Trích yếu luận án

I. Tóm tắt mở đầu

- Tên tác giả: Nguyễn Thái hòa
- Tên luận án: Về cấu trúc lớp môđun có bất biến $pf_A(M)$ nhỏ trên vành địa phương
- Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
- Mã số: 1.01.03
- Tên cơ sở đào tạo: Trường đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

II. Nội dung

Trong luận án, ký hiệu $(A, \mathfrak{m})$ là vành Noether giao hoán địa phương với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ và M là một A-môđun hữu hạn sinh chiều dim $M = d$, $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên.

Xét môđun con $Q_M(\underline{x})$ của M được xác định như sau

$$Q_M(\underline{x}) = \bigcup_{t>0} ((x_1^{t+1}, ..., x_d^{t+1})M : x_1^t \cdots x_d^t),$$

trong đó $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ là một hệ tham số của M.

Đặt

$$q_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = \ell_A\big(M/Q_M(\underline{x}(\underline{n}))\big)$$

và xét

$$J_{M,\underline{x}}(\underline{n}) = n_1 \cdots n_d\, e(\underline{x}; M) - q_{M,\underline{x}}(\underline{n})$$

như là những hàm theo $\underline{n}$, trong đó $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d})$ và $\underline{n} = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{N}^d$. Mặt khác, môđun con $\left\{ \dfrac{m}{(x_1, ..., x_d, 1)} \,\middle|\, m \in M \right\}$ các phân số suy rộng được đưa ra bởi Sharp và Hamieh có độ dài bằng $\ell_A\big(M/Q_M(\underline{x})\big)$. Do đó, hàm $J_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ chính là hàm $J_M(\underline{n}, \underline{x})$ đã được định nghĩa bởi Nguyễn Tự Cường và Nguyễn Đức Minh như sau:

$$J_M(\underline{n}, \underline{x}) = n_1 \cdots n_d\, e(\underline{x}; M) - \ell\big(M(1/(x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d}, 1))\big).$$

Xét hàm $J_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ nhằm để tiếp cận đến câu hỏi mở của Sharp và Hamieh sau đây.

Câu hỏi mở: Hàm $J_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ có phải là một đa thức khi $\underline{n} \gg 0$ ($\underline{n}$ đủ lớn) hay không?

Câu hỏi này đã được các tác giả ở trên giải quyết. Đặc biệt, bậc nhỏ nhất của tất cả các đa thức theo $\underline{n}$ chặn trên hàm $J_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ không phụ

thuộc cách chọn hệ tham số $\underline{x}$. Bất biến này được ký hiệu là $pf_A(M)$. Hơn nữa, Họ cũng đã bắt đầu nghiên cứu một số lớp môđun với $pf_A(M)$ nhỏ. Cách tiếp cận của Họ là sử dụng các tính chất của phân số suy rộng.

Mục đích của luận án này là nghiên cứu tiếp cấu trúc các lớp môđun có $pf_A(M) \leq 0$. Trong luận án này sử dụng cách tiếp cận mới thông qua việc nghiên cứu môđun con $Q_M(\underline{x})$. Luận án đã thu được các kết quả chính sau:

- Chứng minh ánh xạ định thức là đơn cấu. Nêu ra các tính chất cơ bản của hàm $q_{M,\underline{x}}(\underline{n})$. Chứng minh tính chặn đều cho mọi hệ tham số thỏa mãn Giả thuyết đơn thức đối với môđun (Giả thuyết đơn thức do Hochster phát biểu cho vành). Đưa ra một cách chứng minh mới cho một số kết quả về hàm $J_{M,\underline{x}}(\underline{n})$ và bất biến $pf_A(M)$.

- Đưa ra khái niệm dãy giả chính qui. Đặc trưng lớp môđun M có $pf_A(M) = -\infty$ qua dãy giả chính qui. Đưa ra một điều kiện ắt có và đủ để môđun M có $pf_A(M) = -\infty$ qua các môđun đối đồng điều địa phương và tính chất của một phần hệ tham số. Đưa ra một số tính chất cơ bản của lớp môđun M có $pf_A(M) = -\infty$ và môđun Cohen-Macaulay lọc. Cuối cùng đặc trưng lớp môđun Cohen-Macaulay lọc qua tính chất của hệ tham số.

- Chứng minh một điều kiện cần qua đối ngẫu Matlis của đối đồng điều địa phương để một môđun M có $pf_A(M) \leq 0$. Từ đó thu lại các kết quả chính biết trước đó của Sharp và Nguyễn Tự Cường. Xây dựng phản ví dụ cho một giả thuyết của Nguyễn Tự Cường cũng như một số ví dụ khác làm sáng tỏ các kết quả trong luận án.

Đề tài của luận án có tính thời sự, phù hợp với mã số chuyên ngành. Các kết quả thu được trong luận án là mới, có ý nghĩa khoa học.

Hà Nội ngày 4 tháng 3 năm 2002

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thái Hòa

Tập thể hướng dẫn:

GS.TS Trần Trọng Huệ PGS.TSKH Nguyễn Tự Cường