqrt{\frac{1}{(b+c)\alpha^2(b+a)}} + 2c\sqrt{\frac{1}{(c+a)\alpha^2(c+b)}}$$

$$\leqslant \alpha a\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\Big) + \alpha b\Big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{\alpha^2(b+c)}\Big) + \alpha c\Big(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{\alpha^2(b+c)}\Big)$$

$$\leqslant \frac{\alpha a}{a+b} + \frac{\alpha a}{a+c} + \frac{\alpha b}{a+b} + \frac{\alpha c}{a+c} + \frac{b}{\alpha(b+c)} + \frac{c}{\alpha(b+c)}$$

$\leqslant 2\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

Suy ra $P \leqslant \alpha + \dfrac{1}{2\alpha}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \dfrac{2\alpha^2 - 1}{\sqrt{4\alpha^2 - 1}} \\ b = c = \dfrac{1}{\sqrt{4\alpha^2 - 1}}. \end{cases}$

Bài toán 3.14 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Chứng minh

Ta có

$a + b + c + abc < 2 \Leftrightarrow 1 + ab + bc + ca > a + b + c + abc$

$\Leftrightarrow 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc > 0$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) > 0$

Nếu $\begin{cases} 1 - a < 0 \\ 1 - b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$ Thì $ab+bc+ca > 1$ Mâu thuẫn với giả thiết.

Suy ra $1 - a > 0, 1 - b > 0, 1 - c > 0$ hay $a, b, c \in (0, 1)$.

Với $a \in (0, 1)$ ta chứng minh

$$\frac{1}{1-a^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}a}{2} \tag{1.10}$$

Ta có (1.10) $\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a(1-a^2) \leqslant 1$

Xét hàm số

$$f(x) = x(1-x^2) = x - x^3 \text{ Với } x \in (0, 1)$$

Ta có $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ khi $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra $f'(x) \geqslant 0$ Với $x \in (0, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$ và $f'(x) \leqslant 0$ Với $x \in (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1)$

Do đó

$0 < f'(x) \leqslant f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \Leftrightarrow 0 < x(1-x^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x^2) \leqslant 1$
Suy ra

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a(1-a^2) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{1-a^2} \geqslant 3\sqrt{3}a^2$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}b(1-b^2) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2b}{1-b^2} \geqslant 3\sqrt{3}b^2$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}c(1-c^2) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2c}{1-c^2} \geqslant 3\sqrt{3}c^2$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta thu được
$\frac{2a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}+\frac{2c}{1-c^2} \geqslant 3\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3\sqrt{3}(ab+bc+ca) \geqslant 3\sqrt{3}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.15 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{2a}+\frac{1-b^2}{2b}+\frac{1-c^2}{2c} \geqslant \sqrt{3}. \tag{1.11}$$

Chứng minh
Theo bài toán 3.14 từ giả thiết $abc + a + b + c < 2$ và $ab + bc + ca = 1$ ta suy ra được $a, b, c \in (0, 1)$
Ta có
(1.11)$\Leftrightarrow \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b + \frac{1}{c} - c \geqslant 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{3} + a + b + c$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c} \tag{1.12}$$

Ta chứng minh

$$2\sqrt{3} + a + b + c \leqslant \frac{9}{a+b+c} \tag{1.13}$$

Với $\begin{cases} a, b, c \in (0, 1) \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$ ta có $\sqrt{3} \leqslant a + b + c < 3$

Xét hàm số

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sqrt{3} + t - \frac{9}{t} \text{ với } t \in [\sqrt{3}, 3) \\ f'(t) &= 1 + \frac{9}{t^2} \ \forall t \in [\sqrt{3}, 3) \end{aligned}$$

Ta có $f(t) \geqslant 0 \ \forall \ t \in [\sqrt{3}, 3) \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + t \leqslant \dfrac{9}{t}$
suy ra $2\sqrt{3} + a + b + c \leqslant \dfrac{9}{a+b+c}$
Từ các bất đẳng thức (1.12) và (1.13) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.16 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ và $abc + a + b + c < 2$ chứng minh rằng

$$\Big(\frac{2a}{1-a^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2b}{1-b^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2c}{1-c^2}\Big)^2 \geqslant 9.$$

Chứng minh
Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2$
Ta có

$$\Big(\frac{2a}{1-a^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2b}{1-b^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2c}{1-c^2}\Big)^2 \geqslant \frac{1}{3}\Big(\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2}\Big)^2$$

Theo bài toán 3.14 ta có

$$\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2} \geqslant 3\sqrt{3}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{2a}{1-a^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2b}{1-b^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2c}{1-c^2}\Big)^2 \geqslant \frac{1}{3}(3\sqrt{3})^2 = 9$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.17 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Chứng minh
Ta có

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = (a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$$

Suy ra $\dfrac{abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \dfrac{1}{8}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.18 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$3\sqrt{3}abc \leqslant 1.$$

Chứng minh
Ta có

$$1 = ab = bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow 1 \geqslant 27a^2b^2c^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}abc \leqslant 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.19 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$\frac{35}{4} + \frac{2abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh
Ta có

$$\frac{abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} = \sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c})}{6}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{1}{8}$$

Suy ra

$$\frac{35}{4} + \frac{2abc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{35}{4} + \frac{1}{4} = 9 \qquad (1.14)$$

Ta lại có
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\geqslant \frac{3}{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}=9 \tag{1.15}$$
Từ các bất đẳng thức (1.14) và (1.15) ta thu được bất đẳng thức cần chưng minh
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Nhận xét: Bài toán 3.19 được xây dựng từ bất đẳng thức
$$\frac{35}{4}+2sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}\leqslant cot^2\frac{A}{2}+cot^2\frac{B}{2}+cot^2\frac{C}{2}$$
so sánh lời giải của bài toán bằng phương pháp lượng giác và phương pháp giải đai số ta thấy lời giải đại số của bài toán ngắn gọn và đơn giản hơn rất nhiều
Bài toán 3.20 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng
$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geqslant\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)^2.$$
Chứng minh
Ta có
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geqslant\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}\\
&+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+b)(c+a)}+2\Big(\frac{ab}{(a+b)\sqrt{(a+c)(b+c)}}\\
&+\frac{bc}{(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{ca}{(a+c)\sqrt{(a+b)(b+c)}}\Big)\\
\Leftrightarrow\ &2(a+b+c)\geqslant a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\\
&+2\left[ab\sqrt{(a+c)(b+c)}+bc\sqrt{(a+c)(a+b)}+ac\sqrt{(a+b)(b+c)}\right]=A
\end{aligned}$$
Ta có
$A\leqslant a(1-bc)+b(1-ac)+c(1-ab)+ab(a+b+2c)+bc(b+c+2a)+$

$ca(c+a+2b)$
$= a+b+c+3abc+a(ab+ac)+b(ba+bc)+c(ca+cb)$
$= a+b+c+a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)$
$= 2(a+b+c)$ (đpcm).
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.21 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$A=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{1}{c^2}\right)}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{c^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)}\geqslant\frac{27}{2}.$$

Chứng minh
Ta có
$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\dfrac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\dfrac{c}{\sqrt{(b+c)(a+c)}}$
$\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{c}{a+c}+\dfrac{c}{c+b}\right)=\dfrac{3}{2}$
$\dfrac{8a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{8b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}{ab}\leqslant 3\sqrt[3]{8.8}=12$
$\dfrac{8b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{8c}{\sqrt{1+c^2}}+\dfrac{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}{bc}\leqslant 3\sqrt[3]{8.8}=12$
$\dfrac{8c}{\sqrt{1+c^2}}+\dfrac{8a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+a^2}}{ca}\leqslant 3\sqrt[3]{8.8}=12$
Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta thu được
$A\geqslant 36-15\left(\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)\geqslant 36-\dfrac{45}{2}=\dfrac{27}{2}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.22 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$B=\frac{(1+\sqrt{1+a^2})(1+\sqrt{1+b^2})(1+\sqrt{1+c^2})}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}>4.$$

Chứng minh

Ta có

$B = \left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)$

Vì $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < 1$ nên $1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} > 0$

Do đó

$$\begin{aligned} B &> 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right) \\ &> 2\Big(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\Big)\Big(\frac{1}{1+c^2}\Big) \end{aligned}$$

Theo kết quả của bài toán 2.1 ta suy ra:

$$\begin{aligned} &\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2} > 1 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2} > 2 \end{aligned}$$

Suy ra

$B > 2\left(2-\frac{1}{1+c^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right) = 4+\frac{2}{1+c^2}\left(1-\frac{1}{1+c^2}\right) > 4$

Vì $1-\frac{1}{1+c^2} > 0$.

Bài toán 2.23 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}} < 2.$$

Chứng minh

Vì $a>0$ Suy ra $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < 1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} > 0$

Ta có

$$\begin{aligned} &\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\Big) > 0 \\ &\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\Big)\Big(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\Big) > 0 \\ &\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\Big)\Big(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\Big) > 0 \end{aligned}$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức trên ta thu được

$$2\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)> \frac{a+c}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}}+\frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\frac{b+c}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)> \frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow 2\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\Big)> \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}}<2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}{a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}}<2 \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 3.24 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$ chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\geqslant 6.$$

Chứng minh

Ta có

$$a+b+c=abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$

Đặt $\frac{1}{a}=x; \frac{1}{b}=y; \frac{1}{c}=z$ Khi đó ta có $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$.
Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\geqslant 6\\
P &\geqslant 3\sqrt[6]{\frac{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}{x^2y^2z^2}}=3\sqrt[6]{\frac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{x^2y^2z^2}}\\
&= 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}
\end{aligned}$$

Ta có $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}; y+z \geqslant 2\sqrt{yz}; z+x \geqslant 2\sqrt{zx}$.
Suy ra $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$
Từ đó ta có $P \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{8xyz}{xyz}} = 6$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
hay $a = b = c = \sqrt{3}$.
Bài toán 3.25 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = abc$ chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \sqrt{1+c^2} < 1. \tag{1.16}$$

Chứng minh
Ta có

$$a+b+c = abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$$

Đặt $\dfrac{1}{a} = x; \dfrac{1}{b} = y; \dfrac{1}{c} = z$ Khi đó ta có $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.
Bất đẳng thức (1.16) trở thành
$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{z} < 1$
$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{z} > 0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+y^2}-1) - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{z} > 0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+y^2}-1) + \dfrac{\sqrt{1+z^2} - z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z} > 0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+y^2}-1) + \dfrac{xy\sqrt{1+z^2}}{z} > 0$ (đpcm).
Bài toán 3.26 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$ chứng minh rằng

$$M = \frac{b(1+a^2)}{a^2\sqrt{1+b^2}} + \frac{c(1+b^2)}{b^2\sqrt{1+c^2}} + \frac{a(1+c^2)}{c^2\sqrt{1+a^2}} \geqslant 6.$$

Chứng minh

Ta có

$$M=\frac{\dfrac{1+a^2}{a^2}}{\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}}+\frac{\dfrac{1+b^2}{b^2}}{\dfrac{\sqrt{1+c^2}}{c}}+\frac{\dfrac{1+c^2}{c^2}}{\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}}$$

Đặt $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}=x;\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}=y;\dfrac{\sqrt{1+c^2}}{c}=z$ Suy ra $x,y,z>0$.
Ta được

$$M=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z\geqslant\frac{9}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{2a}{2\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2b}{2\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\frac{2c}{2\sqrt{(c+a)(c+b)}}\\ &\leqslant \frac{a}{2}\Big(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\Big)+\frac{b}{2}\Big(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\Big)+\frac{c}{2}\Big(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\Big)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Suy ra $M\geqslant\dfrac{9}{\dfrac{3}{2}}=6$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 3.27 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}\geqslant\frac{1}{c}$$

Chứng minh

Từ giải thiết $ab+bc+ca=1\Leftrightarrow c(a+b)=1-ab\Leftrightarrow\dfrac{1}{c}=\dfrac{a+b}{1-ab}$

Do vai trò của a và b là như nhau nên ta có thể giả sử $a\geqslant b$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{2a}{1-a^2}-\frac{a+b}{1-ab}\geqslant\frac{a+b}{1-ab}-\frac{2b}{1-b^2}\tag{1.17}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{2a}{1-a^2}-\frac{a+b}{1-ab}=\frac{2a(1-ab)-(a+b)(1-a^2)}{(1-a^2)(1-ab)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2a}{1-a^2}-\frac{a+b}{1-ab}=\frac{(a-b)(1+a^2)}{(1-a^2)(1-ab)}\\
&\frac{a+b}{1-ab}-\frac{2b}{1-b^2}=\frac{(a+b)(1-b^2)-2b(1-ab)}{(1-ab)(1-b^2)}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a+b}{1-ab}-\frac{2b}{1-b^2}=\frac{(a-b)(1+b^2)}{(1-b^2)(1-ab)}
\end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức (1.17) tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{(a-b)(1+a^2)}{(1-a^2)(1-ab)}\geqslant\frac{(a-b)(1+b^2)}{(1-b^2)(1-ab)}\\
\Leftrightarrow\ &(1+a^2)(1-b^2)\geqslant(1+b^2)(1-a^2)\\
\Leftrightarrow\ &a^2-b^2-a^2b^2+1\geqslant b^2-a^2-a^2b^2+1\\
\Leftrightarrow\ &a\geqslant b\ \text{(đúng theo giả thiết).}
\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Một số bài tập có hướng dẫn

Bài tập 1 Với a,b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+2ab=1$, chứng minh rằng

$$\frac{2(1-a^2)}{1+a^2}+\frac{(1-b^2)}{1+b^2}=1+\frac{4a^2b}{(1+a^2)\sqrt{1+b^2}}.$$

Bài tập 2 Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc+a+b-c=0$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}=\frac{2c}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Hướng dẫn đặt $a=x;b=y;\dfrac{1}{c}=z$

Bài tập 3 Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+1=ac$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}-\frac{c}{1+c^2}=\frac{2bc}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}.$$

Hướng dẫn đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{c} = z; b = y$

Bài tập 4 Với a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + 2ab = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{2(1-a^2)}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn chứng minh

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Bài tập 5 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + b = c$, chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{c^2-1}{c^2+1} \leqslant \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}.$$

Hướng dẫn đặt $a = x; b = y; \frac{1}{c} = z$

Bài tập 6 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = abc$ và $1 + ab + bc + ac < 2abc$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Hướng dẫn đặt $\frac{1}{a} = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z$ và chứng minh $t(1-t^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$ với $t \in (0; 1)$

Bài tập 7 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + ac + 1 = bc$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn đặt $a = x; \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z$

Bài tập 8 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + b = c$, chứng minh rằng

$$\frac{35}{4} + \frac{2ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + c^2$$

Hướng dẫn đặt $a = x; b = y; \dfrac{1}{c} = z$

Bài tập 9 Với a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + 2ab = 1$, chứng minh rằng

$$3\sqrt{3}a^2b \leqslant 1.$$

Bài tập 10 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ac + bc + 1 = ab$, chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} - \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} < 1.$$

Hướng dẫn đặt $\dfrac{1}{a} = x; \dfrac{1}{b} = y; c = z$

Bài tập 11 Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc + b + c = a$, chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2} + \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} + \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \geqslant 6.$$

Hướng dẫn đặt $\dfrac{1}{a} = x; b = y; c = z$

Bài tập 12 Với a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + 2ab = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \leqslant \frac{9}{8}.$$

Chương 2
Đẳng thức và bất đẳng thức trong tứ giác lồi

Với x, y, z, t là các góc thỏa mãn điều kiện $0 < x, y, z, t < \pi$ và $x + y + z + t = 2\pi$. Khi đó x, y, z, t tương ứng là các góc của môt tứ giác lồi. Ta sẽ chứng minh một số đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác của các góc đó.

2.1. Đẳng thức lượng giác

Ví dụ 1.1 Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 2\pi$ chứng minh rằng
$M = sinx + siny + sinz + sint$
$= sin\dfrac{x+y}{2}sin\dfrac{y+z}{2}sin\dfrac{z+x}{2} + sin\dfrac{y+z}{2}sin\dfrac{z+t}{2}sin\dfrac{t+y}{2}$
$+ sin\dfrac{z+t}{2}sin\dfrac{t+x}{2}sin\dfrac{x+z}{2} + sin\dfrac{t+x}{2}sin\dfrac{x+y}{2}sin\dfrac{y+t}{2}.$
Chứng minh
Ta có

$$\begin{aligned}
& siny + sinz + sint - sin(y+z+t) \\
= \; & 2sin\frac{y+z}{2}cos\frac{y-z}{2} - 2sin\frac{y+z}{2}cos\frac{y+z+2t}{2} \\
= \; & 2sin\frac{y+z}{2}\left(cos\frac{y-z}{2} - cos\frac{y+z+2t}{2}\right) \\
= \; & 4sin\frac{y+z}{2}sin\frac{z+t}{2}sin\frac{t+y}{2}
\end{aligned}$$

Vì $sin(y+z+t) = sin(2\pi - x) = -sinx$ nên

$$M = sinx + siny + sinz + sint = 4sin\frac{y+z}{2}sin\frac{z+t}{2}sin\frac{t+y}{2} \quad (2.1)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$M = sinx + siny + sinz + sint = 4sin\frac{z+t}{2}sin\frac{t+x}{2}sin\frac{x+z}{2} \quad (2.2)$$

$$M = sinx + siny + sinz + sint = 4sin\frac{t+x}{2}sin\frac{x+y}{2}sin\frac{y+t}{2} \quad (2.3)$$

$$M = sinx + siny + sinz + sint = 4sin\frac{x+y}{2}sin\frac{y+z}{2}sin\frac{z+x}{2} \quad (2.4)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.2 Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 2\pi$ chứng minh rằng

$N = cosx + cosy + cosz + cost$

$= cos\frac{x+y}{2}cos\frac{y+z}{2}cos\frac{z+x}{2} + cos\frac{y+z}{2}cos\frac{z+t}{2}cos\frac{t+y}{2}$

$+ cos\frac{z+t}{2}cos\frac{t+x}{2}cos\frac{x+z}{2} + cos\frac{t+x}{2}cos\frac{x+y}{2}cos\frac{y+t}{2}$.

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} & cosx + cosy + cosz + cos(x+y+z) \\ = \; & 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2} + 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x+y+2z}{2} \\ = \; & 2cos\frac{x+y}{2}\left(cos\frac{x+y+2z}{2} + cos\frac{x-y}{2}\right) \\ = \; & 4cos\frac{x+y}{2}cos\frac{y+z}{2}cos\frac{z+x}{2} \end{aligned}$$

Vì $cos(x + y + z) = cos(2\pi - t) = cost$ nên

$$N = cosx + cosy + cosz + cost = 4cos\frac{x+y}{2}cos\frac{y+z}{2}cos\frac{z+x}{2} \quad (2.5)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$N = cosx + cosy + cosz + cost = 4cos\frac{y+z}{2}cos\frac{z+t}{2}cos\frac{t+y}{2} \quad (2.6)$$

$$N = cosx + cosy + cosz + cost = 4cos\frac{z+t}{2}cos\frac{t+x}{2}cos\frac{x+z}{2} \quad (2.7)$$

$$N = cosx + cosy + cosz + cost = 4cos\frac{t+x}{2}cos\frac{x+y}{2}cos\frac{y+t}{2} \quad (2.8)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.5), (2.6), (2.7) và (2.8) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.3 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ và $x, y, z, t \neq \dfrac{\pi}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 2\pi$ chứng minh rằng
$P = tanx + tany + tanz + tant = -[sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x)$
$+ sin(y + z)sin(z + t)sin(t + y) + sin(z + t)sin(t + x)sin(x + z)$
$+sin(t + x)sin(x + y)sin(y + t)]\dfrac{1}{cosxcosycoszcost}$.

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} & tanx + tany + tanz - tan(x + y + z) \\ = & \frac{sin(x + y)}{cosxcosy} - \frac{sin(x + y)}{coszcos(x + y + z)} \\ = & sin(x + y)\frac{coszcos(x + y + z) - cosxcosy}{cosxcosycoszcos(x + y + z)} \\ = & \frac{1}{2}sin(x + y)\frac{cos(x + y + 2z) + cos(x + y) - cos(x + y) - cos(x - y)}{cosxcosycoszcos(x + y + z)} \\ = & \frac{1}{2}sin(x + y)\frac{cos(x + y + 2z) - cos(x - y)}{cosxcosycoszcos(x + y + z)} \\ = & -\frac{sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x)}{cosxcosycoszcos(x + y + z)} \end{aligned}$$

Vì $x + y + z + t = 2\pi$ ta có $tan(x + y + z) = tan(2\pi - t) = -tant$
và $cos(x + y + z) = cos(2\pi - t) = cost$
Suy ra

$$P = -\frac{sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x)}{cosxcosycoszcost} \tag{2.9}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$P = -\frac{sin(y + z)sin(z + t)sin(t + y)}{cosxcosycoszcost} \tag{2.10}$$

$$P = -\frac{sin(z + t)sin(t + x)sin(x + z)}{cosxcosycoszcost} \tag{2.11}$$

$$P = -\frac{sin(t + x)sin(x + y)sin(y + t)}{cosxcosycoszcost} \tag{2.12}$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.9), (2.10), (2.11) và (2.12) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.4 với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$Q = cotx + coty + cotz + cott = -[sin(x+y)sin(y+z)sin(z+x)$
$+ sin(y+z)sin(z+t)sin(t+y) + sin(z+t)sin(t+x)sin(x+z)$
$+sin(t+x)sin(x+y)sin(y+t)]\dfrac{1}{sinxsinysinzsint}.$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned}
& cotx + coty + cotz - cot(x+y+z) \\
= & \frac{sin(x+y)}{sinxsiny} - \frac{sin(x+y)}{sinzsin(x+y+z)} \\
= & sin(x+y)\frac{sinzsin(x+y+z) - sinxsiny}{sinxsinysinzsin(x+y+z)} \\
= & \frac{1}{2}sin(x+y)\frac{cos(x+y) - cos(x+y+2z) + cos(x-y) - cos(x+y)}{sinxsinysinzsin(x+y+z)} \\
= & \frac{sin(x+y)sin(y+z)sin(z+x)}{sinxsinysinzsin(x+y+z)}
\end{aligned}$$

Vì $x+y+z+t = 2\pi$ ta có $cot(x+y+z) = cot(2\pi - t) = -cott$ và $sin(x+y+z) = sin(2\pi - t) = -sint$

Suy ra

$$Q = -\frac{sin(x+y)sin(y+z)sin(z+x)}{sinxsinysinzsint} \tag{2.13}$$

Tương tự ta cũng co các đẳng thức

$$Q = -\frac{sin(y+z)sin(z+t)sin(t+y)}{sinxsinysinzsint} \tag{2.14}$$

$$Q = -\frac{sin(z+t)sin(t+x)sin(x+z)}{sinxsinysinzsint} \tag{2.15}$$

$$Q = -\frac{sin(t+x)sin(x+y)sin(y+t)}{sinxsinysinzsint} \tag{2.16}$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.13), (2.14),(2.15) và (2.16) ta thu được đẳng thức cần chứng minh

Ví dụ 1.5 Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t=2\pi$ chứng minh rằng
$R = cos^2x + cos^2y + cos^2z + cos^2t$
$= 2 + \frac{1}{2}[cos(x+y)cos(y+z)cos(z+x) + cos(y+z)cos(z+t)cos(t+y)$
$+ cos(z+t)cos(t+x)cos(x+z) + cos(t+x)cos(x+y)cos(y+t)]$.

Chứng minh

Ta có
$cos^2x + cos^2y + cos^2z + cos^2(x+y+z)$
$= \frac{1}{2}[cos2x + cos2y + cos2z + cos2(x+y+z)] + 2$
$= cos(x+y)cos(x-y) + cos(x+y)cos(x+y+2z) + 2$
$= 2 + cos(x+y)[cos(x-y) + cos(x+y+2z)]$
$= 2 + 2cos(x+y)cos(y+z)cos(z+x)$
Vì $x+y+z+t=2\pi$ ta có $cos^2(x+y+z) = cos^2(2\pi - t) = cos^2t$
Suy ra

$$R = 2 + 2cos(x+y)cos(y+z)cos(z+x) \tag{2.17}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$R = 2 + 2cos(y+z)cos(z+t)cos(t+y) \tag{2.18}$$

$$R = 2 + 2cos(z+t)cos(t+x)cos(x+z) \tag{2.19}$$

$$R = 2 + 2cos(t+x)cos(x+y)cos(y+t) \tag{2.20}$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.17), (2.18), (2.19) và (2.20) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.6 Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t=2\pi$ chứng minh rằng
$R = sin^2x + sin^2y + sin^2z + sin^2t$
$= 2 - \frac{1}{2}[cos(x+y)cos(y+z)cos(z+x) + cos(y+z)cos(z+t)cos(t+y)$
$+ cos(z+t)cos(t+x)cos(x+z) + cos(t+x)cos(x+y)cos(y+t)]$.

Chứng minh

Áp dụng đẳng thức $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ và ví dụ 1.5 ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.7 với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t=2\pi$ chứng minh rằng
$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} = tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2}$
$+ 2(cotx + coty + cotz + cott)$.

Chứng minh
Ta có

$$cot\frac{x}{2} - tan\frac{x}{2} = \frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}} - \frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} = \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}} = 2cotx \qquad (2.21)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$cot\frac{y}{2} - tan\frac{y}{2} = 2coty \qquad (2.22)$$

$$cot\frac{z}{2} - tan\frac{z}{2} = 2cotz \qquad (2.23)$$

$$cot\frac{t}{2} - tan\frac{t}{2} = 2cott \qquad (2.24)$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.21), (2.22),(2.23), và (2.24) ta thu được đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 1.8 Với $0 < x, y, z < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \neq \pi$ chứng minh rằng

$$tan\frac{x+y+z}{2} = -\frac{tan\frac{x}{2}tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2} - tan\frac{x}{2} - tan\frac{y}{2} - tan\frac{z}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}tan\frac{y}{2} - tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2} - tan\frac{z}{2}tan\frac{x}{2}}.$$

Chứng minh
Ta có

$$tan\frac{x+y+z}{2} = tan\left(\frac{x}{2} + \frac{y+z}{2}\right) = \frac{tan\frac{x}{2} + tan\frac{y+z}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}tan\frac{y+z}{2}}$$

$$= \frac{tan\frac{x}{2} + \frac{tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2}}{1 - tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2}}}{1 - tan\frac{x}{2}\frac{tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2}}{1 - tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2}}} = -\frac{tan\frac{x}{2}tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2} - tan\frac{x}{2} - tan\frac{y}{2} - tan\frac{z}{2}}{1 - tan\frac{x}{2}tan\frac{y}{2} - tan\frac{y}{2}tan\frac{z}{2} - tan\frac{z}{2}tan\frac{x}{2}}$$

Ví dụ 1.9 Với x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + t = 2\pi$ chứng minh rằng
$A = sin2x + sin2y + sin2z + sin2t$
$= sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x) + sin(y + z)sin(z + t)sin(t + y)$
$+ sin(z + t)sin(t + x)sin(x + z) + sin(t + x)sin(x + y)sin(y + t).$

Chứng minh
Ta có
$sin2x + sin2y + sin2z - sin2(x + y + z)$
$= 2sin(x + y)cos(x - y) - 2sin(x + y)cos(x + y + 2z)$
$= 2sin(x + y)[cos(x - y) - cos(x + y + 2z)]$
$= 4sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x)$
Vì $x+y+z+t = 2\pi$ nên ta có $sin2(x+y+z) = sin(4\pi - 2t) = -sin2t$
Suy ra

$$A = 4sin(x + y)sin(y + z)sin(z + x) \tag{2.25}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$A = 4sin(y + z)sin(z + t)sin(t + y) \tag{2.26}$$

$$A = 4sin(z + t)sin(t + x)sin(x + z) \tag{2.27}$$

$$A = 4sin(t + x)sin(x + y)sin(y + t) \tag{2.28}$$

Cộng từng vế các đẳng thức (2.25), (2.26), (2.27) và (2.28) ta thu được đẳng thức cần chứng minh

2.2. Bất đẳng thức lượng giác

Áp dụng tính chất lồi, lõm của các hàm số lượng giác ta thu được các bất đẳng thức sau

Ví dụ 2.1 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

1. $sinx + siny + sinz + sint \leqslant 4$
2. $cos\frac{x}{2} + cos\frac{y}{2} + cos\frac{z}{2} + cos\frac{t}{2} \leqslant 2\sqrt{2}$
3. $sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2} \leqslant 2\sqrt{2}$
4. $tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} \geqslant 4$
5. $cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} \geqslant 4$
6. $sinx + siny + 2sin\frac{z}{2} + 2sin\frac{t}{2} \leqslant 4$
7. $\sqrt{sinx} + \sqrt{siny} + 2\sqrt{sin\frac{z}{2}} + 2\sqrt{sin\frac{t}{2}} \leqslant 6\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$
8. $sinx+siny+sinz+sint \leqslant cos\frac{x-y}{4}+cos\frac{y-z}{4}+cos\frac{z-t}{4}+cos\frac{t-x}{4}$.

Chứng minh

6. Áp dụng tính chất lồi, lõm của các hàm số lượng giác

Ta có

$$sinx + siny \leqslant 2sin\frac{x+y}{2} \tag{2.29}$$

$$2\left(sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}\right) \leqslant 4sin\frac{z+t}{4} \tag{2.30}$$

$$sin\frac{x+y}{2} + sin\frac{z+t}{4} + sin\frac{z+t}{4} \leqslant 3sin\frac{x+y+z+t}{6} \tag{2.31}$$

Từ các bất đẳng thức (2.29), (2.30) và (2.31) ta có

$sinx + siny + 2sin\frac{z}{2} + 2sin\frac{t}{2} \leqslant 6sin\frac{x+y+z+t}{6} = 3\sqrt{3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $z = t = 2x = 2y = \frac{2\pi}{3}$

7. Ta có

$\sqrt{sinx} + \sqrt{siny} + 2\sqrt{sin\frac{z}{2}} + 2\sqrt{sin\frac{t}{2}} \leqslant 6\sqrt{\frac{sinx + siny + 2sin\frac{z}{2} + 2sin\frac{t}{2}}{6}}$

$\leqslant 6\sqrt{sin\frac{x+y+z+t}{6}} = 6\sqrt{sin\frac{\pi}{3}} = 6\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $z = t = 2x = 2y = \frac{2\pi}{3}$

8. Ta có

$$\frac{2sinx + siny + sinz}{4} \leqslant sin\frac{2x+y+z+}{4} = sin\left(\frac{x+2\pi-t}{4}\right)$$
$$= sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x-t}{4}) = cos\frac{t-x}{4} \tag{2.32}$$

Tương tự ta cũng thu được các đẳng thức

$$\frac{2siny + sinz + sint}{4} \leqslant cos\frac{x-y}{4} \tag{2.33}$$

$$\frac{2sinz + sint + sinx}{4} \leqslant cos\frac{y-z}{4} \tag{2.34}$$

$$\frac{2sint + sinx + siny}{4} \leqslant cos\frac{z-t}{4} \tag{2.35}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (2.32), (2.33), (2.34) và (2.35) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 2.2 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ Chứng minh rằng

$sinx+siny+sinz+sint \leqslant cos\dfrac{x-y}{2}+cos\dfrac{y-z}{2}+cos\dfrac{z-t}{2}+cos\dfrac{t-x}{2}.$

Chứng minh

Vì $0 < x, y < \pi$ nên ta có $0 < \dfrac{x+y}{2} < \pi$ và $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x-y}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

Suy ra $0 < sin\dfrac{x+y}{2} \leqslant 1$ và $0 < cos\dfrac{x-y}{2} \leqslant 1$

Ta có

$$sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2} \leqslant 2cos\frac{x-y}{2} \tag{2.36}$$

Tương tự ta cũng có

$$siny + sinz \leqslant 2cos\frac{y-z}{2} \tag{2.37}$$

$$sinz + sint \leqslant 2cos\frac{z-t}{2} \tag{2.38}$$

$$sint + sinx \leqslant 2cos\frac{t-x}{2} \tag{2.39}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức (236), (2.37), (2.38) và (2.39) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 2.3 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

1.$\dfrac{1}{cos\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{cos\frac{y}{2}}+\dfrac{1}{cos\frac{z}{2}}+\dfrac{1}{cos\frac{t}{2}} \geqslant \sqrt{16+(tan\frac{x}{2}+tan\frac{y}{2}+tan\frac{z}{2}+tan\frac{t}{2})}$

2.$cot\dfrac{x}{2}+cot\dfrac{y}{2}+cot\dfrac{z}{2}+cot\dfrac{t}{2} \geqslant 4+2(cotx+coty+cotz+cott).$

Chứng minh

Với $a, b, c, d > 0$ ta có

$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \geqslant \sqrt{4+(a+b)^2}$

$\Leftrightarrow 1+a^2+1+b^2+2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geqslant 4+(a+b)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geqslant 1+ab$

$\Leftrightarrow 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 \geqslant 1 + 2ab + a^2b^2$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ (đúng)
Suy ra $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+d^2} \geqslant \sqrt{16+(a+b+c+d)^2}$
Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{cos\frac{y}{2}} + \frac{1}{cos\frac{z}{2}} + \frac{1}{cos\frac{t}{2}} = \sqrt{1+tan^2\frac{x}{2}} + \sqrt{1+tan^2\frac{y}{2}}$$
$$+\sqrt{1+tan^2\frac{z}{2}}+\sqrt{1+tan^2\frac{t}{2}} \geqslant \sqrt{16+(tan\frac{x}{2}+tan\frac{y}{2}+tan\frac{z}{2}+tan\frac{t}{2})^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$
2. Ta có đẳng thức

$$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} = tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2}$$
$$+ 2(cotx + coty + cotz + cott)$$

Vì $tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} \geqslant 4$
Nên ta thu được

$$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} \geqslant 4 + 2(cotx + coty + cotz + cott)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2.4 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$P = \sqrt{sin^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{y}{2} + 14sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}}+\sqrt{sin^2\frac{y}{2} + sin^2\frac{z}{2} + 14sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}}$$
$$+\sqrt{sin^2\frac{z}{2} + sin^2\frac{t}{2} + 14sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}}+\sqrt{sin^2\frac{t}{2} + sin^2\frac{x}{2} + 14sin\frac{t}{2}sin\frac{x}{2}} \leqslant 8\sqrt{2}.$$

Chứng minh
Ta có
$a^2 + b^2 + 14ab = 4(a+b)^2 - 3(a-b)^2 \leqslant 4(a+b)^2$
Suy ra $\sqrt{a^2 + b^2 + 14ab} \leqslant 2(a+b)$ với $a, b \geqslant 0$
Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} P &\leqslant 2(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2}) + 2(sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2}) + 2(sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}) + 2(sin\frac{t}{2} + sin\frac{x}{2}) \\ &\leqslant 4(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}) \leqslant 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.5 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$Q = \frac{sin\frac{y}{2}}{sin^2\frac{x}{2}} + \frac{sin\frac{z}{2}}{sin^2\frac{y}{2}} + \frac{sin\frac{t}{2}}{sin^2\frac{z}{2}} + \frac{sin\frac{x}{2}}{sin^2\frac{t}{2}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

Chứng minh

Với $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ là các số thực dương áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \frac{a_4^2}{b_4}) \geqslant (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \frac{a_4^2}{b_4} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$Q = \frac{\frac{1}{sin^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{sin\frac{y}{2}}} + \frac{\frac{1}{sin^2\frac{y}{2}}}{\frac{1}{sin\frac{z}{2}}} + \frac{\frac{1}{sin^2\frac{z}{2}}}{\frac{1}{sin\frac{t}{2}}} + \frac{\frac{1}{sin^2\frac{t}{2}}}{\frac{1}{sin\frac{x}{2}}} \geqslant \frac{1}{sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{sin\frac{y}{2}} + \frac{1}{sin\frac{z}{2}} + \frac{1}{sin\frac{t}{2}}$$

$$\geqslant \frac{16}{sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}} \geqslant \frac{16}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.6 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

1. $sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2} \leqslant \frac{1}{4}$
2. $cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2} \leqslant \frac{1}{4}$.

Chứng minh

Ta có

$$sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2} \leqslant (\frac{sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}}{4})^4 \leqslant \frac{(2\sqrt{2})^4}{4^4} = \frac{1}{4}$$

$$cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2} \leqslant (\frac{cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}+cos\frac{z}{2}+cos\frac{t}{2}}{4})^4 \leqslant \frac{(2\sqrt{2})^4}{4^4} = \frac{1}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.7 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$R = \frac{1}{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}} + \frac{1}{cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}} + \frac{1}{cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}} + \frac{1}{cos\frac{t}{2}cos\frac{x}{2}} \geqslant 8.$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{1}{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}} \geqslant \frac{4}{(cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2})^2} = (\frac{2}{cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}})^2$$

Suy ra

$$R \geqslant \Big(\frac{2}{cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{cos\frac{y}{2}+cos\frac{z}{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{cos\frac{z}{2}+cos\frac{t}{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{cos\frac{t}{2}+cos\frac{x}{2}}\Big)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant \dfrac{1}{4}(a+b+c+d)^2$

Ta có

$$\begin{aligned} R &\geqslant \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}} + \frac{2}{cos\frac{y}{2}+cos\frac{z}{2}} + \frac{2}{cos\frac{z}{2}+cos\frac{t}{2}} + \frac{2}{cos\frac{t}{2}+cos\frac{x}{2}}\Big)^2 \\ &\geqslant \frac{64}{(cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}+cos\frac{z}{2}+cos\frac{t}{2})^2} \geqslant 8 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.8 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$M = cos\frac{x}{2}+cos\frac{y}{2}+cos\frac{z}{2}+cos\frac{t}{2} + \frac{1}{cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{cos^2\frac{y}{2}} + \frac{1}{cos^2\frac{z}{2}} + \frac{1}{cos^2\frac{t}{2}} \geqslant$$

$8 + 2\sqrt{2}$.

Chứng minh

Ta có

$M \geqslant 4\sqrt[4]{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}}}$

Đặt $\sqrt[4]{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}} = u$ với $0 < u \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ta thu được $M \geqslant 4u + \dfrac{4}{u^2}$

Xét hàm số $f(u) = u + \dfrac{1}{u^2}$ với $u \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Ta có $f'(u) = 1 - \dfrac{2}{u^3} = 0 \Leftrightarrow u^3 = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{2}$

Vì $f'(u) < 0 \forall u \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ suy ra

$f(u) \geqslant f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2$

Suy ra $M \geqslant 8 + 2\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.9 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$N = sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2} + \frac{1}{sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{sin\frac{y}{2}} + \frac{1}{sin\frac{z}{2}} + \frac{1}{sin\frac{t}{2}} \geqslant 6\sqrt{2}.$$

Chứng minh

Ta có

$N \geqslant 4\sqrt[4]{sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}}}$

Đặt $\sqrt[4]{sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}} = u$ với $0 < u \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ta thu được $N \geqslant 4u + \dfrac{4}{u}$

Xét hàm số $f(u) = u + \dfrac{1}{u}$ với $u \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Ta có $f'(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2} = 0$

$f'(u) = 0$ khi $u = 1$ hoặc $u = -1$

Vì $f'(u) < 0 \forall u \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ suy ra

$f(u) \geqslant f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

Suy ra $N \geqslant 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chi khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 2.10 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$T = sinx + siny + sinz + sint + \frac{1}{sin\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}}$$
$$+\frac{1}{sin\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}} + \frac{1}{sin\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}} + \frac{1}{sin\frac{t}{2}cos\frac{x}{2}} \geqslant 12$$

Chứng minh

Ta có

$T \geqslant 4\sqrt[4]{sinxsinysinzsint} + \dfrac{8}{\sqrt[4]{sinxsinysinzsint}}$

Đặt $\sqrt[4]{sinxsinysinzsint} = u$ với $0 < u \leqslant 1$

Ta thu được $T \geqslant 4u + \dfrac{8}{u}$

Xét hàm số $f(u) = u + \dfrac{2}{u}$ với $u \in (0, 1]$

Ta có $f'(u) = 1 - \dfrac{2}{u^2} = 0$

$f'(u) = 0$ khi $u = \sqrt{2}$ hoặc $u = -\sqrt{2}$

Vì $f'(u) < 0 \forall u \in (0, 1]$ suy ra

$f(u) \geqslant f(1) = 2$

Suy ra $T \geqslant 12$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.11 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$\left(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2}\right)\left(sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}\right) \leqslant 2.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ với $a, b > 0$ ta có

$$\left(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2}\right)\left(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2}\right) \leqslant \frac{\left(sin\frac{x}{2} + sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2} + sin\frac{t}{2}\right)^2}{4}$$

$$\leqslant \frac{\left(4sin\frac{x+y+z+t}{8}\right)^2}{4} \leqslant 4sin^2\frac{\pi}{4} = 2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.12 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{sinx + siny} + \frac{1}{sinz + sint} \geqslant 1.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{4}{a+b}$ với $a, b > 0$ ta có

$$\frac{1}{sinx + siny} + \frac{1}{sinz + sint} \geqslant \frac{4}{sinx + siny + sinz + sint}$$

$$\geqslant \frac{4}{4sin\frac{x+y+z+t}{4}} = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.13 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{sin\frac{y}{2}} + \frac{1}{sin\frac{z}{2}} + \frac{1}{sin\frac{t}{2}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \frac{a_4^2}{b_4} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} \tag{2.40}$$

Ta có $$\frac{1}{sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{sin\frac{y}{2}}+\frac{1}{sin\frac{z}{2}}+\frac{1}{sin\frac{t}{2}} \geqslant \frac{16}{sin\frac{x}{2}+sin\frac{y}{2}+sin\frac{z}{2}+sin\frac{t}{2}}$$
$$\geqslant \frac{16}{4sin\frac{x+y+z+t}{8}} = 4\sqrt{2}$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.14 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng
$$tan^4\frac{x}{2}+tan^4\frac{y}{2}+tan^4\frac{z}{2}+tan^4\frac{t}{2} \geqslant 4.$$

Chứng minh

Với $a, b, c, d > 0$ ta có

$\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{c^4+d^4}{2}\right)$

$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\right] \geqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có
$$tan^4\frac{x}{2}+tan^4\frac{y}{2}+tan^4\frac{z}{2}+tan^4\frac{t}{2} \geqslant 4\left(\frac{tan\frac{x}{2}+tan\frac{y}{2}+tan\frac{z}{2}+tan\frac{t}{2}}{4}\right)^4$$
$$\geqslant 4\left(\frac{4tan\frac{x+y+z+t}{8}}{4}\right)^4 = 4tan^4\frac{\pi}{4} = 4$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.15 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{sin\frac{x}{2}+sin\frac{y}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{sin\frac{z}{2}+sin\frac{t}{2}}} \geqslant \sqrt[4]{2^3}.$$

Chứng minh

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{sin\dfrac{x}{2}+sin\dfrac{y}{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{sin\dfrac{z}{2}+sin\dfrac{t}{2}}} \geqslant \dfrac{4}{\sqrt{sin\dfrac{x}{2}+sin\dfrac{y}{2}}+\sqrt{sin\dfrac{z}{2}+sin\dfrac{t}{2}}}$

Với $a, b > 0$ ta có bất đẳng thức $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

Suy ra $\dfrac{4}{\sqrt{sin\dfrac{x}{2}+sin\dfrac{y}{2}}+\sqrt{sin\dfrac{z}{2}+sin\dfrac{t}{2}}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{sin\dfrac{x}{2}+sin\dfrac{y}{2}+sin\dfrac{z}{2}+sin\dfrac{t}{2}}{2}}}$

$\geqslant \dfrac{2}{\sqrt{2sin\dfrac{x+y+z+t}{8}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2sin\dfrac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2^3}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.16 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{cos\frac{x}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{cos\frac{y}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{cos\frac{z}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{cos\frac{t}{2}}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^4.$$

Chứng minh

Với $a, b, c, d > 0$ ta có

$(1+a)(1+b) \geqslant (1+\sqrt{ab})^2$

$\Leftrightarrow 1+ab+a+b \geqslant 1+2\sqrt{ab}+ab$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$ (đúng).

Ta có

$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geqslant (1+\sqrt{ab})^2(1+\sqrt{cd})^2 \geqslant (1+\sqrt[4]{abcd})^4$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{x}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{y}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{z}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{t}{2}}\right)$

$$\geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}cos\frac{z}{2}cos\frac{t}{2}}}\right)^4 \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{4}}}\right)^4 = (1+\sqrt{2})^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.17 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$\frac{tan^2\frac{x}{2}}{tan\frac{y}{2}} + \frac{tan^2\frac{y}{2}}{tan\frac{z}{2}} + \frac{tan^2\frac{z}{2}}{tan\frac{t}{2}} + \frac{tan^2\frac{t}{2}}{tan\frac{x}{2}} \geqslant 4.$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} + \frac{a_4^2}{b_4} \geqslant \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{b_1+b_2+b_3+b_4}$$

Ta có

$$\frac{tan^2\frac{x}{2}}{tan\frac{y}{2}} + \frac{tan^2\frac{y}{2}}{tan\frac{z}{2}} + \frac{tan^2\frac{z}{2}}{tan\frac{t}{2}} + \frac{tan^2\frac{t}{2}}{tan\frac{x}{2}}$$

$$\geqslant \ tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} \geqslant 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.18 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} \geqslant 4 + cotx + coty + cotz + cott.$$

Chứng minh

Ta có

$$cot\frac{x}{2} - cotx = \frac{sinxcos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2}cosx}{sin\frac{x}{2}sinx} = \frac{sin\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}sinx} = \frac{1}{sinx}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$cot\frac{y}{2} - coty = \frac{1}{siny}$$
$$cot\frac{z}{2} - cotz = \frac{1}{sinz}$$
$$cot\frac{t}{2} - cott = \frac{1}{sin}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thưc trên ta thu được
$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2}$
$= \frac{1}{sinx} + \frac{1}{siny} + \frac{1}{sinz} + \frac{1}{sint} + cotx + coty + cotz + cot$
Vì $\frac{1}{sinx} + \frac{1}{siny} + \frac{1}{sinz} + \frac{1}{sint} \geqslant 4$ nên ta có
$cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} \geqslant 4 + cotx + coty + cotz + cott$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.
Ví dụ 2.19 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} \leqslant 2(\frac{1}{sinx} + \frac{1}{siny} + \frac{1}{sinz} + \frac{1}{sint}) - 4.$$

Chứng minh
Ta có

$$tan\frac{x}{2} + cot\frac{x}{2} = \frac{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{sinx}$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức

$$tan\frac{y}{2} + cot\frac{y}{2} = \frac{2}{siny}$$
$$tan\frac{z}{2} + cot\frac{z}{2} = \frac{2}{sinz}$$
$$tan\frac{t}{2} + cot\frac{t}{2} = \frac{2}{sint}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thưc trên ta thu được
$tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} + cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2}$

$= 2(\frac{1}{sinx} + \frac{1}{siny} + \frac{1}{sinz} + \frac{1}{sint})$

Vì $cot\frac{x}{2} + cot\frac{y}{2} + cot\frac{z}{2} + cot\frac{t}{2} \geqslant 4$ nên ta có

$tan\frac{x}{2} + tan\frac{y}{2} + tan\frac{z}{2} + tan\frac{t}{2} \leqslant 2(\frac{1}{sinx} + \frac{1}{siny} + \frac{1}{sinz} + \frac{1}{sint}) - 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.20 Với $0 < x, y, z, t < \pi$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z+t = 2\pi$ chứng minh rằng

$$tan\frac{x}{2}siny + tan\frac{y}{2}sinx + tan\frac{z}{2}sint + tan\frac{t}{2}sinz \geqslant 4(sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2} + sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}).$$

Chứng minh

Ta có

$$tan\frac{x}{2}siny + tan\frac{y}{2}sinx \geqslant 2\sqrt{tan\frac{x}{2}tan\frac{y}{2}sinxsiny} \geqslant 4sin\frac{x}{2}sin\frac{y}{2}$$

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức

$$tan\frac{z}{2}sint + tan\frac{t}{2}sinz \geqslant 4sin\frac{z}{2}sin\frac{t}{2}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thưc trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \frac{\pi}{2}$.

2.3. Xây dựng đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện từ những đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tứ giác lồi

Ta chứng minh kết quả cơ bản sau

Kết quả 3.1 Giả sử a, b, c, d là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = abc + bcd + acd + abd$ khi đó luôn tồn tại các góc A, B, C, D của một tứ giác lồi $ABCD$ sao cho

$$a = tan\frac{A}{2}; b = tan\frac{B}{2}; c = tan\frac{C}{2}; d = tan\frac{D}{2}.$$

Chứng minh

Vì $a, b, c > 0$ suy ra tồn tại các góc A, B, C với $0 < A, B, C < \pi$ thỏa mãn $a = tan\frac{A}{2}; b = tan\frac{B}{2}; c = tan\frac{C}{2}$

Ta có

$a + b + c + d = abc + bcd + acd + abd$

$\Leftrightarrow a + b + c - abc = d(ab + bc + ca - 1)$

$$\Leftrightarrow d = \frac{abc - a - b - c}{1 - ab - bc - ca} = \frac{tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}tan\frac{D}{2} - tan\frac{A}{2} - tan\frac{B}{2} - tan\frac{C}{2}}{1 - tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2} - tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2} - tan\frac{A}{2}tan\frac{C}{2}}$$

$\Leftrightarrow d = -tan\frac{A+B+C}{2} = tan(\pi - \frac{A+B+C}{2})$

Đặt $\frac{D}{2} = \pi - \frac{A+B+C}{2}$

vì $d > 0$ suy ra $0 < D < \pi$ $tan\frac{D}{2} = d$ và $A + B + C + D = 2\pi$(đpcm)

Sử dụng kết quả trên ta đi xây dựng các đẳng thức, bất đẳng thức đại số có điều kiện từ các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tứ giác lồi.

Từ đẳng thức

$sinA + sinB + sinC + sinD = 4sin\frac{A+B}{2}sin\frac{B+C}{2}sin\frac{C+A}{2}$ và

$sinA = \frac{2a}{1+a^2}, sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$sin\frac{A+B}{2} = sin\frac{A}{2}cos\frac{B}{2} + sin\frac{B}{2}cos\frac{A}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$

với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.1 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $a + b + c + d = abc + abd + acd + bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} + \frac{d}{1+d^2} = \frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Từ đẳng thức

$sinA + sinB + sinC + sinD = sin\frac{A+B}{2}sin\frac{B+C}{2}sin\frac{C+A}{2}$

$+ sin\frac{B+C}{2}sin\frac{C+D}{2}sin\frac{D+B}{2} + sin\frac{C+D}{2}sin\frac{D+A}{2}sin\frac{A+C}{2}$

$+ sin\frac{D+A}{2}sin\frac{A+B}{2}sin\frac{B+D}{2}$ và $sinA = \frac{2a}{1+a^2}$,

$sin\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$, với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.2 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2c}{1+c^2}+\frac{2d}{1+d^2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$
$$+\frac{(b+c)(c+d)(d+b)}{(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}+\frac{(c+d)(d+a)(a+c)}{(1+c^2)(1+d^2)(1+a^2)}+\frac{(d+a)(a+b)(b+d)}{(1+d^2)(1+a^2)(1+b^2)}$$

Từ đẳng thức

$cosA + cosB + cosC + cosD = 4cos\dfrac{A+B}{2}cos\dfrac{B+C}{2}cos\dfrac{C+A}{2}$ và

$cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}, cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{A}{\sqrt{1+a^2}}$

và $cos\dfrac{A+B}{2} = cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2} - sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{1-ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.3 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2}+\frac{1-d^2}{1+d^2} = 4\frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}.$$

Từ đẳng thức

$$cosA + cosB + cosC + cosD$$
$$= cos\frac{A+B}{2}cos\frac{B+C}{2}cos\frac{C+A}{2} + cos\frac{B+C}{2}cos\frac{C+D}{2}cos\frac{D+B}{2}$$
$$+ cos\frac{C+D}{2}cos\frac{D+A}{2}cos\frac{A+C}{2} + cos\frac{D+A}{2}cos\frac{A+B}{2}cos\frac{B+D}{2}$$ và

$cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}, cos\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{1-ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bàu toán

Bài toán 3.4 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức

$a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}&\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-c^2}{1+c^2}+\frac{1-d^2}{1+d^2}\\&=\frac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}+\frac{(1-bc)(1-cd)(1-bd)}{(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}\\&+\frac{(1-cd)(1-da)(1-ac)}{(1+a^2)(1+c^2)(1+d^2)}+\frac{(1-da)(1-ab)(1-bd)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+d^2)}.\end{aligned}$$

Từ đẳng thức

$tanA+tanB+tanC+tanD = -\dfrac{sin(A+B)sin(B+C)sin(C+A)}{cosAcosBcosCcosD}$

Với các góc A, B, C, D không phải là góc vuông và đẳng thức

$tanA = \dfrac{2a}{1-a^2}$ $sin(A+B) = sinAcosB+sinBcosA = \dfrac{2a(1-b^2)+2b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}$

$cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}, sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.5 Với a, b, c, d là các số thực dương khác 1 thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}&\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}+\frac{d}{1-d^2}\\=\;&-4\frac{a(1-b^2)+b(1-a^2)}{1+a^2}\frac{b(1-c^2)+c(1-b^2)}{1+b^2}\frac{a(1-c^2)+c(1-a^2)}{1+c^2}\\&\frac{1+d^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)}.\end{aligned}$$

Từ đẳng thức

$tanA+tanB+tanC+tanD = -[sin(A+B)sin(B+C)sin(C+A)$
$+sin(B+C)sin(C+D)sin(D+B)+sin(C+D)sin(D+A)sin(A+C)$
$+sin(D+A)sin(A+B)sin(B+D)]\dfrac{1}{cosAcosBcosCcosD}$

Với các góc A, B, C, D không phải là góc vuông và đẳng thức

$tanA = \dfrac{2a}{1-a^2}$ $sin(A+B) = \dfrac{2a(1-b^2)+2b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} cosA = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$,

$sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.6 Với a, b, c, d là các số thực dương khác 1 thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}+\frac{d}{1-d^2}$$
$$=-4[\frac{a(1-b^2)+b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\frac{b(1-c^2)+c(1-b^2)}{(1+b^2)(1+c^2)}\frac{a(1-c^2)+c(1-a^2)}{(1+c^2)(1+a^2)}$$
$$+\frac{b(1-c^2)+c(1-b^2)}{(1+b^2)(1+c^2)}\frac{c(1-d^2)+d(1-c^2)}{(1+c^2)(1+d^2)}\frac{b(1-d^2)+d(1-b^2)}{(1+b^2)(1+d^2)}$$
$$+\frac{a(1-d^2)+d(1-a^2)}{(1+a^2)(1+d^2)}\frac{a(1-b^2)+b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\frac{b(1-d^2)+d(1-b^2)}{(1+b^2)(1+d^2)}$$
$$+\frac{c(1-d^2)+d(1-c^2)}{(1+c^2)(1+d^2)}\frac{a(1-d^2)+d(1-a^2)}{(1+a^2)(1+d^2)}]\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)}.$$

Từ đẳng thức $cotA+cotB+cotC+cotD=-\frac{sin(A+B)sin(B+C)sin(C+A)}{sinAsinBsinCsinD}$

và

$sinA=\frac{2a}{1+a^2}, cosA=\frac{1-a^2}{1+a^2}, cotA=\frac{1-a^2}{2a};$

$sin(A+B)=\frac{2a(1-b^2)+2b(1-a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}$ với $a=tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.7 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}+\frac{1-d^2}{d}$$
$$= -\frac{a(1-b^2)+b(1-a^2)}{1+a^2}\frac{b(1-c^2)+c(1-b^2)}{1+b^2}\frac{a(1-c^2)+c(1-a^2)}{1+c^2}\frac{1+d^2}{abcd}.$$

Từ đẳng thức

$cos^2A+cos^2B+cos^2C+cos^2D=2+\frac{1}{2}[cos(A+B)cos(B+C)cos(C+A)$
$+cos(B+C)cos(C+D)cos(D+B)+cos(C+D)cos(D+A)cos(A+C)$
$+cos(D+A)cos(A+B)cos(B+D)]$ và đẳng thức $cosA=\frac{1-a^2}{1+a^2}$,
$cos(A+B)=cosAcosB-sinAsinB=\frac{(1-a^2)(1-b^2)-4ab}{(1+a^2)(1+b^2)}$ với $a=tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.8 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2+\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)^2+\left(\frac{1-c^2}{1+c^2}\right)^2+\left(\frac{1-d^2}{1+d^2}\right)^2\\
=\ & 2+\frac{1}{2}\left[\frac{(1-a^2)(1-b^2)-4ab}{(1+a^2)(1+b^2)}\frac{(1-b^2)(1-c^2)-4bc}{(1+b^2)(1+c^2)}\frac{(1-c^2)(1-a^2)-4ac}{(1+a^2)(1+c^2)}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{(1-b^2)(1-c^2)-4bc}{(1+b^2)(1+c^2)}\frac{(1-c^2)(1-d^2)-4cd}{(1+c^2)(1+d^2)}\frac{(1-d^2)(1-b^2)-4bd}{(1+b^2)(1+d^2)}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{(1-c^2)(1-d^2)-4cd}{(1+c^2)(1+d^2)}\frac{(1-d^2)(1-a^2)-4ad}{(1+a^2)(1+d^2)}\frac{(1-a^2)(1-c^2)-4ac}{(1+a^2)(1+c^2)}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{(1-d^2)(1-a^2)-4ad}{(1+a^2)(1+d^2)}\frac{(1-a^2)(1-b^2)-4ab}{(1+a^2)(1+b^2)}\frac{(1-b^2)(1-d^2)-4bd}{(1+b^2)(1+d^2)}\right]
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $sinA+sinB+sinC+sinD \leqslant 4$ và đẳng thức $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.9 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}+\frac{d}{1+d^2} \leqslant 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức $cos\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{B}{2}+cos\dfrac{C}{2}+cos\dfrac{D}{2} \leqslant 2\sqrt{2}$ và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.10 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $sin\dfrac{A}{2}+sin\dfrac{B}{2}+sin\dfrac{C}{2}+sin\dfrac{D}{2} \leqslant 2\sqrt{2}$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.11 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{d}{\sqrt{1+d^2}} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}+tan\frac{D}{2} \geqslant 4$ với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.12 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$a+b+c+d \geqslant 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức $cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}+cot\frac{D}{2} \geqslant 4$ và đẳng thức $cot\frac{A}{2} = \frac{1}{a}$ với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.13 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqslant 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức $sinA+sinB+2sin\frac{C}{2}+2sin\frac{D}{2} \leqslant 3\sqrt{3}$ và đẳng thức $sinA = \frac{2a}{1+a^2}, sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.14 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{2d}{\sqrt{1+d^2}} \leqslant 3\sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\sqrt{sinA}+\sqrt{sinB}+2\sqrt{sin\frac{C}{2}}+2\sqrt{sin\frac{D}{2}} \leqslant 6\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$
và đẳng thức $sinA = \frac{2a}{1+a^2}, sin\frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán

Bài toán 3.15 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}} + \sqrt{\frac{2b}{1+b^2}} + 2\sqrt[4]{\frac{c^2}{1+c^2}} + 2\sqrt[4]{\frac{d^2}{1+d^2}} \leqslant 6\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức
$sinA + sinB + sinC + sinD$
$\leqslant cos\dfrac{A-B}{4} + cos\dfrac{B-C}{4} + cos\dfrac{C-D}{4} + cos\dfrac{D-A}{4}$ và đẳng thức
$sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}, cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}, sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}},$
$cos\dfrac{A-B}{2} = cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2} + sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}},$
$cos\dfrac{A-B}{4} = \sqrt{\dfrac{1+cos\dfrac{A-B}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}}$
với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.16 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng
$\dfrac{2a}{1+a^2} + \dfrac{2b}{1+b^2} + \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \dfrac{2d}{\sqrt{1+d^2}}$
$\leqslant \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+ab}{2\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}} + \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+bc}{2\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}}$
$+ \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+cd}{2\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}}} + \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1+da}{2\sqrt{(1+d^2)(1+a^2)}}}.$
Áp dụng bất đẳng thức
$cot\dfrac{A}{2} + cot\dfrac{B}{2} + cot\dfrac{C}{2} + cot\dfrac{D}{2} \geqslant 4 + 2(cotA + cotB + cotC + cotD)$ và đẳng thức $cotA = \dfrac{1-a^2}{2a}, cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{a}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.17 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geqslant 4+\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}+\frac{1-d^2}{d}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{cos\dfrac{A}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{B}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{C}{2}}+\frac{1}{cos\dfrac{D}{2}}\geqslant\sqrt{16+(tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}+tan\frac{D}{2})^2}$$

và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.18 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+d^2}\geqslant\sqrt{16+(a+b+c+d)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$sinA+sinB+sinC+sinD\leqslant 2cos\frac{A-B}{2}+2cos\frac{C-D}{2}$$

và đẳng thức $sinA=\dfrac{2a}{1+a^2}, cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$

với $a=tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.19 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}+\frac{d}{1+d^2}\leqslant\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\frac{1+cd}{\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$sinA+sinB+sinC+sinD$$
$$\leqslant cos\frac{A-B}{2}+cos\frac{B-C}{2}+cos\frac{C-D}{2}+cos\frac{D-A}{2}$$ và đẳng thức

$sinA=\dfrac{2a}{1+a^2}, cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$ với $a=tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.20 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}+\frac{d}{1+d^2}\leqslant\frac{1}{2}[\frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}$
$+\frac{1+bc}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}+\frac{1+cd}{\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}}+\frac{1+da}{\sqrt{(1+d^2)(1+a^2)}}]$

Áp dụng bất đẳng thức
$\sqrt{sin^2\frac{A}{2}+sin^2\frac{B}{2}+14sin\frac{A}{2}sin\frac{B}{2}}+\sqrt{sin^2\frac{C}{2}+sin^2\frac{D}{2}+14sin\frac{C}{2}sin\frac{D}{2}}\leqslant$
$4\sqrt{2}$
và đẳng thức $sin\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.21 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{14ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}}$$
$$+\sqrt{\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{d^2}{1+d^2}+\frac{14cd}{\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}}}\leqslant 4\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{sin\frac{B}{2}}{sin^2\frac{A}{2}}+\frac{sin\frac{C}{2}}{sin^2\frac{B}{2}}+\frac{sin\frac{D}{2}}{sin^2\frac{C}{2}}+\frac{sin\frac{A}{2}}{sin^2\frac{D}{2}}\geqslant 4\sqrt{2}$
và đẳng thức $sin\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.22 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{(1+a^2)b}{a^2\sqrt{1+b^2}}+\frac{(1+b^2)c}{b^2\sqrt{1+c^2}}+\frac{(1+c^2)d}{c^2\sqrt{1+d^2}}+\frac{(1+d^2)a}{d^2\sqrt{1+a^2}}\geqslant 4\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\frac{1}{cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{cos\frac{B}{2}cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{cos\frac{C}{2}cos\frac{D}{2}}+\frac{1}{cos\frac{D}{2}cos\frac{A}{2}}\geqslant 8$ và đẳng thức
$cos\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.23 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}+\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}$$
$$+\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}+\sqrt{(1+d^2)(1+a^2)} \geqslant 8$$

Áp dụng bất đẳng thức

$sin\dfrac{A}{2}sin\dfrac{B}{2}sin\dfrac{C}{2}sin\dfrac{D}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.24 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{abcd}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}} \leqslant \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức $cos\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}cos\dfrac{D}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.25 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}} \leqslant \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}+cos\frac{D}{2}$$
$$+\frac{1}{cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{cos^2\frac{C}{2}}+\frac{1}{cos^2\frac{D}{2}} \geqslant 8+2\sqrt{2}$$

và $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.26 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+d^2}}+a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4+2\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức
$sin\dfrac{A}{2}+sin\dfrac{B}{2}+sin\dfrac{C}{2}+sin\dfrac{D}{2}+\dfrac{1}{sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{C}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{D}{2}}\geqslant 6\sqrt{2}$
và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a=tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.27 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện
$a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}+\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}+\frac{\sqrt{1+d^2}}{d}\geqslant 6\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức
$sinA+sinB+sinC+sinD$
$+\dfrac{1}{sin\dfrac{A}{2}cos\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{B}{2}cos\dfrac{C}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{C}{2}cos\dfrac{D}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{D}{2}cos\dfrac{A}{2}}\geqslant 12$
và đẳng thức $sinA=\dfrac{2a}{1+a^2}, sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}, cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với
$a=tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.28 Với a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện
$a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2c}{1+c^2}+\frac{2d}{1+d^2}+\frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{a}+\frac{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}{b}+\frac{\sqrt{(1+c^2)(1+d^2)}}{c}+\frac{\sqrt{(1+d^2)(1+a^2)}}{d}\geqslant 12$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\Big(sin\dfrac{A}{2}+sin\dfrac{B}{2}\Big)+\Big(sin\dfrac{C}{2}+sin\dfrac{D}{2}\Big)\leqslant 2$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.29 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\Big(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\Big)\Big(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}\Big)\leqslant 2$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\Big(cos\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{B}{2}\Big)+\Big(cos\dfrac{C}{2}+cos\dfrac{D}{2}\Big)\leqslant 2$ và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
với
$a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.30 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+d^2}}\Big)\leqslant 2$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\dfrac{1}{sinA+sinB}+\dfrac{1}{sinC+sinD}\geqslant 1$ và đẳng thức $sinA = \dfrac{2a}{1+a^2}$ với
$a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.31 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(1+b^2)+b(1+a^2)}+\frac{(1+c^2)(1+d^2)}{c(1+d^2)+d(1+c^2)}\geqslant 2$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\dfrac{1}{sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{C}{2}}+\dfrac{1}{sin\dfrac{D}{2}}\geqslant 4\sqrt{2}$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
với $a = tan\dfrac{A}{2}$
Ta thu được bài toán

Bài toán 3.32 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}+\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}+\frac{\sqrt{1+d^2}}{d} \geqslant 4\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\frac{1}{cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{cos\frac{D}{2}} \geqslant 4\sqrt{2}$ và đẳng thức $cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.33 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}+\sqrt{1+d^2} \geqslant 4\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức
$tan^4\frac{A}{2}+tan^4\frac{B}{2}+tan^4\frac{C}{2}+tan^4\frac{D}{2} \geqslant 4$ và $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.34 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4$$

Áp dụng bất đẳng thức
$cot^4\frac{A}{2}+cot^4\frac{B}{2}+cot^4\frac{C}{2}+cot^4\frac{D}{2} \geqslant 4$ và đẳng thức $cot\frac{A}{2} = \frac{1}{a}$ với $a = tan\frac{A}{2}$
Ta thu được bài toán
Bài toán 3.35 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4} \geqslant 4$$

Áp dụng bất đẳng thức
$\frac{1}{\sqrt{sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{sin\frac{C}{2}+sin\frac{D}{2}}} \geqslant \sqrt[4]{2^3}$ và đẳng thức

$sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.36 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = abc + abd + acd + bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}{a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+d^2}}{c\sqrt{1+d^2}+d\sqrt{1+c^2}}} \geqslant \sqrt[4]{2^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{\sqrt{cos\dfrac{A}{2}+cos\dfrac{B}{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{cos\dfrac{C}{2}+cos\dfrac{D}{2}}} \geqslant \sqrt[4]{2^3}$ và đẳng thức

$cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.37 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = abc + abd + acd + bcd$ chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+a^2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+d^2}}{\sqrt{1+d^2}+\sqrt{1+c^2}}} \geqslant \sqrt[4]{2^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{A}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{B}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{C}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{cos\dfrac{D}{2}}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^4$ và đẳng thức $cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.38 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = abc + abd + acd + bcd$ chứng minh rằng

$$(1+\sqrt{1+a^2})(1+\sqrt{1+b^2})(1+\sqrt{1+c^2})(1+\sqrt{1+d^2}) \geqslant (1+\sqrt{2})^4$$

Áp dụng bất đẳng thức

$\left(1+\dfrac{1}{sin\dfrac{A}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{sin\dfrac{B}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{sin\dfrac{C}{2}}\right)\left(1+\dfrac{1}{sin\dfrac{D}{2}}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^4$ và đẳng thức $sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ với $a = tan\dfrac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.39 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$(1+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a})(1+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b})(1+\frac{\sqrt{1+c^2}}{c})(1+\frac{\sqrt{1+d^2}}{d})$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{tan^2\frac{A}{2}}{tan\frac{B}{2}}+\dfrac{tan^2\frac{B}{2}}{tan\frac{C}{2}}+\dfrac{tan^2\frac{C}{2}}{tan\frac{D}{2}}+\dfrac{tan^2\frac{D}{2}}{tan\frac{A}{2}} \geqslant 4$

với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.40 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geqslant 4$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{cot^2\frac{A}{2}}{cot\frac{B}{2}}+\dfrac{cot^2\frac{B}{2}}{cot\frac{C}{2}}+\dfrac{cot^2\frac{C}{2}}{cot\frac{D}{2}}+\dfrac{cot^2\frac{D}{2}}{cot\frac{A}{2}} \geqslant 4$ và đẳng thức $cot\frac{A}{2} = \frac{1}{a}$ với $a = tan\frac{A}{2}$

Ta thu được bài toán

Bài toán 3.41 Với a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd$ chứng minh rằng

$$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{d}{c^2}+\frac{a}{d^2} \geqslant 4$$

KẾT LUẬN

Xây dựng đẳng thức, bất đẳng thức từ các đẳng thức, bất đẳng thức cơ bản được rất nhiều người nghiên cứu và sáng tạo. Việc tìm ra cái mới không đơn giản. Trong bản luận văn này tác giả cũng đã đạt được một số kết quả sau:

1. Tác giả đã xây dựng được một số bài toán mới hay và khó dành cho học sinh khá và giỏi.

2. Tác giả đã đưa ra một số phương pháp giải đại số cho các bài toán mới được xây dựng.

3. Tác giả cũng đã xây dựng được một số đẳng thức, bất đẳng thức trong tứ giác lồi. Chứng minh được kết quả cơ bản cho phép xây dựng bài toán đại số từ các đẳng thức, bất đẳng thức trong tứ giác lồi.

4. Tiếp tục nghiên cứu để xây dựng các đẳng thức, bất đẳng thức trong n-giác lồi ($n \geqslant 4$) cũng là công việc mới mẻ.

5. Phương pháp chứng minh đại số đối với các đẳng thức, bất đẳng thức đại số được xây dựng từ các đẳng thức, bất đẳng thức trong tứ giác lồi là bài toán mở cho tác giả và những ai quan tâm đến luận văn.

Sáng tạo bài toán mới cho phép ta nhìn nhận đa dạng và sâu sắc hơn những đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản.
Một lần nữa, tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới sự hướng dẫn , góp ý tận tình của PGS.TS. Nguyễn Vũ Lương, các thầy cô giáo giảng dạy tại khoa Toán - Cơ - Tin học những người đã giúp đỡ tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Vũ Lương, *Các bài giảng về phương trình lượng giác*, NXB Giáo dục, 2005.

[2] Nguyễn Vũ Lương, *Một số bài giảng về các bài toán trong tam giác*, NXBĐHQG - Hà Nội, 2006.

[3] Nguyễn Vũ Lương, *Các bài giảng về bất đẳng thức Côsi*, NXBĐHQG - Hà Nội, 2006.

[4] Nguyễn Vũ Lương, *Các bài giảng về bất đẳng thức Bunhia Copxki*, NXBĐHQG - Hà Nội, 2005.

[5] G.V.Milovanovic, *Mathematics and Its application* Kluwer Academic Publishers, 1997.

[6] Andresscu.T and Feng.Z , *Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the World*, Mathematical Association of America, Washing.DC, 2000.

[7] C.H. Hardy, J.E Littlewood, G.Pólya, Inequalities. Cambrige University Press, 1952.