

# Mục lục

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lời nói đầu</b>                                             | <b>iii</b> |
| <b>1 Tổng quan về bài toán biên</b>                            | <b>1</b>   |
| 1.1 Bài toán biên . . . . .                                    | 1          |
| 1.2 Các định lí tồn tại và duy nhất nghiệm . . . . .           | 2          |
| 1.3 Một số thủ thuật biến đổi . . . . .                        | 6          |
| 1.3.1 Bài toán chứa tham số . . . . .                          | 6          |
| 1.3.2 Bài toán biên tự do . . . . .                            | 7          |
| 1.3.3 Đặt điều kiện biên tổng quát về dạng tách được . . . . . | 8          |
| 1.4 Các phương pháp giải bài toán biên . . . . .               | 9          |
| 1.4.1 Phương pháp bắn đơn . . . . .                            | 10         |
| 1.4.2 Phương pháp bắn bội . . . . .                            | 15         |
| 1.4.3 Phương pháp sai phân hữu hạn . . . . .                   | 20         |
| 1.4.4 Phương pháp biến phân . . . . .                          | 22         |
| 1.4.5 So sánh giữa các phương pháp . . . . .                   | 24         |

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2</b> | <b>Phương pháp bắn đơn, phương pháp bắn bội và các thuật toán</b> | <b>29</b> |
| 2.1      | Phương pháp bắn đơn . . . . .                                     | 29        |
| 2.1.1    | Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tuyến tính . . .           | 29        |
| 2.1.2    | Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tổng quát . . .            | 32        |
| 2.1.3    | Khó khăn khi thực hiện phương pháp bắn đơn . . . . .              | 35        |
| 2.2      | Phương pháp bắn bội . . . . .                                     | 39        |
| 2.2.1    | Mô tả thuật toán . . . . .                                        | 39        |
| 2.2.2    | Kĩ thuật chọn điểm chia . . . . .                                 | 42        |
| <b>3</b> | <b>Thử nghiệm số</b>                                              | <b>44</b> |
| 3.1      | Phương pháp bắn đơn . . . . .                                     | 44        |
| 3.1.1    | Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tuyến tính . . .           | 44        |
| 3.1.2    | Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tổng quát . . .            | 47        |
| 3.2      | Phương pháp bắn bội . . . . .                                     | 50        |
| 3.2.1    | Phương pháp bắn bội giải bài toán biên tuyến tính . . .           | 50        |
| 3.2.2    | Chọn điểm chia trong phương pháp bắn bội . . . . .                | 52        |
| 3.2.3    | Phương pháp bắn bội giải bài toán biên phi tuyến . . . .          | 55        |
|          | <b>Kết luận</b>                                                   | <b>58</b> |
|          | <b>Tài liệu tham khảo</b>                                         | <b>59</b> |
|          | <b>Phụ lục</b>                                                    | <b>60</b> |

# Lời nói đầu

Trong thực tế có rất nhiều các vấn đề khoa học dẫn đến việc giải một hệ phương trình vi phân với hai đầu biên cố định, ta gọi đó là các bài toán biên. Ngày nay, phương pháp bắn giải bài toán biên đã trở thành phổ biến. Thông thường, người ta sử dụng phương pháp bắn đơn. Tuy nhiên, trong một số dạng bài toán nhất định thì phương pháp bắn đơn thể hiện các nhược điểm và trở nên vô hiệu. Thay vào đó, phương pháp bắn bội - tuy có phức tạp hơn phương pháp bắn đơn - nhưng lại thu được các kết quả tốt hơn. Vì những lí do đó, chúng tôi đã chọn đề tài:

*"Bài toán biên với phương pháp bắn bội".*

Nhiệm vụ của tác giả là tìm tòi, đọc hiểu tài liệu và trình bày về bài toán biên và các phương pháp bắn. Tiếp đó phải xây dựng được thuật toán và viết các chương trình minh họa cho các phương pháp bắn, bao gồm cả phương pháp bắn đơn và phương pháp bắn bội, thông qua những ví dụ cụ thể, qua đó thể hiện được ưu điểm của phương pháp bắn bội. Với những yêu cầu như trên, ngoài các phần Lời mở đầu, Kết luận, Tài liệu tham khảo thì bản Luận văn này gồm 3 chương chính và phần Phụ lục.

**Chương 1** có tựa đề "Tổng quan về bài toán biên", trình bày các khái niệm chung về bài toán biên, trong đó có các định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán biên tổng quát, bài toán biên với điều kiện biên tách được, bài toán biên tuyến tính. Một số thủ thuật biến đổi để đưa các điều kiện biên về dạng tách được hay chuyển bài toán biên chứa tham số về dạng thông thường cũng được trình bày chi tiết. Chúng tôi cũng trình bày trong chương này các phương pháp thường sử dụng để giải bài toán biên, bao gồm phương pháp bắn đơn, phương pháp bắn bội, phương pháp sai phân và phương pháp biến phân. Phần sau cùng, chúng tôi trích dẫn một ví dụ để so sánh độ chính xác giữa các phương pháp giải đó và thể hiện sự vượt trội của Phương pháp bắn bội. Chương này chúng tôi chủ yếu dựa theo các tác giả J. Stoer và R. Bulirsch trong cuốn [6].

**Chương 2** trình bày kỹ lưỡng hơn về hai phương pháp bắn đã nêu ra ở Chương 1: phương pháp bắn đơn và phương pháp bắn bội cho các dạng bài toán biên cấp hai cụ thể. Trong đó có phương pháp bắn đơn cho bài toán biên tuyến tính, phương pháp bắn đơn cho bài toán biên tổng quát và phương pháp bắn bội cho bài toán biên tổng quát.

**Chương 3** trình bày về các kết quả thu được khi sử dụng các phương pháp bắn giải một số bài toán biên cụ thể để minh họa cho Chương 2. Trong đó có phân tích, nhận xét làm rõ các bước thực hiện, cũng như thể hiện chi tiết các kết quả tìm được.

Trong phần **Phụ lục**, chúng tôi trình bày chi tiết mã giải các bài toán bằng phương pháp bắn đã đưa ra ở Chương 3, các mã giải này được xây dựng trong môi trường Maple.

Qua đây, em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Hữu Diễn - người thầy đã lựa chọn đề tài cũng như tận tâm, nhiệt tình giúp đỡ, chỉ bảo cho em trong suốt quá trình thực hiện luận văn tốt nghiệp. Luận văn này không thể hoàn thành nếu không có sự giúp đỡ to lớn ấy của thầy. Cũng nhân dịp này em muốn gửi lời cảm ơn tới các thầy cô trong khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã nhiệt tình giảng dạy và tạo điều kiện để em hoàn thành tốt khóa học tập của mình.

Hà Nội, tháng 11 năm 2009

Học viên

Nguyễn Xuân Quý

# Chương 1

## Tổng quan về bài toán biên

### 1.1 Bài toán biên

Bài toán giá trị biên (bài toán biên) là bài toán tìm nghiệm  $y(x)$  của hệ  $n$  ( $n \geq 1$ ) phương trình vi phân

$$(1.1) \quad y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b$$

thỏa mãn điều kiện biên (tổng quát)

$$(1.2) \quad r(y(a), y(b)) = 0,$$

trong đó  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$  và

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \quad r(u, v) = \begin{bmatrix} r_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ r_n(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n) \end{bmatrix}.$$

Điều kiện biên được gọi là *tuyến tính* nếu có dạng

$$(1.3) \quad Ay(a) + By(b) = c,$$

trong đó  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Trong thực tế, các điều kiện biên thường *tách được*, tức là

$$(1.4) \quad A_1 y(a) = c_1; \quad B_2 y(b) = c_2.$$

Điều kiện này có được nếu ở (1.3), các ma trận  $A, B, c$  có dạng

$$(A, B, c) = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & c_1 \\ \hline 0 & B_2 & c_2 \end{array} \right].$$

**Nhận xét 1.1.** Bài toán giá trị ban đầu chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán biên (khi thay  $A = I$ ,  $a = x_0$ ,  $c = y_0$ ,  $B = 0$  vào điều kiện biên (1.3)).

## 1.2 Các định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Hãy xem ví dụ đơn giản sau.

**Ví dụ 1.1.** Xét phương trình vi phân với  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$w'' + w = 0.$$

Bài toán có nghiệm tổng quát

$$w(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \text{ bất kì.}$$

- Nếu điều kiện biên là  $w(0) = 0$ ,  $w(\pi/2) = 1$  thì nghiệm duy nhất là  $w(x) = \sin x$ .

- Nếu điều kiện biên là  $w(0) = 0, w(\pi) = 0$  thì bài toán có vô số nghiệm dạng  $w(x) = c_1 \sin x$  với  $c_1$  bất kì.
- Nếu điều kiện biên là  $w(0) = 0, w(\pi) = 1$  thì bài toán vô nghiệm.

Ví dụ trên chứng tỏ không thể có định lí tồn tại và duy nhất nghiệm cho bài toán biên tổng quát. Tuy nhiên, với một số điều kiện nhất định, chúng ta có các định lí về tồn tại và duy nhất nghiệm cho bài toán biên. Định lí thứ nhất cho bài toán biên tổng quát với những điều kiện tương ứng, nội dung như sau:

**Định lí 1.1.** *Giả sử bài toán biên*

$$y' = f(x, y), \quad r(y(a), y(b)) = 0$$

*thỏa mãn các điều kiện*

1. Các hàm  $f$  và  $D_y f$  liên tục trên  $S := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}^n\}$ .
2. Tồn tại hàm  $k \in C[a, b]$  thỏa mãn  $\|D_y f(x, y)\| \leq k(x)$  với mọi  $(x, y) \in S$ .
3. Ma trận

$$P(u, v) := D_u r(u, v) + D_v r(u, v)$$

*luôn biểu diễn được dưới dạng*

$$P(u, v) = P_0(I + M(u, v))$$

với  $P_0$  là một ma trận hằng không suy biến và ma trận  $M = M(u, v)$  sao cho luôn tồn tại cặp hằng số  $\mu$  và  $m$  để

$$\|M(u, v)\| \leq \mu < 1, \quad \|P_0^{-1} D_v r(u, v)\| \leq m$$

với mọi  $u, v \in \mathbb{R}^n$ .

4. Tồn tại  $\lambda > 0$  với  $\lambda + \mu < 1$  sao cho

$$\int_a^b k(t)dt \leq \ln \left( 1 + \frac{\lambda}{m} \right).$$

Khi đó bài toán biên đã cho có nghiệm duy nhất.

**Nhận xét 1.2.** Các điều kiện của định lý chỉ là điều kiện đủ và rất chặt. Ví dụ như điều kiện (3) chỉ xét trong trường hợp  $n = 2$  sẽ không thỏa mãn cho các điều kiện biên thông thường như

$$y_1(a) = c_1, \quad y_2(a) = c_2.$$

Ngay cả khi làm yếu các điều kiện đi thì ta cũng chỉ thu được các định lý có các điều kiện hiếm khi được thỏa mãn trong thực hành.

Chứng minh Định lý 1.1 được trình bày ở cuối phần Phương pháp bắn đơn của Chương này. Định lý thứ hai áp dụng cho bài toán biên biên với điều kiện tách được.

**Định lý 1.2.** [5] Giả sử bài toán biên

$$y'' = f(x, y, y'); \quad a \leq x \leq b$$

$$a_0 y(a) - a_1 y'(a) = \alpha, \quad |a_0| + |a_1| \neq 0,$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta, \quad |b_0| + |b_1| \neq 0$$

thỏa mãn các điều kiện

1.  $f(x, y, y')$  liên tục trên  $D = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b, y^2 + (y')^2 < \infty\}$ ;
2.  $f(x, y, y')$  thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo  $y$  và  $y'$  trên  $\mathbb{R}$ ;

3.  $f(x, y, y')$  có đạo hàm theo  $y$  và  $y'$  liên tục trên  $D$  và tồn tại số dương  $M$  sao cho

$$(a) \frac{\partial f}{\partial y} > 0,$$

$$(b) \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \leq M;$$

4. Các hệ số của điều kiện biên thỏa mãn

$$a_0 a_1 \geq 0, \quad b_0 b_1 \geq 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0.$$

Khi đó, bài toán biên đã cho có nghiệm duy nhất.

Một trường hợp riêng của định lý này là định lý tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán biên tuyến tính, tức là bài toán biên có dạng

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Nội dung như sau:

**Định lý 1.3.** Giả sử bài toán biên tuyến tính

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

thỏa mãn các điều kiện

1.  $p(x), q(x), r(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ ,

2.  $q(x) > 0$  trên  $[a, b]$ .

Khi đó, bài toán biên tuyến tính trên có nghiệm duy nhất.

## 1.3 Một số thủ thuật biến đổi

Trong thực tế, để tiện cho việc giải, ta có thể đưa các bài toán về dạng bài toán biên, hoặc có thể đưa các điều kiện biên tổng quát về dạng tách được.

### 1.3.1 Bài toán chứa tham số

Bài toán chứa tham số là bài toán tìm nghiệm  $y(x)$  của phương trình

$$y' = f(x, y, \lambda)$$

trong đó  $\lambda$  là tham số chưa biết và hàm  $y(x)$  thỏa mãn  $n + 1$  điều kiện biên dạng

$$r(y(a), y(b), \lambda) = 0, \quad r(u, v, \lambda) = \begin{bmatrix} r_1(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, \lambda) \\ \vdots \\ r_{n+1}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Bài toán này nói chung không có nghiệm khi chọn  $\lambda$  tùy ý, do đó bài toán qui về tìm các "giá trị riêng"  $\lambda_i$  để phương trình có nghiệm. Ta có thể đưa về dạng bài toán biên. Bằng cách đặt  $y_{n+1}(x) := \lambda$  và thêm điều kiện  $y'_{n+1}(x) = 0$ , bài toán này trở thành

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}), \quad \bar{r}(\bar{y}(a), \bar{y}(b)) = 0,$$

trong đó

$$\bar{y} := \begin{bmatrix} y \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(x, \bar{y}) := \begin{bmatrix} f(x, y, y_{n+1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

và

$$\bar{r}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) := r(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}).$$

### 1.3.2 Bài toán biên tự do

Đó là bài toán biên với biên  $a$  cho trước, còn biên  $b$  sẽ được xác định sau. Khi đó, hệ  $n$  phương trình vi phân

$$y' = f(x, y)$$

có một nghiệm  $y(x)$  thỏa mãn  $n + 1$  điều kiện biên

$$r(y(a), y(b)) = 0, \quad r(u, v) = \begin{bmatrix} r_1(u, v) \\ \vdots \\ r_{n+1}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Ở đây, thay cho  $x$ , ta đưa vào một biến mới  $t$  và một hằng số  $z_{n+1} := b - a$  (chưa được xác định) sao cho

$$x - a = tz_{n+1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\dot{z}_{n+1} = \frac{dz_{n+1}}{dt} = 0.$$

(Ta cũng có thể đặt  $x - a = \Phi(t, z_{n+1})$  với  $\Phi(1, z_{n+1}) = z_{n+1}$ ). Đặt  $z(t) := y(a + tz_{n+1})$ , trong đó  $y(x)$  là nghiệm của phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= D_t z(t) = D_x y(a + tz_{n+1}) z_{n+1} = f(a + tz_{n+1}, y(a + tz_{n+1})) z_{n+1} \\ &= f(a + tz_{n+1}, z(t)) z_{n+1}. \end{aligned}$$

Khi đó, bài toán trở thành bài toán biên với các hàm  $z_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n+1$  như sau

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{n+1}f_1(a + tz_{n+1}, z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ z_{n+1}f_n(a + tz_{n+1}, z_1, \dots, z_n) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

với

$$r_i(z_1(0), \dots, z_n(0), z_1(1), \dots, z_n(1)) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

### 1.3.3 Đưa điều kiện biên tổng quát về dạng tách được

Từ bài toán với điều kiện biên tổng quát

$$y' = f(x, y), \quad r(y(a), y(b)) = 0$$

đặt  $z = y(a)$ , ta được bài toán

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

với điều kiện biên tách được

$$\begin{cases} r(z(b), y(b)) = 0, \\ y(a) = z(a). \end{cases}$$

Ta cũng có thể đặt

$$\begin{cases} y_1 = y(\frac{b+a}{2} - x), \\ y_2 = y(\frac{b+a}{2} + x); \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}.$$

Khi đó ta được bài toán

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -f(\frac{b+a}{2} - x, y_1) \\ f(\frac{b+a}{2} + x, y_2) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}$$

với điều kiện biên tách được

$$\begin{cases} r\left(y_1\left(\frac{b-a}{2}\right), y_2\left(\frac{b-a}{2}\right)\right) = 0, \\ y_1(0) = y_2(0). \end{cases}$$

Tuy nhiên, trong cả hai cách biến đổi trên thì số chiều của bài toán đều tăng gấp đôi.

## 1.4 Các phương pháp giải bài toán biên

Để giải bài toán biên, thông thường ta sử dụng các phương pháp bắn, phương pháp sai phân hữu hạn hoặc phương pháp biến phân,... Trong mục này, chúng tôi chỉ giới thiệu tổng quan về các phương pháp. Riêng phương pháp bắn đơn và phương pháp bắn bội sẽ được trình bày kĩ lưỡng hơn ở Chương 2, cũng như các thử nghiệm số về hai phương pháp này được trình bày ở Chương 3.

### 1.4.1 Phương pháp bắn đơn

Phương pháp này khá đơn giản và thường được sử dụng để giải bài toán biên tuyến tính. Để giải bài toán biên (1.1), (1.2) bằng phương pháp này, trước hết ta đưa về giải bài toán giá trị ban đầu

$$(1.5) \quad y' = f(x, y), \quad y(a) = s,$$

trong đó,  $s \in \mathbb{R}^n$  là tham số. Khi đó nghiệm  $y(x) = y(x, s)$  của bài toán giá trị ban đầu này phải thỏa mãn điều kiện biên

$$r(y(a, s), y(b, s)) = r(s, y(b, s)) = 0.$$

Từ đó ta cần tìm một nghiệm  $s = [\sigma_1, \sigma_1, \dots, \sigma_n]^T$  của phương trình

$$(1.6) \quad F(s) = 0, \quad F(s) := r(s, y(b, s)).$$

Việc tìm nghiệm  $s$  dựa vào phương pháp Newton tổng quát

$$(1.7) \quad s^{(i+1)} = s^{(i)} - DF(s^{(i)})^{-1} F(s^{(i)}).$$

Theo đó, trong mỗi bước lặp, cần tính  $F(s^{(i)})$ , ma trận Jacobian

$$DF(s^{(i)}) = \left[ \frac{\partial F_j(s)}{\partial \sigma_k} \right]_{s=s^{(i)}},$$

và nghiệm  $d^{(i)} := s^{(i)} - s^{(i+1)}$  của hệ phương trình tuyến tính  $DF(s^{(i)})d^{(i)} = F(s^{(i)})$ . Muốn tính toán  $F(s) = r(s, y(b, s))$  tại  $s = s^{(i)}$ , ta cần tính  $y(b, s^{(i)})$ , tức là cần giải bài toán giá trị ban đầu (1.5) với  $s = s^{(i)}$ . Để tính  $DF(s^{(i)})$ , ta

đi từ

$$(1.8) \quad DF(s) = D_u r(s, y(b, s)) + D_v r(s, y(b, s)) \cdot Z(b, s),$$

với các ma trận

$$(1.9) \quad \begin{aligned} D_u r(u, v) &= \left[ \frac{\partial r_i(u, v)}{\partial u_j} \right], \quad D_v r(u, v) = \left[ \frac{\partial r_i(u, v)}{\partial v_j} \right], \\ Z(b, s) &= D_s y(b, s) = \left[ \frac{\partial y_i(b, s)}{\partial \sigma_j} \right]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, trong trường hợp các hàm  $r(u, v)$  phi tuyến, ta không thể tính  $DF(s)$  bằng cách dùng các công thức ở trên, thay vào đó ta sẽ xấp xỉ nó bằng sai phân. Tức là  $DF(s)$  được xấp xỉ bởi ma trận

$$\Delta F(s) = [\Delta_1 F(s), \dots, \Delta_n F(s)],$$

với

$$(1.10) \quad \Delta_j F(s) = \frac{F(\sigma_1, \dots, \sigma_j + \Delta\sigma_j, \dots, \sigma_n) - F(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_n)}{\Delta\sigma_j}.$$

Từ  $F(s) = r(s, y(b, s))$  ta thấy phép tính  $\Delta_j F(s)$  hiển nhiên đòi hỏi các giá trị

$$y(b, s) = y(b, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad y(b, \sigma_1, \dots, \sigma_j + \Delta\sigma_j, \dots, \sigma_n)$$

xác định theo nghiệm của các bài toán giá trị ban đầu tương ứng.

Sau phép lặp, ta tìm được giá trị  $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$  thỏa mãn (xấp xỉ) là nghiệm của (1.6). Cuối cùng, ta giải bài toán giá trị ban đầu (1.5) và thu được nghiệm số của bài toán biên (1.1), (1.2).

Phương pháp Newton nói chung là phân kì, ngoại trừ trường hợp vector  $s^{(0)}$  ban đầu đủ gần nghiệm  $\bar{s}$  của  $F(s) = 0$ . Do đó, với các giá trị ban đầu chưa

biết thì phương pháp bắn đơn là không hữu ích. Trong thời gian tìm hiểu đề tài, chúng tôi còn biết đến một phương pháp bắn đơn khác, được gọi là phương pháp bắn đơn cải biên<sup>1</sup>. Phương pháp này có nhiều ưu điểm hơn phương pháp bắn đơn thông thường, tuy nhiên do yếu tố thời gian, chúng tôi chưa tìm hiểu kĩ và đưa phương pháp này vào luận văn được.

*Chứng minh Định lí 1.1.* Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau:

*Giả sử  $T(x)$  là hàm liên tục trên  $[a, b]$  và  $k(x) := \|T(x)\|$ , khi đó nghiệm  $Y(x)$  của bài toán*

$$Y' = T(x)Y, \quad Y(a) = I$$

*thỏa mãn đánh giá*

$$\|Y(x) - I\| \leq \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) - 1, \quad x \geq a.$$

Thật vậy, ta có

$$Y(x) = I + \int_a^x T(t)Y(t)dt.$$

Đặt

$$\zeta(x) := \|Y(x) - I\|.$$

Từ  $\|Y(x)\| \leq \zeta(x) + \|I\| = \zeta(x) + 1$  ta thấy với  $x \geq a$  thì

$$(1.11) \quad \zeta(x) \leq \int_a^x k(t)(\zeta(t) + 1)dt.$$

Gọi  $c(x)$  là hàm thỏa mãn

$$(1.12) \quad \int_a^x k(t)(\zeta(t) + 1)dt = c(x) \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) - 1, \quad c(a) = 1.$$

---

<sup>1</sup>Xem trong [4]

Dễ thấy  $c(x)$  khả vi và khi đó

$$\begin{aligned} k(x)(\zeta(x) + 1) &= c'(x) \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) + k(x)c(x) \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) \\ &= c'(x) \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) + k(x) \left[1 + \int_a^x k(t)(\zeta(t) + 1)dt\right]. \end{aligned}$$

Kết hợp với  $k(x) \geq 0$  và (1.11) ta có

$$\begin{aligned} c'(x) \exp\left(\int_a^x k(t)dt\right) + k(x) \int_a^x k(t)(\zeta(t) + 1)dt &= k(x)\zeta(x) \\ &\leq k(x) \int_a^x k(t)(\zeta(t) + 1)dt. \end{aligned}$$

Suy ra  $c'(x) \leq 0$ , tức là  $c(x)$  nghịch biến và

$$(1.13) \quad c(x) \leq c(a) = 1 \quad \forall x \geq a.$$

Từ (1.11), (1.12), (1.13) cho ta khẳng định của Bổ đề.

Bài toán biên trong Định lí hiển nhiên giải được nếu hàm  $F(s)$  trong (1.6) có không điểm  $\bar{s}$ :

$$(1.14) \quad F(\bar{s}) = r(\bar{s}, y(b, \bar{s})) = 0.$$

Điều này xảy ra nếu ta tìm được một ma trận  $Q$  cấp  $n \times n$  không suy biến sao cho

$$(1.15) \quad \Phi(s) := s - QF(s)$$

là một ánh xạ co trong  $\mathbb{R}^n$ . Không điểm  $\bar{s}$  của  $F(s)$  chính là điểm bất động của  $\Phi$ ,  $\Phi(\bar{s}) = \bar{s}$ .

Ta chỉ ra rằng với việc chọn  $Q$  thích hợp, ở đây là chọn  $Q := P_0^{-1}$  thì hàm  $\Phi(s)$

trong (1.15) thỏa mãn

$$(1.16) \quad \|D_s \Phi(s)\| \leq K < 1$$

với mọi  $s \in \mathbb{R}^n$  và  $K := \lambda + \mu < 1$ . Từ đó suy ra

$$\|\Phi(s_1) - \Phi(s_2)\| \leq K\|s_1 - s_2\|$$

với mọi  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$ , tức là  $\Phi$  là một ánh xạ co. Vì vậy  $\Phi$  có điểm bất động duy nhất  $\bar{s} = \Phi(\bar{s})$ , đó chính là không điểm của  $F(s)$ .

Đặt  $\Phi(s) := s - P_0^{-1}r(s, y(b, s))$ , ta có

$$\begin{aligned} D_s \Phi(s) &= I - P_0^{-1}[D_u r(s, y(b, s)) + D_v r(s, y(b, s))Z(b, s)] \\ &= I - P_0^{-1}[P(s, y(b, s)) + D_v r(s, y(b, s))(Z(b, s) - I)] \\ &= I - P_0^{-1}[P_0(I + M) + D_v r(Z - I)] \\ (1.17) \quad &= -M(s, y(b, s)) - P_0^{-1}D_v r(s, y(b, s))(Z(b, s) - I), \end{aligned}$$

với ma trận

$$Z(x, s) := D_s y(x, s)$$

là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$Z' = T(x)Z, \quad Z(a, s) = I, \quad T(x) := D_y f(x, y(x, s)).$$

Từ Bổ đề ở trên và điều kiện (2) của giả thiết, ta có đánh giá sau:

$$\|Z(b, s) - I\| \leq \exp\left(\int_a^b k(t)dt\right) - 1.$$

Do đó, từ (1.17) kết hợp với các điều kiện (3) và (4) ta có

$$\begin{aligned}\|D_s\Phi(s)\| &\leq \mu + m \left[ \exp \left( \int_a^b k(t)dt \right) - 1 \right] \\ &\leq \mu + m \left[ 1 + \frac{\lambda}{m} - 1 \right] \\ &= \mu + \lambda = K < 1.\end{aligned}$$

Vậy định lí được chứng minh.

#### 1.4.2 Phương pháp bắn bội

Mục tiêu của phương pháp bắn bội là khắc phục được nhược điểm của phương pháp bắn đơn và tìm được nghiệm chính xác hơn. Để thực hiện phương pháp này, ta chia nhỏ đoạn  $[a, b]$  bởi các điểm chia

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$$

và thực hiện bắn trên từng đoạn nhỏ đó.

Như vậy, trong phương pháp bắn bội, các giá trị  $\bar{s}_k = y(x_k)$ ,  $k = 1, \dots, m$  tại các điểm  $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$  được tính đồng thời bởi phương pháp lặp, với  $y(x)$  là nghiệm chính xác của bài toán biên

$$(1.18) \quad y' = f(x, y), \quad r(y(a), y(b)) = 0.$$

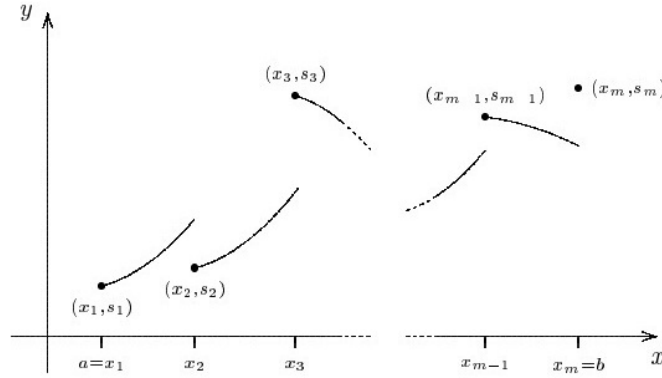
Đặt  $y(x, x_k, s_k)$  là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_k) = s_k.$$

Bài toán trở thành xác định các vector  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  sao cho hàm

$$\begin{aligned} y(x) &:= y(x, x_k, s_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad k = 1, \dots, m-1, \\ y(b) &:= s_m, \end{aligned}$$

là liên tục và do đó là nghiệm của phương trình vi phân  $y' = f(x, y)$ , hơn nữa, hàm này phải thỏa mãn điều kiện biên  $r(y(a), y(b)) = 0$ . Từ đó ta có  $nm$  điều



Hình 1.1: Phương pháp bắn bội.

kiện

$$\begin{aligned} (1.19) \quad y(x_{k+1}, x_k, s_k) &= s_{k+1}, \quad k = 1, \dots, m-1, \\ r(s_1, s_m) &= 0 \end{aligned}$$

với  $nm$  thành phần chưa biết  $\sigma_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$  của

$$s_k = [\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \dots, \sigma_{kn}]^T.$$

Tất cả các điều kiện trên tương đương với hệ phương trình

$$(1.20) \quad F(s) := \begin{bmatrix} F_1(s_1, s_2) \\ F_2(s_2, s_3) \\ \vdots \\ F_{m-1}(s_{m-1}, s_m) \\ F_m(s_1, s_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(x_2, x_1, s_1) - s_2 \\ y(x_3, x_2, s_2) - s_3 \\ \vdots \\ y(x_m, x_{m-1}, s_{m-1}) - s_m \\ r(s_1, s_m) \end{bmatrix} = 0$$

với các ẩn  $s = [s_1, \dots, s_m]^T$ .

Công việc này có thể thực hiện nhờ phương pháp Newton (hoặc phương pháp Newton cải biên),

$$(1.21) \quad s^{(i+1)} = s^{(i)} - [DF(s^{(i)})]^{-1} F(s^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots$$

Trong mỗi bước của phương pháp, ta cần tính  $F(s)$  và  $DF(s)$  với  $s = s^{(i)}$ . Để tính  $F(s)$ , ta cần xác định  $y(x_{k+1}, x_k, s_k)$ ,  $k = 1, \dots, m-1$  bằng cách giải các bài toán giá trị ban đầu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_k) = s_k,$$

và tính  $F(s)$  theo (1.20). Với các cấu trúc đặc biệt của  $F_i$  trong (1.20) thì ma trận Jacobian  $DF(s) = [D_{s_k} F_i(s)]_{i,k=1,\dots,m}$  có dạng

$$(1.22) \quad DF(s) = \begin{bmatrix} G_1 & -I & 0 & & 0 \\ 0 & G_2 & -I & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & G_{m-1} & -I \\ A & 0 & & 0 & B \end{bmatrix},$$

trong đó các ma trận  $A, B, G_k$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ) cấp  $n \times n$  lần lượt là các ma trận Jacobian,

$$\begin{aligned}
 (1.23) \quad & G_k : \equiv D_{s_k} F_k(s) \equiv D_{s_k} y(x_{k+1}, x_k, s_k), \quad k = 1, \dots, m-1, \\
 & B : \equiv D_{s_m} F_m(s) \equiv D_{s_m} r(s_1, s_m), \\
 & A : \equiv D_{s_1} F_m(s) \equiv D_{s_1} r(s_1, s_m).
 \end{aligned}$$

Như đã mô tả trong phương pháp bắn đơn, trong thực hành, ta thay các vi phân trong  $A, B, G_k$  bởi các sai phân, những sai phân này có thể tính được bằng cách giải  $(m-1)n$  bài toán giá trị ban đầu ( $n$  bài toán cho mỗi ma trận  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ ). Việc tính toán  $s^{(i+1)}$  từ  $s^{(i)}$  theo (1.21) có thể thực hiện được như sau: Với cách viết tắt

$$(1.24) \quad [\Delta s_1, \dots, \Delta s_m]^T := s^{(i+1)} - s^{(i)}, \quad F_k := F_k(s_k^{(i)}, s_{k+1}^{(i)}),$$

thì (1.21) tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$DF(s) \cdot [\Delta s_1, \dots, \Delta s_m]^T = -F(s)$$

hay

$$\begin{aligned}
 (1.25) \quad & G_1 \Delta s_1 - \Delta s_2 = -F_1, \\
 & G_2 \Delta s_2 - \Delta s_3 = -F_2, \\
 & \vdots \\
 & G_{m-1} \Delta s_{m-1} - \Delta s_m = -F_{m-1}, \\
 & A \Delta s_1 + B \Delta s_m = -F_m.
 \end{aligned}$$

Bắt đầu với phương trình thứ nhất, ta có thể biểu diễn các  $\Delta s_k$  theo  $\Delta s_1$ , ta

có

$$\begin{aligned}
 \Delta s_2 &= G_1 \Delta s_1 + F_1, \\
 (1.26) \quad &\vdots \\
 \Delta s_m &= G_{m-1} G_{m-2} \dots G_1 \Delta s_1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left( \prod_{l=1}^{j-1} G_{m-l} \right) F_{m-j},
 \end{aligned}$$

Thay vào phương trình cuối ta được

$$(1.27) \quad (A + B G_{m-1} G_{m-2} \dots G_1) \Delta s_1 = w,$$

với  $w := -(F_m + B F_{m-1} + B G_{m-1} F_{m-2} + \dots + B G_{m-1} G_{m-2} \dots G_2 F_1)$ .

Đây là một hệ phương trình tuyến tính với ẩn là vector  $\Delta s_1$ , ta có thể giải bằng phương pháp khử Gauss. Khi biết  $\Delta s_1$ , ta sẽ tính được  $\Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_m$  từ (1.25) và  $s^{(i+1)}$  từ (1.24).

Nhận thấy rằng  $F(s)$  hay  $DF(s)$  xác định với mọi vector

$$s = [s_1, \dots, s_m]^T \in M := M^{(1)} \times M^{(2)} \times \dots \times M^{(m-1)} \times \mathbb{R}^n,$$

do đó, phép lặp (1.21) của phương pháp bắn bội có thể thực hiện được với  $s \in M$ . Ở đây  $M^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, m-1$  là tập hợp các vector  $s_k$  sao cho nghiệm  $y(x, x_k, s_k)$  tồn tại trên khoảng nhỏ  $[x_k, x_{k+1}]$ . Tập  $M^{(k)}$  bao gồm tập  $M_k$  chứa mọi  $s_k$  sao cho  $y(x, x_k, s_k)$  tồn tại trên  $[a, b]$ . Chú ý rằng phép lặp Newton tính  $\bar{s}_k$  theo phương pháp bắn đơn chỉ có thể thực hiện được với  $s_k \in M_k \subset M^{(k)}$ . Điều này chứng tỏ rằng phương pháp bắn bội yêu cầu các vector ban đầu trong phép lặp Newton đơn giản hơn đáng kể so với yêu cầu của phương pháp bắn đơn.

### 1.4.3 Phương pháp sai phân hữu hạn

Ý tưởng cơ bản của các phương pháp sai phân là thay thế các thành phần vi phân trong một phương trình bởi các thành phần sai phân tương ứng và giải hệ phương trình thu được. Ta sẽ minh họa điều này bằng một bài toán biên cấp hai với hàm  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(1.28) \quad -y'' + q(x)y = g(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Với các giả thiết  $q, g \in C[a, b]$  và  $q(x) \geq 0$  với  $x \in [a, b]$ , người ta chứng minh được (1.28) có nghiệm duy nhất  $y(x)$ .

Chia nhỏ đoạn  $[a, b]$  thành  $n + 1$  đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b, \quad x_j = a + jh, \quad h := \frac{b-a}{n+1},$$

và với cách viết tắt  $y_j := y(x_j)$ , thay các thành phần vi phân  $y_i'' = y''(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  bởi sai phân cấp hai

$$\Delta^2 y_i := \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Tiếp theo, ta xấp xỉ sai số  $\tau_i(y) := y''(x_i) - \Delta^2 y_i$ . Giả thiết hàm  $y$  khả vi liên tục cấp bốn trên  $[a, b]$  ( $y \in C^4[a, b]$ ), ta có khai triển Taylor của  $y(x_i \pm h)$  tại  $x_i$ :

$$y_{i\pm 1} = y_i \pm hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' \pm \frac{h^3}{3!}y_i''' + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i \pm \theta_i^\pm h), \quad 0 < \theta_i^\pm < 1,$$

do đó

$$\Delta^2 y_i = y_i'' + \frac{h^2}{24} \left[ y^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + y^{(4)}(x_i - \theta_i^- h) \right].$$

Từ  $y^{(4)}$  liên tục, ta có

$$(1.29) \quad \tau_i(y) := y''(x_i) - \Delta^2 y_i = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i + \theta_i h),$$

với  $|\theta_i| < 1$  nào đó. Từ phương trình vi phân và các điều kiện biên của (1.28) ta thấy các giá trị  $y_i := y(x_i)$  thỏa mãn các phương trình

$$(1.30) \quad \begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ \frac{2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}}{h^2} + q(x_i)y_i &= g(x_i) + \tau_i(y), \quad i = 1, \dots, n \\ y_{n+1} &= \beta. \end{aligned}$$

Đặt  $q_i := q(x_i)$ ,  $g_i := g(x_i)$ , các vector

$$\bar{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \tau(y) := \begin{bmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \\ \vdots \\ \tau_n(y) \end{bmatrix}, \quad k := \begin{bmatrix} g_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix},$$

và ma trận đối xứng cấp  $n \times n$

$$A := \begin{bmatrix} 2 + q_1 h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 + q_2 h^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 + q_n h^2 \end{bmatrix}$$

thì các phương trình (1.30) tương đương với

$$(1.31) \quad A\bar{y} = k + \tau(y).$$

Phương pháp sai phân bây giờ qui về việc bỏ đi thành phần sai số  $\tau(y)$  trong (1.31) và lấy nghiệm  $u = [u_1, \dots, u_n]^T$  của hệ phương trình tuyến tính

$$(1.32) \quad Au = k$$

là một xấp xỉ cho  $\bar{y}$ .

#### 1.4.4 Phương pháp biến phân

Trong khi các phương pháp bản đưa bài toán biên về các bài toán giá trị ban đầu tương ứng, phương pháp sai phân xấp xỉ các toán tử vi phân liên tục trong phương trình bởi các sai phân hữu hạn rời rạc thì phương pháp biến phân<sup>2</sup> tiếp cận bài toán biên theo một hướng khác. Việc giải bài toán biên được đưa về việc lựa chọn hàm làm cực tiểu một tích phân xác định từ tập tất cả các hàm khả vi và thỏa mãn các điều kiện biên. Ta sẽ xem xét phương pháp biến phân thông qua bài toán biên với hàm  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(1.33) \quad -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = g(x, y(x)), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Với các giả thiết

$$(1.34) \quad \begin{aligned} p &\in C^1[a, b], & p(x) &\geq p_0 > 0, \\ q &\in C[a, b], & q(x) &\geq 0, \\ g &\in C^1([a, b] \times \mathbb{R}), & g_y(x, y) &\leq \lambda_0, \end{aligned}$$

trong đó  $\lambda_0$  là giá trị riêng nhỏ nhất của bài toán

$$-(pz')' - (\lambda - q)z = 0, \quad z(a) = z(b) = 0,$$

---

<sup>2</sup>Rayleigh-Ritz-Galerkin methods

thì bài toán (1.33) có nghiệm duy nhất.

Nếu  $y(x)$  là nghiệm của (1.33) thì  $u(x) := y(x) - l(x)$  với

$$l(x) := \alpha \cdot \frac{b-x}{b-a} + \beta \cdot \frac{a-x}{a-b}, \quad l(a) = \alpha, \quad l(b) = \beta,$$

là nghiệm của bài toán biên dạng

$$(1.35) \quad -(pu')' + qu = f, \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

với các điều kiện biên triệt tiêu (bằng 0). Từ đó, không mất tính tổng quát, ta xét bài toán (1.35) thay cho bài toán (1.33). Toán tử vi phân tương ứng với (1.35)

$$L(v) := -(pv')' + qv$$

là ánh xạ từ tập

$$D_L := \{v \in C^2[a, b] \mid v(a) = 0, v(b) = 0\}$$

gồm tất cả các hàm khả vi cấp hai trên  $[a, b]$  thỏa mãn các điều kiện biên  $v(a) = v(b) = 0$  vào tập  $C[a, b]$  các hàm liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó, giải bài toán biên (1.35) tương đương với việc tìm nghiệm của phương trình

$$(1.36) \quad L(u) = f, \quad u \in D_L.$$

Nội dung các phương pháp sai phân và biến phân được trình bày kỹ trong [2] và [6]. Ngoài ra còn có nhiều phương pháp giải bài toán biên khác, tuy nhiên luận văn này chỉ tập chung vào các phương pháp bản nên xin không đề cập đến.

### 1.4.5 So sánh giữa các phương pháp

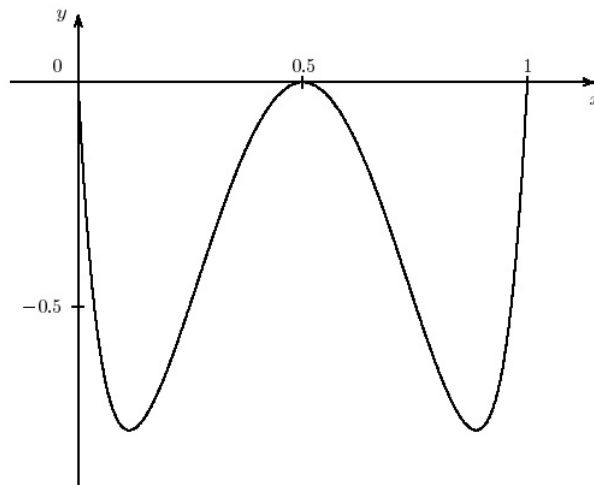
Trong phần này,<sup>3</sup> chúng ta sẽ so sánh các phương pháp trình bày ở trên (phương pháp bắn đơn, phương pháp bắn bội, phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp biến phân) thông qua việc giải bài toán biên

$$(1.37) \quad y'' = 400y + 400 \cos^2(\pi x) + 2\pi^2 \cos(2\pi x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Bài toán biên này có nghiệm chính xác là

$$(1.38) \quad y = \frac{e^{-20}}{1 + e^{-20}} \cdot e^{20x} + \frac{1}{1 + e^{-20}} \cdot e^{-20x} - \cos^2(\pi x).$$

Nghiem chính xác được thể hiện bởi đồ thị dưới đây. Chú ý rằng  $\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)| \approx 0.77$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ ,  $y(0.5) = 0.907998593370 \times 10^{-4}$ .



Hình 1.2: Nghiệm chính xác của (1.37).

Để ý rằng bài toán trên sẽ gây những khó khăn nhất định đối với các phương pháp:

---

<sup>3</sup>Phần này chúng tôi trình bày theo mục 7.6,[6].

1. Phương trình thuần nhất tương ứng với bài toán này là

$$y'' = 400y$$

có nghiệm dạng  $y = ce^{\pm 20x}$ . Nghiệm này tăng hoặc giảm theo hàm mũ, do đó sẽ gây khó khăn cho phương pháp bắn đơn.

2. Các đạo hàm  $y^{(i)}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  của nghiệm chính xác (1.38) rất lớn tại  $x \approx 0$  và  $x \approx 1$ , do đó, sai số trong các phương pháp sai phân hay biến phân đều lớn.

Kết quả thu được của từng phương pháp như sau:

#### Với phương pháp bắn đơn

Ta lấy các giá trị ban đầu của nghiệm chính xác

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -20 \cdot \frac{1 - e^{-20}}{1 + e^{-20}} = -19.9999999176 \dots$$

Sau một phép lặp với sai số tương đối  $\leq 3.2 \cdot 10^{-11}$ , thu được sai số thể hiện bởi bảng dưới đây, với các kí hiệu  $\Delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$  và  $\varepsilon_y(x) = (\tilde{y}(x) - y(x))/y(x)$ .

#### Với phương pháp bắn bội

Để hạn chế tác động của hàm mũ, ta chọn số điểm chia  $m$  lớn,  $m = 21$  và

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{21} = 1, \quad x_k = \frac{k-1}{20}.$$

Sai số thu được sau ba lần lặp như sau:

| $x$ | $ \Delta y(x) ^*$     | $ \varepsilon_y(x) $  |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 0.1 | $1.9 \times 10^{-11}$ | $2.5 \times 10^{-11}$ |
| 0.2 | $1.5 \times 10^{-10}$ | $2.4 \times 10^{-10}$ |
| 0.3 | $1.1 \times 10^{-9}$  | $3.2 \times 10^{-9}$  |
| 0.4 | $8.1 \times 10^{-9}$  | $8.6 \times 10^{-8}$  |
| 0.5 | $6.0 \times 10^{-8}$  | $6.6 \times 10^{-4}$  |
| 0.6 | $4.4 \times 10^{-7}$  | $4.7 \times 10^{-5}$  |
| 0.7 | $3.3 \times 10^{-6}$  | $9.6 \times 10^{-6}$  |
| 0.8 | $2.4 \times 10^{-5}$  | $3.8 \times 10^{-5}$  |
| 0.9 | $1.8 \times 10^{-4}$  | $2.3 \times 10^{-4}$  |
| 1.0 | $1.3 \times 10^{-3}$  | $\infty$              |

$$^* \max_{x \in [0,1]} |\Delta y(x)| \approx 1.3 \times 10^{-3}.$$

Hình 1.3: Sai số của phương pháp bắn đơn.

| $x$ | $ \Delta y(x) ^*$     | $ \varepsilon_y(x) $  |
|-----|-----------------------|-----------------------|
| 0.1 | $9.2 \times 10^{-13}$ | $1.2 \times 10^{-12}$ |
| 0.2 | $2.7 \times 10^{-12}$ | $4.3 \times 10^{-12}$ |
| 0.3 | $4.4 \times 10^{-13}$ | $1.3 \times 10^{-12}$ |
| 0.4 | $3.4 \times 10^{-13}$ | $3.6 \times 10^{-12}$ |
| 0.5 | $3.5 \times 10^{-13}$ | $3.9 \times 10^{-9}$  |
| 0.6 | $1.3 \times 10^{-12}$ | $1.4 \times 10^{-11}$ |
| 0.7 | $1.8 \times 10^{-12}$ | $5.3 \times 10^{-12}$ |
| 0.8 | $8.9 \times 10^{-13}$ | $1.4 \times 10^{-12}$ |
| 0.9 | $9.2 \times 10^{-13}$ | $1.2 \times 10^{-12}$ |
| 1.0 | $5.0 \times 10^{-12}$ | $\infty$              |

$$^* \max_{x \in [0,1]} |\Delta y(x)| \approx 5 \times 10^{-12}.$$

Hình 1.4: Sai số của phương pháp bắn bội.

### Với phương pháp sai phân hữu hạn

Sử dụng phương pháp sai phân với bước  $h = \frac{1}{n+1}$ , thu được sai số tương ứng  $\Delta y = \max_i |\Delta y(x_i)|$ ,  $x_i = ih$ . Bước  $h$  giảm một nửa, dẫn tới sai số giảm đi  $\frac{1}{4}$ . Như vậy, để đạt được sai số  $\Delta y \approx 5 \times 10^{-12}$  của phương pháp bắn bội, ta cần chọn  $h \approx 10^{-6}$ !

| $h$       | $\Delta y$           |
|-----------|----------------------|
| $2^{-4}$  | $2.0 \times 10^{-2}$ |
| $2^{-6}$  | $1.4 \times 10^{-3}$ |
| $2^{-8}$  | $9.0 \times 10^{-5}$ |
| $2^{-10}$ | $5.6 \times 10^{-6}$ |

Hình 1.5: Sai số của phương pháp sai phân.

### Với phương pháp biến phân

Ta chọn không gian  $Sp_\Delta$  các hàm spline lập phương tương ứng với cách chia đều:

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad x_i = ih, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Thu được sai số lớn nhất  $\Delta y = \|u_S - y\|_\infty$  như sau:

| $h$   | $\Delta y$           |
|-------|----------------------|
| 1/10  | $6.0 \times 10^{-3}$ |
| 1/20  | $5.4 \times 10^{-4}$ |
| 1/30  | $1.3 \times 10^{-4}$ |
| 1/40  | $4.7 \times 10^{-5}$ |
| 1/50  | $2.2 \times 10^{-5}$ |
| 1/100 | $1.8 \times 10^{-6}$ |

Hình 1.6: Sai số của phương pháp biến phân.

Muốn thu được kết quả tốt như phương pháp bắn bội ( $\Delta y \approx 5 \times 10^{-12}$ ), ta cần chọn  $h \approx 10^{-4}$ . Khi đó, để tính toán các ma trận ta cần thực hiện  $4 \times 10^4$  phép lặp trong mỗi bước!

Những kết quả đưa ra ở trên đã làm rõ tính ưu việt của phương pháp bắn bội, ngay cả đối với các bài toán biên tuyến tính tách được. Ở đây, các phương pháp sai phân và biến phân đều khả thi (khi yêu cầu về độ chính xác không cao). Để đạt được cùng độ chính xác, phương pháp sai phân cần tính toán với các hệ phương trình lớn hơn phương pháp biến phân. Muốn giải các bài toán biên phi tuyến có nghiệm tăng giảm theo hàm mũ chỉ có một phương pháp duy nhất có hiệu quả, đó là phương pháp bắn bội và những biến thể của nó.

## Chương 2

# Phương pháp bắn đơn, phương pháp bắn bội và các thuật toán

Chương này trình bày kĩ lưỡng nội dung các phương pháp bắn cho các dạng bài toán cụ thể. Với phương pháp bắn đơn, chúng tôi chia thành hai trường hợp: bài toán biên tuyến tính và bài toán biên tổng quát. Đối với phương pháp bắn bội, ngoài nội dung và thuật toán của phương pháp, chúng tôi đề cập đến một vấn đề quan trọng, đó là kĩ thuật chọn điểm chia. Để giải các bài toán giá trị ban đầu phát sinh trong các phương pháp, chúng tôi đều sử dụng phương pháp Runge-Kutta 4 nấc với bước lặp  $h = 0.001$ .

### 2.1 Phương pháp bắn đơn

#### 2.1.1 Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tuyến tính

Bài toán biên tuyến tính là bài toán có dạng

$$(2.1) \quad y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Để giải bài toán này bằng phương pháp bắn đơn, trước hết ta xét hai bài toán giá trị ban đầu, đó là

$$(2.2) \quad y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0.$$

$$(2.3) \quad y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1.$$

Giả sử  $y_1(x), y_2(x)$  lần lượt là nghiệm của các bài toán (2.2), (2.3), khi đó nghiệm  $y(x)$  của bài toán biên tuyến tính (2.1) cho bởi công thức

$$(2.4) \quad y(x) := y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2(x).$$

Thật vậy, ta có

$$y'(x) := y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2'(x),$$

do đó

$$y''(x) := y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2''(x).$$

Vậy

$$\begin{aligned} y''(x) &= p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot [p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \\ &= p(x) \left[ y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2'(x) \right] + q(x) \left[ y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2(x) \right] \\ &\quad + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} y(a) &:= y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha, \\ y(b) &:= y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta. \end{aligned}$$

Như vậy bài toán biên tuyến tính (2.1) dễ dàng được giải quyết bằng cách giải các bài toán giá trị ban đầu (đã đầy đủ các điều kiện ban đầu) (2.2), (2.3) và tính theo công thức (2.4).

Phương pháp trên khá đơn giản, hiệu quả, và chỉ sử dụng ý tưởng của phương pháp bắn đơn - đó là đưa về các bài toán giá trị ban đầu tương ứng. Tuy nhiên, ta cũng có thể sử dụng phương pháp bắn đơn để giải bài toán (2.1) cũng bằng cách đưa về giải các bài toán giá trị ban đầu tương ứng

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s_1;$$

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s_2.$$

Ở đây, ta đã chọn các giá trị ban đầu  $y'(a)$  cho cả hai bài toán lần lượt là  $s_1$  và  $s_2$  (chọn ngẫu nhiên). Sau khi giải hai bài toán trên, thu được các nghiệm số lần lượt là  $y_1(x), y_2(x)$ , do tính chất tuyến tính của bài toán nên thay cho việc sử dụng phương pháp lặp Newton để tìm giá trị đúng  $\bar{s}$  cho  $y'(a)$  thì ta chọn

$$(2.5) \quad \bar{s} := s_1 + \frac{s_2 - s_1}{y_2(b) - y_1(b)} \cdot (\beta - y_1(b)).$$

Do đó, với bài toán biên tuyến tính dạng (2.1), ta sẽ bỏ qua bước lặp tìm  $\bar{s}$ . Về thực chất thì ở đây ta lập được nghiệm  $y(x)$  của (2.1) từ các nghiệm  $y_1(x), y_2(x)$  theo công thức

$$(2.6) \quad y(x) = \frac{s_2 - \bar{s}}{s_2 - s_1} \cdot y_1(x) + \frac{\bar{s} - s_1}{s_2 - s_1} \cdot y_2(x).$$

Dễ dàng kiểm tra được  $y(x)$  thỏa mãn phương trình vi phân trong (2.1). Để  $y(b) = \beta$  thì vế phải của (2.6) bằng  $\beta$  khi  $x = b$ . Từ đó ta rút ra được giá trị của  $\bar{s}$  như trong (2.5).

Thuật toán của phương pháp này khá đơn giản nên chúng tôi không đưa ra, ví dụ cụ thể được trình bày ở Chương 3.

### 2.1.2 Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tổng quát

Để minh họa cho phương pháp bắn đơn, ta giải bài toán biên sau:

$$(2.7) \quad y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Trước hết, ta đưa bài toán về bài toán giá trị ban đầu tương ứng

$$(2.8) \quad y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s$$

trong đó tham số  $s$  ban đầu cần được xác định. Ta cần tìm giá trị  $s$  sao cho

$$|y(b, s) - \beta| < TOL,$$

với  $y(x, s)$  là nghiệm của bài toán (2.8) và sai số cho phép  $TOL$  được chọn trước; tức là tìm nghiệm (xấp xỉ)  $s$  của phương trình

$$y(b, s) - \beta = 0.$$

Công việc này có thể thực hiện bởi phương pháp cắt<sup>1</sup> hoặc phương pháp lặp Newton.

Phương pháp cắt khá đơn giản, muốn thực hiện phương pháp này, ta chỉ cần hai giá trị  $s^{(0)}, s^{(1)}$  ban đầu của  $s$  và lặp theo công thức

$$s^{(k)} = s^{(k-1)} - \frac{(y(b, s^{(k-1)}) - \beta)(s^{(k-1)} - s^{(k-2)})}{y(b, s^{(k-1)}) - y(b, s^{(k-2)})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

---

<sup>1</sup>Secant method.

Ta có thể chọn các giá trị  $s^{(0)}, s^{(1)}$  như sau:

$$s^{(0)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \quad s^{(1)} = s^{(0)} + \frac{\beta - y(b, s^{(0)})}{b - a}.$$

Tuy nhiên, để hội tụ tốt hơn, ta nên sử dụng phương pháp lặp Newton, tức là lặp theo công thức

$$(2.9) \quad s^{(k)} = s^{(k-1)} - \frac{y(b, s^{(k-1)}) - \beta}{\frac{\partial y}{\partial s}(b, s^{(k-1)})}.$$

Như vậy, ta cần chọn một giá trị  $s^{(0)}$  ban đầu, và trong mỗi bước lặp cần tính  $y(b, s^{(k-1)})$  và  $\frac{\partial y}{\partial s}(b, s^{(k-1)})$ . Để tính  $y(b, s^{(k-1)})$ , ta giải bài toán giá trị ban đầu (2.8) với  $s = s^{(k-1)}$ ; để tính  $\frac{\partial y}{\partial s}(b, s^{(k-1)})$ , chú ý rằng không xác định được cụ thể hàm  $y(x, s)$  (bằng các phương pháp số), do đó việc tính trực tiếp  $\frac{\partial y}{\partial s}$  là không thể! Thay vào đó, ta đặt

$$w(x) := w(x, s) = \frac{\partial y}{\partial s}(x, s).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} w''(x) &= \frac{\partial y''}{\partial s}(x, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(x, y(x, s), y'(x, s)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, s), y'(x, s)) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, s), y'(x, s)) \frac{\partial y}{\partial s}(x, s) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, s), y'(x, s)) \frac{\partial y'}{\partial s}(x, s) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, s), y'(x, s)) \cdot w(x, s) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, s), y'(x, s)) \cdot w'(x, s). \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ các điều kiện ban đầu của bài toán (2.8) ta có

$$\frac{\partial y}{\partial s}(a, s) = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial s}(a, s) = 1.$$

Do đó, hàm  $w(x)$  thỏa mãn bài toán giá trị ban đầu

$$(2.10) \quad \begin{aligned} w'' &= f_y(x, y, y') \cdot w + f_{y'}(x, y, y') \cdot w', \quad a \leq x \leq b, \\ w(a) &= 0, \quad w'(a) = 1, \end{aligned}$$

với  $f_y, f_{y'}$  là các đạo hàm riêng theo  $y$  và  $y'$  của hàm  $f(x, y, y')$ . Khi hàm  $w$  được xác định như trên thì công thức lặp Newton (2.9) trở thành

$$(2.11) \quad s^{(k)} = s^{(k-1)} - \frac{y(b, s^{(k-1)}) - \beta}{w(b, s^{(k-1)})}.$$

Với phương pháp lặp này, ta cũng nên chọn giá trị  $s^{(0)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ . Thuật toán như sau:

### Thuật toán 2.1. Phương pháp bắn đơn với phép lặp Newton

1. Nhập giá trị ban đầu  $z^{[1]}$  và sai số cho phép  $TOL$ .
2. Ở bước lặp thứ  $i$ , giải các bài toán (2.8), (2.10) với các điều kiện ban đầu lần lượt là

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = z^{[i]} \quad \text{và} \quad w(a) = 0, \quad w'(a) = 1.$$

Nhận được các giá trị  $y_{z^{[i]}}(b)$  và  $w(b)$ .

3. Tính

$$z^{[i+1]} = z^{[i]} - \frac{y_{z^{[i]}}(b) - \beta}{w(b)}.$$

4. Kiểm tra điều kiện  $|y_{z^{[i+1]}}(b) - \beta| < TOL$ . Nếu thỏa mãn, dừng thuật toán. Nếu không, tăng  $i$ , quay lại lặp từ bước 2.

### 2.1.3 Khó khăn khi thực hiện phương pháp bắn đơn

Phương pháp bắn đơn khá hữu hiệu trong đa số các bài toán biên. Tuy nhiên, phương pháp này có những khó khăn nhất định. Ta xét bài toán

$$(2.12) \quad y'' = 100 \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = e^{-30}.$$

Dễ thấy nghiệm chính xác của bài toán có dạng  $y(x) = c_1 \cdot e^{10x} + c_2 \cdot e^{-10x}$ , với các điều kiện biên đã cho thì nghiệm chính xác là

$$y(x) = e^{-10x}.$$

Khi thực hiện phương pháp bắn đơn, ta cần xét bài toán giá trị ban đầu tương ứng, đó là

$$(2.13) \quad y'' = 100 \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s.$$

Nghiệm của (2.13) là

$$y(x, s) = \frac{10 + s}{20} \cdot e^{10x} + \frac{10 - s}{20} \cdot e^{-10x}.$$

Bước tiếp theo là tìm không điểm của hàm  $F(s) = y(3, s) - e^{-30}$ . Ta có

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{10 + s}{20} \cdot e^{30} + \frac{10 - s}{20} \cdot e^{-30} - e^{-30} \\ &= \frac{10 + s}{20} \cdot e^{30} + \left( \frac{10 - s}{20} - 1 \right) \cdot e^{-30} \\ &= \frac{10 + s}{20} \cdot (e^{30} + e^{-30}). \end{aligned}$$

Do đó, không điểm chính xác của  $F(s)$  là  $s = -10$  (thật ra ta có thể tính được giá trị này rất nhanh gọn:  $s = y'(1) = -10$ ).

Bây giờ giả sử trong phương pháp bắn đơn ta có một giá trị  $\bar{s} \approx s$ ,  $\bar{s} = s(1 + 10^{-10}) = -10(1 + 10^{-10})$ . Khi đó

$$\begin{aligned} y(3, \bar{s}) &= \frac{10 + \bar{s}}{20} \cdot e^{30} + \frac{10 - \bar{s}}{20} \cdot e^{-30} - e^{-30} \\ &= -\frac{10^{-9}}{20} \cdot e^{30} + \left(1 + \frac{10^{-9}}{20}\right) \cdot e^{-30} \\ &\approx -534.3237265. \end{aligned}$$

Như vậy là với sai số rất nhỏ của  $s = y'(0)$ , giá trị của nghiệm số tại điểm biên  $x = 3$  rất xa giá trị đúng. Vì thế, phương pháp bắn đơn không hội tụ được.

**Nhận xét 2.1.** *Biên  $b$  càng lớn thì phương pháp bắn đơn càng khó khăn hơn. Chẳng hạn với ví dụ giải bài toán biên*

$$y'' = 100 \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = 10.$$

*Nếu thực hiện tính toán với 10 chữ số trên Maple thì phương pháp bắn đơn hoàn toàn vô hiệu, nhưng tăng lên tính toán với 15 chữ số thì phương pháp này lại hội tụ bình thường, để tạo ra khó khăn trong trường hợp này, chúng tôi thay biên  $b = 4$ , tức là đi giải bài toán*

$$y'' = 100 \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad y(4) = 10.$$

*Khi đó, dù tính toán với 15 chữ số nhưng phương pháp bắn đơn vẫn không thể hội tụ. Trong khi đó phương pháp bắn bội vẫn hội tụ bình thường khi thực hiện tính toán với 10 chữ số.*

Một khó khăn khác của phương pháp bắn đơn là khi gặp bài toán có điểm kì

dị, xét bài toán biên thứ hai sau:

$$(2.14) \quad y'' = \lambda \cdot \sinh \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

( $\lambda$  là một tham số cố định).

Muốn sử dụng phương pháp bắn đơn thì ta cần chọn  $y'(0) = s$ . Khi xét bài toán giá trị ban đầu tương ứng với (2.14) với  $\lambda = 5, y(0) = 0, y'(0) = s$ , thì nghiệm  $y(x, s)$  tìm được phụ thuộc rất nhiều vào  $s$ . Với  $s = 0.1, 0.2, \dots$  thì việc tính toán bị gián đoạn trước khi điều kiện biên phải ( $x = 1$ ) đạt được, thực tế là  $y(x, s)$  có một điểm kì dị  $x_s \leq 1$  (phụ thuộc vào  $s$ ). Từ

$$y'' = \lambda \cdot \sinh \lambda y$$

lấy tích phân hai vế ta được

$$(2.15) \quad \frac{(y')^2}{2} = \cosh \lambda y + C.$$

Các điều kiện  $y(0) = 0, y'(0) = s$  xác định hằng số của nguyên hàm

$$C = \frac{s^2}{2} - 1.$$

Lấy tích phân (2.15) ta được

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda y} \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + 2 \cosh \eta - 2}}.$$

Khi đó điểm kì dị cho bởi

$$x_s = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + 2 \cosh \eta - 2}}.$$

Để tính xấp xỉ tích phân này, ta phân tích

$$\int_0^\infty = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty, \quad \text{với } \varepsilon \text{ bất kỳ,}$$

và xấp xỉ từng tích phân bộ phận riêng rẽ. Ta được

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + 2 \cosh \eta - 2}} &= \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + \eta^2 + \eta^4/12 + \dots}} \leq \int_0^\varepsilon \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + \eta^2}} \\ &= \ln \left( \frac{\varepsilon}{|s|} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{s^2}} \right), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + 2 \cosh \eta - 2}} &= \int_\varepsilon^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{s^2 + 4 \sinh(\eta/2)}} \leq \int_\varepsilon^\infty \frac{d\eta}{2 \sinh(\eta/2)} \\ &= -\ln(\tanh(\varepsilon/4)). \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$x_s \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left( \frac{\frac{\varepsilon}{|s|} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{s^2}}}{\tanh(\varepsilon/4)} \right) =: H(\varepsilon, s).$$

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , giá trị  $H(\varepsilon, s)$  là một cận trên của  $x_s$ , do đó trong trường hợp riêng ta có

$$x_s \leq H(\sqrt{|s|}, s), \quad \forall s \neq 0.$$

Ta có thể xác định giới hạn của  $H(\sqrt{|s|}, s)$  khi  $s \rightarrow 0$ . Khi  $|s|$  nhỏ, ta có

$$\tanh \left( \frac{\sqrt{|s|}}{4} \right) = \frac{\sqrt{|s|}}{4}, \quad \frac{1}{\sqrt{|s|}} + \sqrt{1 + \frac{1}{|s|}} = \frac{2}{\sqrt{|s|}},$$

do đó, khi  $s \rightarrow 0$  thì ta được

$$(2.16) \quad x_s \leq H(\sqrt{|s|}, s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left( \frac{2/\sqrt{|s|}}{\sqrt{|s|}/4} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{8}{|s|}.$$

Với phương pháp bắn đơn, ta cần đạt được điều kiện biên phải  $x = 1$ , khi đó  $|s|$  cần được chọn đủ lớn sao cho  $1 \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{8}{|s|}$ , tức là  $|s| \leq 8e^{-\lambda}$ . Chẳng hạn với  $\lambda = 5$ , ta có

$$(2.17) \quad |s| \leq 0.05.$$

Như vậy, với  $\lambda = 5$ , ta cần chọn các giá trị  $s$  ban đầu thỏa mãn (2.17) thì mới không gặp điểm kì dị trong  $[0, 1]$  (người ta đã tính được rằng trong trường hợp này, tìm được  $s = 4.57504614 \times 10^{-2}$  và điểm kì dị là  $x_s \approx 1.0326 \dots^2$ ).

## 2.2 Phương pháp bắn bội

### 2.2.1 Mô tả thuật toán

Trong phần này, chúng tôi trình bày cách giải bài toán biên dạng

$$(2.18) \quad y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

bằng phương pháp bắn bội.

Trước hết, ta đưa phương trình vi phân cấp hai trên về dạng hệ hai phương trình cấp một, với cách đặt  $z = y'$ , ta có hệ

$$(2.19) \quad \bar{y}' = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{bmatrix} = \bar{f}(x, \bar{y}).$$

Tiếp theo, ta chia nhỏ đoạn  $[a, b]$  bởi các điểm  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ , thông thường ta sẽ chia đều, tức là  $x_i = a + \frac{b-a}{m-1} \cdot (i-1)$ . Chọn một xấp xỉ ban

---

<sup>2</sup>Xem trong mục **7.3.4**, [6].

đầu  $s^0$  cho  $s$ . Lúc này  $s \in \mathbb{R}^{2m \times 1}$  và

$$(2.20) \quad s_{2i-1,1} = y(x_i), \quad s_{2i,1} = z(x_i), \quad (i = 1, \dots, m)$$

trong tất cả các lần bắn. Bởi các điều kiện biên trong (2.18) nên  $s_{1,1}^0 = \alpha$ ,  $s_{2m-1,1}^0 = \beta$ , các giá trị  $s_{i,1}^0$  còn lại chọn ngẫu nhiên (không quá xa các giá trị biên  $\alpha, \beta$ ).

Khi đã có ma trận  $s^0$  ban đầu, ta tiến hành giải  $m - 1$  bài toán giá trị ban đầu (2.19), (2.20) trên các đoạn  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$  và lập được ma trận cột  $F(s)$  theo công thức (1.20). Để tìm được  $s$  mới nhờ công thức Newton (1.21), ta cần tính thêm ma trận Jacobian ở (1.22) với các ma trận Jacobian  $A, B, G_k$  ( $k = 1, \dots, m - 1$ ) cho bởi công thức (1.23). Với bài toán biên cụ thể dạng (2.18) thì ta lập được các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận  $G_k$  ( $k = 1, \dots, m - 1$ ) là giá trị tại  $x_{k+1}$  của nghiệm các bài toán giá trị ban đầu trên các đoạn  $[x_k, x_{k+1}]$  sau:

$$(2.21) \quad G'_k(x) = J(x, \bar{y}) \cdot G_k(x), \quad G_k(x_k) = I, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

với  $J(x, \bar{y}) = \frac{\partial \bar{f}(x, \bar{y})}{\partial \bar{y}}$  là ma trận Jacobian của hàm  $\bar{f}$  trong (2.19), tức là

$$J(x, \bar{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Thật vậy, ta có

$$G_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial y}{\partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial z}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial z}{\partial s_{2i,1}} \end{bmatrix},$$

do đó

$$\begin{aligned} G'_i(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial s_{2i,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial z}{\partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial f}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial f}{\partial s_{2i,1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial y}{\partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial z}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial z}{\partial s_{2i,1}} \end{bmatrix} \\ &= J(x, \bar{y}) \cdot G_k(x); \end{aligned}$$

ngoài ra

$$G_i(x_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(x_i)}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial y(x_i)}{\partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial z(x_i)}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial z(x_i)}{\partial s_{2i,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_{2i-1,1}}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial s_{2i-1,1}}{\partial s_{2i,1}} \\ \frac{\partial s_{2i,1}}{\partial s_{2i-1,1}} & \frac{\partial s_{2i,1}}{\partial s_{2i,1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Do đó, các ma trận  $G_k$  hoàn toàn tính được nhờ phương pháp Runge-Kutta.

Thuật toán phương pháp bắn bội trong trường hợp này như sau:

## Thuật toán 2.2. Phương pháp bắn bội

1. Nhập giá trị ban đầu  $s^0$  và các điểm chia  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ .
2. Cho biến  $l$  chạy đến khi hội tụ (hoặc đến một giá trị cho trước), thực hiện
  - (a) Cho  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  lần lượt, giải các bài toán giá trị ban đầu

$$\bar{y}'_i(x; s^l_i) = \bar{f}(x, \bar{y}_i(x; s^l_i)), \quad \bar{y}_i(x_i; s^l_i) = s^l_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}];$$

$$G'_i(x) = J(x, \bar{y}_i) \cdot G_i(x), \quad G_i(x_i) = I, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Tính các giá trị  $\bar{y}_i(x_{i+1}; s^l_i)$ ,  $G_i(x_{i+1})$ .

(b) Lập các ma trận  $F(s)$  và  $DF(s)$ .

(c) Tìm ma trận  $s^{l+1}$  mới từ hệ tuyến tính  $s^{l+1} = s^l - [DF(s)]^{-1} \cdot F(s)$ .

(d) Tăng  $l$ , quay lại lặp từ (a).

3. Dừng.

### 2.2.2 Kĩ thuật chọn điểm chia

Như đã đề cập trong các mục trước, thông thường trong một phương pháp bắn bội, ta chia đoạn  $[a, b]$  thành các đoạn bằng nhau - tùy theo số điểm chia. Tuy nhiên, khi gặp những bài toán có nghiệm tăng giảm mạnh, không đều (trên  $[a, b]$ ) theo các hàm mũ thì vấn đề chọn điểm chia không còn theo ý muốn chủ quan của ta nữa. Việc chia đều như thường lệ có thể dẫn đến sự phân kỳ trong các phép lặp.

Khi gặp những trường hợp như vậy, ta có thể thực hiện theo cách sau.

Chọn một quỹ đạo ban đầu  $\eta(x)$ , tức là một hàm thỏa mãn các điều kiện biên

$$\eta(a) = \alpha, \quad \eta(b) = \beta.$$

Việc chọn các điểm chia  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  cho bài toán biên dạng (2.18) được tiến hành theo thuật toán như sau:

#### Thuật toán 2.3. Chọn điểm chia trong phương pháp bắn bội

1. Đặt  $x_1 := a$ . Chọn tham số  $\varepsilon$ .

2. Khi đã có điểm chia  $x_i$  ( $x_i < b$ ), giải bài toán giá trị ban đầu

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_i) = \eta(x_i), \quad y'(x_i) = \eta'(x_i)$$

trên đoạn  $[x_i, b]$ . Nếu tìm được giá trị  $x = \xi$  đầu tiên, sao cho

$$|y(\xi)| \geq \varepsilon \cdot |\eta(\xi)|$$

thì chuyển sang bước 3, nếu không tìm được thì chuyển sang bước 4.

3. Tăng  $i$ , đặt  $x_i := \xi$ . Quay lại lặp từ bước 2.

4. Tăng  $i$ , đặt  $x_i := b$ . Dừng.

Thuật toán trên dừng khi điểm chia cuối cùng được chọn là  $b$  và số các điểm chia (tính cả hai đầu biên  $a, b$ ) là  $m = i$ . Tham số  $\varepsilon$  trong thuật toán là hằng số chọn trước ( $\varepsilon > 1$ ), nhằm mục đích giới hạn sự gia tăng của nghiệm so với quỹ đạo  $\eta(x)$ . Thông thường ta chọn  $\varepsilon = 1.5$  hoặc  $\varepsilon = 2$ . Để hội tụ tốt hơn, ta chọn ma trận  $s^0$  ban đầu có các thành phần tương ứng là các giá trị tại các điểm chia  $x_k$  của  $\eta(x)$  và  $\eta'(x)$ .

**Nhận xét 2.2.** Với cách chọn điểm chia như trong Thuật toán 2.3 thì ta không biết trước được số điểm chia  $x_k$  (ở đây là  $i$  điểm). Do đó, có thể dẫn đến việc phải tính toán các ma trận  $s, F(s), DF(s)$  với số chiều rất lớn.

Ví dụ cụ thể cho cách chọn điểm chia này được trình bày trong Chương 3.

## Chương 3

# Thử nghiệm số

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả của các ví dụ cụ thể cho các phương pháp trong Chương 2. Các thuật toán được viết với Maple 13 và chạy trên máy tính với hệ điều hành Window 7 RMT, bộ xử lý Intel Core Duo T2450 (2.0GHz, 533MHz FSB, 2MB L2 cache), 1GB DDR2. Ngoài ra, chúng tôi luôn dùng kí hiệu  $\Delta y$  để chỉ sai số giữa nghiệm số tìm được và nghiệm chính xác tại giá trị biên  $b$  và việc tính toán trong Maple đều được thực hiện với 15 chữ số.

### 3.1 Phương pháp bắn đơn

#### 3.1.1 Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tuyến tính

BÀI TOÁN 3.1. Giải bài toán biên

$$y'' = -\frac{2}{x} \cdot y' + \frac{2}{x^2} \cdot y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 1.$$

Theo Định lí 1.3, bài toán biên tuyến tính này có nghiệm duy nhất. Máy tính

dễ dàng đưa ra nghiệm chính xác

$$y(x) = \left[ \frac{5}{14} + \frac{4}{35} \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right)^2 + \frac{12}{35} \cdot \sin \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) \right] \cdot x \\ + \left[ \frac{26}{35} - \frac{4}{35} \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right)^2 - \frac{12}{35} \cdot \sin \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) \right] \cdot \frac{1}{x^2} \\ - \frac{1}{5} \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln x \right)^2 - \frac{3}{5} \cdot \sin \left( \frac{1}{2} \cdot \ln x \right) \cdot \cos \left( \frac{1}{2} \cdot \ln x \right) + \frac{1}{10}.$$

Mã giải bài toán được trình bày chi tiết trong phần Phụ lục. Giá trị khuyến khích sử dụng cho  $s^{(0)}$  là  $\frac{\beta-\alpha}{b-a} = 0$ , tuy nhiên, trong chương trình, chúng tôi chọn hai giá trị  $dydx1 = s_1 = -10.$ ,  $dydx2 = s_2 = 1000$  (tức là khá xa giá trị trên) cho hai lần bắn đầu. Lần bắn thứ nhất tìm được  $\bar{y}(2) \approx -4.368\ 612\ 273\ 02981$ , lần thứ hai tìm được  $\bar{y}(2) \approx 584.798\ 054\ 393\ 566$ . Từ hai giá trị này, lặp theo công thức (2.5), ta tìm được

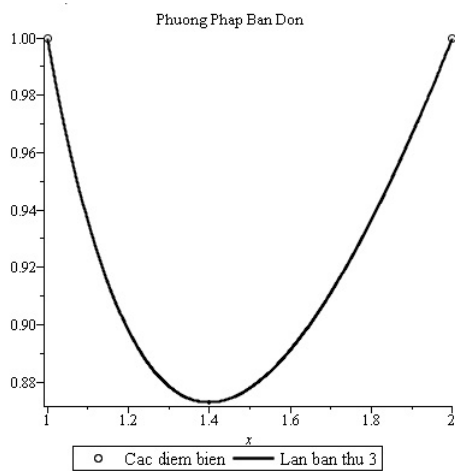
$$dydx3 = \bar{s} = -.796\ 664\ 67480.$$

Giá trị đúng của  $y'(1)$  khi giải bằng Maple là

$$y'(1) = -.796\ 664\ 67480\ 4881,$$

tức là sai số ở đây khoảng  $4.881 \times 10^{-12}$ . Kết quả của lần bắn thứ ba, cũng là nghiệm số của bài toán cùng sự so sánh với nghiệm chính xác thể hiện bởi bảng và hình vẽ sau đây:

| $x$ | $\bar{y}(x)$      | $y(x)$            | $ \bar{y}(x) - y(x) $    |
|-----|-------------------|-------------------|--------------------------|
| 1.  | 1.                | 1.                | 0.                       |
| 1.1 | 0.936312887619932 | 0.936312887619427 | $5.051 \times 10^{-13}$  |
| 1.2 | 0.898195951595713 | 0.898195951594798 | $9.159 \times 10^{-13}$  |
| 1.3 | 0.878648636269740 | 0.878648636268479 | $1.2608 \times 10^{-12}$ |
| 1.4 | 0.872991141202922 | 0.872991141201360 | $1.5626 \times 10^{-12}$ |
| 1.5 | 0.877984813827041 | 0.877984813825210 | $1.831 \times 10^{-12}$  |
| 1.6 | 0.891321032187032 | 0.891321032184951 | $2.081 \times 10^{-12}$  |
| 1.7 | 0.911311539591083 | 0.911311539588767 | $2.316 \times 10^{-12}$  |
| 1.8 | 0.936693949106570 | 0.936693949104028 | $2.542 \times 10^{-12}$  |
| 1.9 | 0.966505686499255 | 0.966505686496498 | $2.757 \times 10^{-12}$  |
| 2.  | 1.000000000000296 | 1.                | $2.960 \times 10^{-12}$  |



Hình 3.1: Nghiệm số của Bài toán 3.1.

### 3.1.2 Phương pháp bắn đơn giải bài toán biên tổng quát

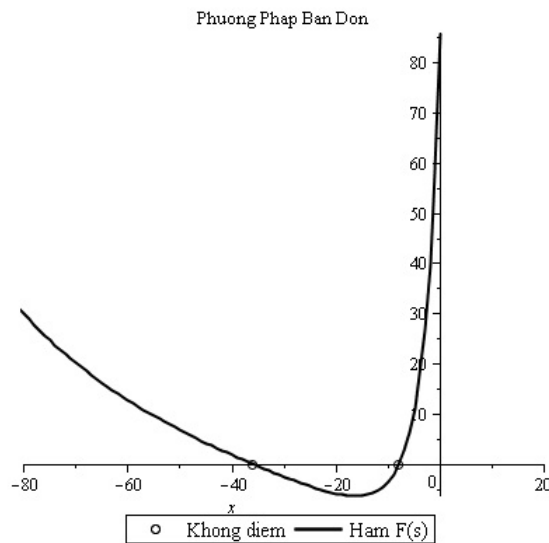
BÀI TOÁN 3.2. Giải bài toán biên

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot y^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

Bài toán giá trị ban đầu tương ứng là

$$(3.1) \quad y'' = \frac{3}{2} \cdot y^2, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = s.$$

Bằng một thuật toán đơn giản<sup>1</sup> ta có thể vẽ được (gần đúng) đồ thị hàm  $F(s) = y(1, s) - 1$  như sau:



Hình 3.2: Đồ thị hàm  $F(s) = y(1, s) - 1$ .

Dựa vào đồ thị hàm  $F(s)$  ta thấy hàm này có hai không điểm:  $\bar{s}_1$  nằm trong khoảng  $(-10, 0)$  và  $\bar{s}_2$  nằm trong khoảng  $(-40, -30)$ . Do đó, bài toán này có hai nghiệm và việc chọn giá trị  $s^{(0)}$  ban đầu cho phép lặp sẽ quyết định sự hội

<sup>1</sup>Cho  $s$  nhận các giá trị nguyên từ  $-100$  đến  $20$ , giải bài toán (3.1), tìm được  $F(s) = y(1, s) - 1$ .

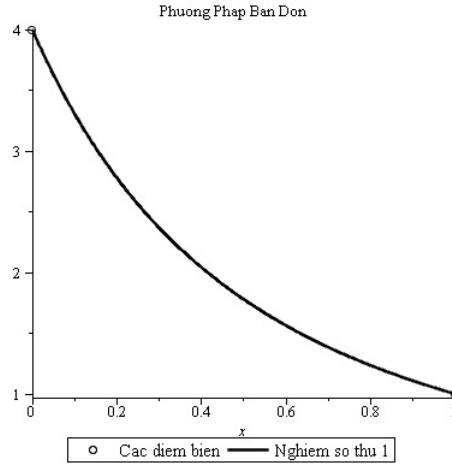
tụ của phương pháp cũng như nghiệm của bài toán. Giá trị được khuyến khích sử dụng là  $s^{(0)} = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = -1$  gần  $\bar{s}_1$  hơn, tất nhiên sẽ làm phương pháp hội tụ đến nghiệm ứng với  $\bar{s}_1$ . Chúng tôi đã thử (với các giá trị  $s^{(0)}$  nguyên) và thấy rằng khi  $s^{(0)}$  nhận các giá trị trong  $[-13, 8]$  và  $[-189, -17]$  thì phép lặp sẽ lần lượt đưa  $s$  tới giá trị  $\bar{s}_1$  và  $\bar{s}_2$  sau không quá 20 bước với sai số  $\Delta y \leq 10^{-9}$  (đối với nghiệm thứ nhất<sup>2</sup>), ngoài các giá trị trên thì phương pháp bắn đơn không hội tụ.

Mã giải bài toán được trình bày chi tiết trong phần Phụ lục. Nghiệm chính xác thứ nhất của bài toán là  $y(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ . Để thu được nghiệm số thứ nhất  $\bar{y}_1(x)$ , chúng tôi đã chọn giá trị  $dydx = s^{(0)} = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = -1$ , sau 14 bước lặp thu được giá trị  $dydx = -8.000\ 000\ 000\ 00429$  (giá trị đúng là  $\bar{s}_1 = -8$ .) với sai số  $\Delta y = 1. \times 10^{-14}$ . Kết quả như sau:

| $x$ | $\bar{y}_1(x)$    | $y(x)$           | $ \bar{y}_1(x) - y(x) $ |
|-----|-------------------|------------------|-------------------------|
| 0.  | 4.                | 4.               | 0.                      |
| 0.1 | 3.30578512396740  | 3.30578512396694 | $4.6 \times 10^{-13}$   |
| 0.2 | 22.77777777777837 | 2.77777777777778 | $5.9 \times 10^{-13}$   |
| 0.3 | 2.36686390532608  | 2.36686390532544 | $6.4 \times 10^{-13}$   |
| 0.4 | 2.04081632653115  | 2.04081632653061 | $5.4 \times 10^{-13}$   |
| 0.5 | 1.77777777777826  | 1.77777777777778 | $4.8 \times 10^{-13}$   |
| 0.6 | 1.56250000000037  | 1.56250000000000 | $3.7 \times 10^{-13}$   |
| 0.7 | 1.38408304498297  | 1.38408304498270 | $2.7 \times 10^{-13}$   |
| 0.8 | 1.23456790123476  | 1.23456790123457 | $1.9 \times 10^{-13}$   |
| 0.9 | 1.10803324099733  | 1.10803324099723 | $1.0 \times 10^{-13}$   |
| 1.  | 1.00000000000001  | 1.               | $1. \times 10^{-14}$    |

<sup>2</sup>Do điều kiện, chúng tôi chưa tìm được nghiệm chính xác thứ 2 để so sánh.

Nghiệm số được thể hiện bởi đồ thị: Nghiệm thứ hai tìm được với thuật toán



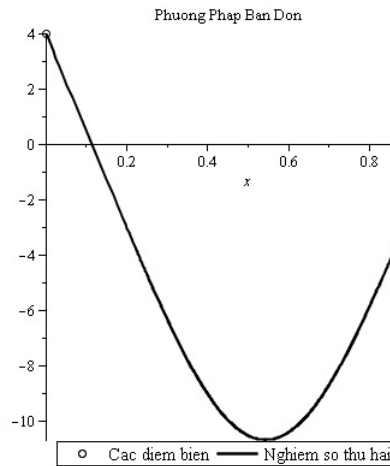
Hình 3.3: Nghiệm số thứ nhất với cách chọn  $dydx = -1$ .

tương tự khi chọn tham số  $dydx = -189$ , sau 12 bước lặp thu được  $dydx = -35.858\ 548\ 825\ 1651$  (giá trị đúng là  $\bar{s}_2 = -35.858\ 548\ 7278^3$ ) và nghiệm số với xấp xỉ  $\Delta y = 1.221 \times 10^{-11}$ , cụ thể như sau:

| $x$ | $\bar{y}_2(x)$    | $x$ | $\bar{y}_2(x)$    |
|-----|-------------------|-----|-------------------|
| 0.1 | 0.47890945888243  | 0.6 | -10.4101929312365 |
| 0.2 | -3.00811455179185 | 0.7 | -8.69758286532646 |
| 0.3 | -6.33099864039525 | 0.8 | -5.86089534467250 |
| 0.4 | -9.03857176759085 | 0.9 | -2.49161417087611 |
| 0.5 | -10.5362262087227 | 1.  | 1.00000000001221  |

Đồ thị của nghiệm số thứ hai được thể hiện trong Hình 3.4.

<sup>3</sup>Giá trị này chúng tôi tham khảo trong [6].



Hình 3.4: Nghiệm số thứ hai với cách chọn  $dydx = -189$ .

## 3.2 Phương pháp bắn bội

### 3.2.1 Phương pháp bắn bội giải bài toán biên tuyến tính

BÀI TOÁN 3.3. Giải bài toán biên

$$y'' = 100 \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad y(4) = 10.$$

Bài toán này đã được đề cập đến trong Nhận xét 2.1, trong khi phương pháp bắn đơn không hội tụ thì phương pháp bắn bội lại khả thi.

Với bài toán này và các điểm biên như trên thì chỉ cần chia  $[0, 4]$  thành hai đoạn

$$0 = x_1 < x_2 = 2 < x_3 = 4.$$

Chúng tôi đã thử giải bài toán với  $m$  lần lượt bằng 3, 5 và 11, tức là chia  $[0, 4]$  lần lượt thành 2 đoạn, 4 đoạn và 10 đoạn (đều nhau). Ma trận  $s^0$  ban đầu có các thành phần đều bằng 0 (ngoại trừ hai vị trí nhận giá trị là  $\alpha$  và  $\beta$  đã trình bày trong Chương 2). Với cả ba cách chia thì thuật toán đều hội tụ sau 3 bước lặp, thời gian tính toán lần lượt là 62.260, 62.275 và 19.734 giây, thu được các

ma trận  $F(s)$  tương ứng là

| $m = 3, \quad F(s) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ | $m = 5, \quad F(s) \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ | $m = 11, \quad F(s) \in \mathbb{R}^{22 \times 1}$ |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $[-2.06115362584580 \times 10^{-8}]$            | $[-1.0345512 \times 10^{-12}]$                   | $[-2.3 \times 10^{-15}]$                          |
| $[-2.06115362584589 \times 10^{-7}]$            | $[-8.594004 \times 10^{-12}]$                    | $[-2.4 \times 10^{-14}]$                          |
| $[-2. \times 10^{-13}]$                         | $[7.548485 \times 10^{-16}]$                     | $[-1.281 \times 10^{-15}]$                        |
| $[-2. \times 10^{-12}]$                         | $[-7.082534227036 \times 10^{-9}]$               | $[-1.283 \times 10^{-14}]$                        |
| $[0.]$                                          | $[-1.8 \times 10^{-17}]$                         | $[1.1699 \times 10^{-16}]$                        |
| $[5. \times 10^{-13}]$                          | $[-7.0785446 \times 10^{-10}]$                   | $[1.1718 \times 10^{-15}]$                        |
|                                                 | $[-1. \times 10^{-14}]$                          | $[2.38 \times 10^{-19}]$                          |
|                                                 | $[-7.2571 \times 10^{-9}]$                       | $[2.42 \times 10^{-18}]$                          |
|                                                 | $[0.]$                                           | $[4.49 \times 10^{-20}]$                          |
|                                                 | $[-1. \times 10^{-14}]$                          | $[4.49 \times 10^{-19}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-1.4 \times 10^{-19}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-1.4 \times 10^{-18}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-4.8 \times 10^{-18}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-4.7 \times 10^{-17}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-3.0 \times 10^{-16}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[-3.0 \times 10^{-15}]$                          |
|                                                 |                                                  | $[0.]$                                            |
|                                                 |                                                  | $[0.]$                                            |
|                                                 |                                                  | $[-1. \times 10^{-14}]$                           |
|                                                 |                                                  | $[3. \times 10^{-13}]$                            |
|                                                 |                                                  | $[0.]$                                            |
|                                                 |                                                  | $[-1. \times 10^{-14}]$                           |

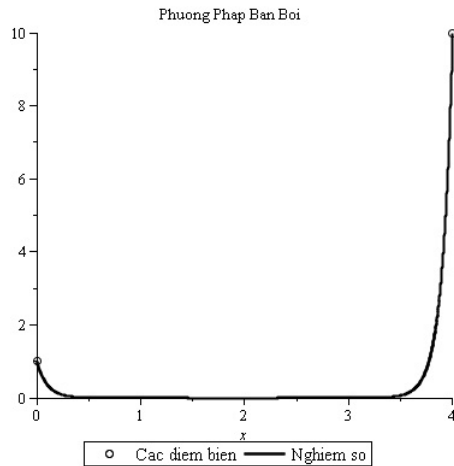
Trong phần Phụ lục, chúng tôi trình bày mã giải bài toán với cách chia  $[0, 4]$  thành 4 đoạn bằng nhau. Sai số của các nghiệm số thu được so với nghiệm chính xác (sau 3 bước lặp đối với cả 3 cách chia) được thể hiện bởi bảng sau:

| $x$ | $m = 3$                            | $m = 5$                            | $m = 11$                           |
|-----|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 0.  | 0.                                 | 0.                                 | 0.                                 |
| 0.2 | $2.2745 \times 10^{-11}$           | $2.27446860867208 \times 10^{-11}$ | $2.2745 \times 10^{-11}$           |
| 0.4 | $6.1545 \times 10^{-12}$           | $6.15448047716976 \times 10^{-12}$ | $6.1568 \times 10^{-12}$           |
| 0.6 | $1.23271 \times 10^{-12}$          | $1.23271091568458 \times 10^{-12}$ | $1.24966 \times 10^{-12}$          |
| 0.8 | $9.8877 \times 10^{-14}$           | $9.8877344509058 \times 10^{-14}$  | $2.25528 \times 10^{-13}$          |
| 1.  | $8.976102 \times 10^{-13}$         | $1.36941003115983 \times 10^{-13}$ | $3.81681 \times 10^{-14}$          |
| 1.2 | $6.90820413 \times 10^{-12}$       | $9.705495694021 \times 10^{-14}$   | $6.19626 \times 10^{-15}$          |
| 1.4 | $5.1089912001 \times 10^{-11}$     | $8.747103396334 \times 10^{-13}$   | $9.78449 \times 10^{-16}$          |
| 1.6 | $3.77513303120 \times 10^{-10}$    | $6.485621867910 \times 10^{-12}$   | $1.52063 \times 10^{-16}$          |
| 1.8 | $2.7894680698319 \times 10^{-9}$   | $4.792578456932 \times 10^{-11}$   | $2.81148 \times 10^{-17}$          |
| 2.  | $3.753654 \times 10^{-17}$         | $3.541275152328 \times 10^{-10}$   | $3.752514 \times 10^{-17}$         |
| 2.2 | $2.27082108 \times 10^{-16}$       | $4.7937375649 \times 10^{-11}$     | $2.27020108 \times 10^{-16}$       |
| 2.4 | $1.4881672090 \times 10^{-15}$     | $6.57224386 \times 10^{-12}$       | $1.4878272090 \times 10^{-15}$     |
| 2.6 | $9.62115193668 \times 10^{-15}$    | $1.51610842 \times 10^{-12}$       | $9.61867193668 \times 10^{-15}$    |
| 2.8 | $6.0935289305980 \times 10^{-14}$  | $4.8455193 \times 10^{-12}$        | $6.0922289305980 \times 10^{-14}$  |
| 3.  | $3.75218770311598 \times 10^{-13}$ | $3.5017138 \times 10^{-11}$        | $3.75116770311598 \times 10^{-13}$ |
| 3.2 | $2.21812583445091 \times 10^{-12}$ | $2.57186 \times 10^{-12}$          | $2.21758583445091 \times 10^{-12}$ |
| 3.4 | $1.22928860915685 \times 10^{-11}$ | $1.16428 \times 10^{-11}$          | $1.22912860915685 \times 10^{-11}$ |
| 3.6 | $6.05607680477170 \times 10^{-11}$ | $6.0462 \times 10^{-11}$           | $6.05447680477170 \times 10^{-11}$ |
| 3.8 | $2.23779968608672 \times 10^{-10}$ | $2.2369 \times 10^{-10}$           | $2.23689968608672 \times 10^{-10}$ |
| 4.  | $4.99995751645745 \times 10^{-13}$ | $1. \times 10^{-14}$               | $1.00042483542553 \times 10^{-14}$ |

Ta thấy rằng sai số thu được không hơn kém nhau nhiều, tức là nghiệm số với cách chia thành hai khoảng cũng đã đủ tốt. Nghiệm số thu được (ứng với trường hợp chia 2 đoạn) được vẽ trong Hình 3.5.

### 3.2.2 Chọn điểm chia trong phương pháp bắn bội

Để minh họa cho phần này, ta tìm các điểm chia cho bài toán sau:



Hình 3.5: Nghiệm số của Bài toán 3.3 khi  $m = 3$ .

#### BÀI TOÁN 3.4. Giải bài toán biên

$$y'' = 5 \cdot \sinh 5y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

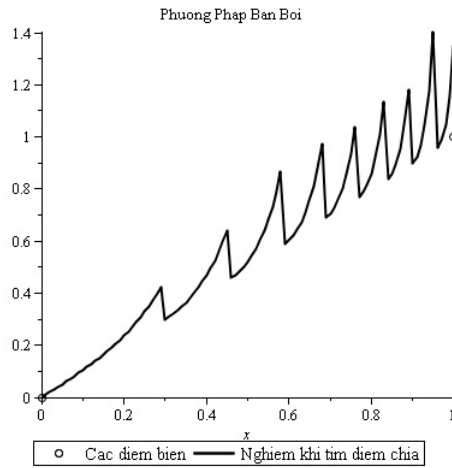
Một quỹ đạo ban đầu rất đơn giản mà ta có thể chọn là  $\eta(x) := x$  (dễ thấy  $\eta(0) = 0$  và  $\eta(1) = 1$ ). Quá trình lặp tìm các điểm chia được thực hiện theo Thuật toán 2.3 với tham số  $\varepsilon = 1.5$ . Kết quả thu được số điểm chia  $m = 10$ , bao gồm các điểm

$$0., \quad 0.30, \quad 0.46, \quad 0.59, \quad 0.69, \quad 0.77, \quad 0.84, \quad 0.90, \quad 0.96, \quad 1..$$

Đồ thị của  $y(x)$  khi thực hiện thuật toán được thể hiện trong Hình 3.6.

Như vậy, với 10 điểm chia như trên thì ta cần chia  $[0, 1]$  thành 9 đoạn nhỏ. Tuy nhiên, ta có thể chọn một quỹ đạo ban đầu thuận lợi hơn, đó là nghiệm của bài toán biên tuyến tính hóa tương ứng

$$y'' = 5 \cdot 5y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$



Hình 3.6: Tìm điểm chia với  $\eta(x) = x$ ,  $\varepsilon = 1.5$ .

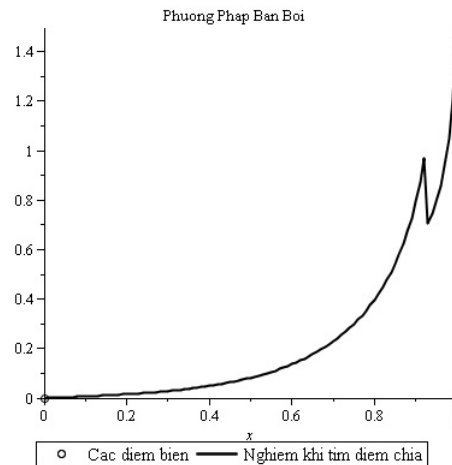
tức là chọn quỹ đạo

$$\eta(x) := \frac{\sinh 5x}{\sinh 5}.$$

Khi đó, thực hiện theo Thuật toán 2.3 với tham số  $\varepsilon = 1.5$  ta thu được 4 điểm chia

$$0., \quad 0.01, \quad 0.93, \quad 1.,$$

với đồ thị như sau



Hình 3.7: Tìm điểm chia với  $\eta(x) = \frac{\sinh 5x}{\sinh 5}$ ,  $\varepsilon = 1.5$ .

Vậy ta chỉ cần chia  $[0, 1]$  thành 3 đoạn tương ứng. Mã chương trình chọn điểm chia được trình bày cụ thể trong phần Phụ lục cho trường hợp  $\eta(x) = x$ ,  $\varepsilon = 1.5$ .

### 3.2.3 Phương pháp bắn bội giải bài toán biên phi tuyến

Ở mục này, chúng tôi trình bày các kết quả khi giải Bài toán 3.4:

$$y'' = 5 \cdot \sinh 5y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Như đã trình bày trong Chương 2, ta gặp khó khăn khi giải bài toán này bằng phương pháp bắn đơn do gặp các điểm kì dị khi chọn tham số ban đầu không thích hợp. Chúng tôi đã thử với các tham số ban đầu khác nhau và thấy rằng phương pháp bắn đơn vẫn khả thi với cách chọn

$$0.0273 \leq dydx \leq 0.0555,$$

(chú ý rằng  $dydx$  là tham số ban đầu cho  $y'(0)$  và chúng tôi chỉ thử đến 4 chữ số thập phân), ngoài đoạn trên thì phương pháp bắn đơn phân kì.

Phương pháp bắn bội được tiến hành với cả hai cách chọn điểm chia như đã trình bày ở mục trước. Ma trận  $s^0$  ban đầu nhận các giá trị cho bởi các hàm  $\eta(x)$  và  $\eta'(x)$  tại các điểm  $x_k$  tương ứng. Lưu ý rằng, các hàm  $\eta(x)$  trong hai trường hợp là khác nhau. Kết quả sơ bộ như sau:

- Với phương pháp bắn đơn, chúng tôi chọn tham số ban đầu  $dx dy = 0.0555$ , sau 20 phép lặp thu được sai số  $\Delta y = 1. \times 10^{-14}$ . Thời gian tính toán là 2.590 giây.

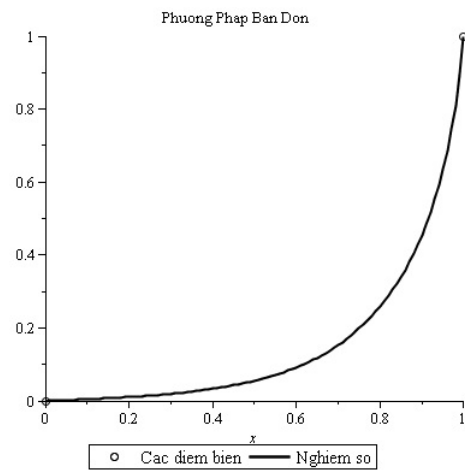
- Với phương pháp bắn bội khi  $m = 10$ , sau 9 lần lặp với thời gian 55.459 giây, thu được sai số  $\Delta y = 1. \times 10^{-15}$ .
- Với phương pháp bắn bội khi  $m = 4$ , sau 9 lần lặp với thời gian 124.255 giây, thu được sai số  $\Delta y = 0$ .

Kết quả cụ thể của cả 3 trường hợp, cũng như đồ thị của nghiệm số được thể hiện bởi bảng và hình dưới.<sup>4</sup>

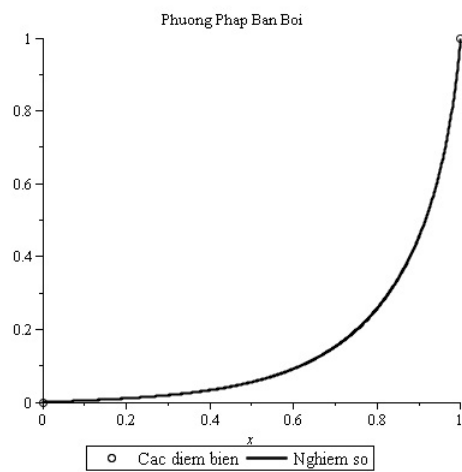
| $x$ | PP bắn đơn với<br>$dydx = 0.0555$ | PP bắn bội với<br>$m = 10$ | PP bắn bội với<br>$m = 4$    |
|-----|-----------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 0.  | 0.                                | 0.                         | $-1.0423518 \times 10^{-26}$ |
| 0.1 | 0.0047681444029047                | 0.0047680693588778         | 0.0047680754650201           |
| 0.2 | 0.0107535620203101                | 0.0107533928862528         | 0.0107534066579327           |
| 0.3 | 0.0194855622849382                | 0.0194852560869635         | 0.0194852810460201           |
| 0.4 | 0.0332009698298467                | 0.0332004489367797         | 0.0332004910264379           |
| 0.5 | 0.0554381960244252                | 0.554373274986313          | 0.554373963204647            |
| 0.6 | 0.0920457049193030                | 0.0920442618892492         | 0.0920443723803809           |
| 0.7 | 0.153163639469341                 | 0.153161226918596          | 0.153161393186859            |
| 0.8 | 0.258220428541319                 | 0.258216276280155          | 0.258216487705740            |
| 0.9 | 0.455067867731265                 | 0.455059828892592          | 0.455060028158277            |
| 1.  | 1.000000000000001                 | 0.999999999999999          | 1.                           |

---

<sup>4</sup>Chúng tôi không tìm được nghiệm chính xác của bài toán biên phi tuyến này để so sánh. Ngay cả Maple 13 cũng chưa giải được.



Hình 3.8: Nghiệm của Bài toán 3.4 với PP bán đơn.



Hình 3.9: Nghiệm của Bài toán 3.4 với PP bán bội khi  $m = 10$ .

# Kết luận

Quá trình nghiên cứu đề tài chúng tôi đã thu được các kết quả nhất định. Cụ thể, chúng tôi đã đưa ra được cái nhìn khái quát về bài toán biên cũng như các phương pháp giải bài toán biên, tập chung vào các phương pháp bắn: phương pháp bắn đơn và phương pháp bắn bội. Với hai phương pháp này, chúng tôi đã nêu lên được thuật toán, cũng như xây dựng thành công các thuật toán và chương trình giải một số bài toán biên cụ thể trong môi trường Maple.

Chúng tôi tin rằng những kết quả nghiên cứu của luận văn là một tài liệu tham khảo bổ ích cho sinh viên, học viên - những ai tìm hiểu về bài toán biên. Do điều kiện về thời gian cũng như sự hiểu biết của tác giả còn có hạn, nên luận văn còn nhiều hạn chế. Tác giả mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp, nhận xét, phê bình của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và những người quan tâm để bổ sung hoàn thiện đề tài cũng như nhận thức của tác giả.

# Tài liệu tham khảo

- [1] Uri M. Ascher and Linda R. Petzold, *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*, SIAM, 1998.
- [2] Burden R.L. and Faires J.D., *Numerical analysis*, Brooks Cole, seventh edition, 2001.
- [3] K.L. Chow and W.H. Enright, *Distributed parallel shooting for boundary value ordinary differential equations*, Department of Computer Science, University of Toronto.
- [4] Raymond Holsapple, Ram Venkararaman and David Doman, *A modified simple shooting method for solving two-point boundary-value problems*, Proceedings of the IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, March 2003.
- [5] Herbert B. Keller, *Numerical methods for two-point boundary value problems*, Blaisdell, 1968.
- [6] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New York, third edition, January 2002.

## Phụ lục:

# Mã giải các ví dụ trong luận văn

## Phương pháp bắn đơn tuyến tính

Mã giải Bài toán 3.1 như sau:

```
1 > restart;
  > /* Tinh toan voi 15 chu so */
    Digits:=15:
4 > /* Giai bai toan bang Maple 13 boi lenh dsolve */
    ode:=diff(g(x),x,x)=-2/x*(diff(g(x),x))+2/x^2*g(x)
      +sin(ln(x))/x^2:
7    bcs:=g(1)=1,g(2)=1:
    exact:=unapply(rhs(dsolve({bcs,ode})),x);
    dexact:=unapply(diff(exact(x),x),x):
10  /* Tinh gia tri cua dao ham nghiem chinh xac
      tai bien a */
    evalf(dexact(1));
13 > /* Cac dieu kien bien */
    a:=1.: alpha:=1.:
    b:=2.: beta:=1.:
16 > /* Cac xap xi cho y'(1) trong 2 lan ban dau */
    dydx1:=-10: dydx2:=1000:
  > /* Cac ham f1,f2 la cac thanh phan cua f(x,y,y') */
19  f1:=(x,y,z)->z:
```

```

f2:=(x,y,z)->-2/x*z+2/x^2*y+sin(ln(x))/x^2:
> /* Buoc nhay trong thuat toan Runge Kutta */
22   h:=0.001:
      ii:=round((b-a)/h):
> x1[0]:=a: y1[0]:=alpha: z1[0]:=dydx1:
25
> /* Giai bai toan GTBD bang PP Runge Kutta */
for i from 0 to ii-1 do
28   x1[i+1]:=x1[i]+h;
      k1y:=f1(x1[i], y1[i], z1[i]);
      k1z:=f2(x1[i], y1[i], z1[i]);
31   k2y:=f1(x1[i]+(1/2)*h, y1[i]+(1/2)*k1y*h, z1[i]+(1/2)*k1z*h);
      k2z:=f2(x1[i]+(1/2)*h, y1[i]+(1/2)*k1y*h, z1[i]+(1/2)*k1z*h);
      k3y:=f1(x1[i]+(1/2)*h, y1[i]+(1/2)*k2y*h, z1[i]+(1/2)*k2z*h);
34   k3z:=f2(x1[i]+(1/2)*h, y1[i]+(1/2)*k2y*h, z1[i]+(1/2)*k2z*h);
      k4y:=f1(x1[i]+h, y1[i]+k3y*h, z1[i]+k3z*h);
      k4z:=f2(x1[i]+h, y1[i]+k3y*h, z1[i]+k3z*h);
37
      y1[i+1]:=y1[i]+(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
      z1[i+1]:=z1[i]+(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h;
40 end do:
> /* Tap hop so lieu thu duoc */
      data1:=[[a, alpha], [b, beta]]:
43   data2:=[seq([x1[i], y1[i]], i = 0..ii)]:
> /* The hien lan ban thu nhat tren do thi */
plot([data1, data2], x=a..b, color=[BLACK, GREEN],
46 style=[POINT, LINE], thickness=2, symbolsize=15,
      symbol=CIRCLE, legend=["Cac diem bien", "Lan ban thu 1"],
      title="Phuong Phap Ban Don");
49
/* Lan ban thu 2 */
> x2[0]:=a: y2[0]:=alpha: z2[0]:=dydx2:
52 > for i from 0 to ii-1 do
      x2[i+1]:=x2[i]+h;

```

```

k1y:=f1 ( x2 [ i ] , y2 [ i ] , z2 [ i ] );
55 k1z:=f2 ( x2 [ i ] , y2 [ i ] , z2 [ i ] );
k2y:=f1 ( x2 [ i ] +(1/2)*h, y2 [ i ] +(1/2)*k1y*h, z2 [ i ] +(1/2)*k1z*h );
k2z:=f2 ( x2 [ i ] +(1/2)*h, y2 [ i ] +(1/2)*k1y*h, z2 [ i ] +(1/2)*k1z*h );
58 k3y:=f1 ( x2 [ i ] +(1/2)*h, y2 [ i ] +(1/2)*k2y*h, z2 [ i ] +(1/2)*k2z*h );
k3z:=f2 ( x2 [ i ] +(1/2)*h, y2 [ i ] +(1/2)*k2y*h, z2 [ i ] +(1/2)*k2z*h );
k4y:=f1 ( x2 [ i ] +h, y2 [ i ] +k3y*h, z2 [ i ] +k3z*h );
61 k4z:=f2 ( x2 [ i ] +h, y2 [ i ] +k3y*h, z2 [ i ] +k3z*h );

y2 [ i +1 ]:=y2 [ i ] +(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
64 z2 [ i +1 ]:=z2 [ i ] +(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h

end do;

> /* Tap hop so lieu thu duoc */
67 data3:=[seq ( [ x2 [ i ] , y2 [ i ] ] , i=0..ii )];
> /* The hien 2 lan ban */
plot ( [ data1 , data2 , data3 ] , x=a..b ,
70 color=[BLACK, GREEN, YELLOW] ,
style=[POINT, LINE, LINE] ,
thickness=2, symbolsize=15, symbol=CIRCLE,
73 legend=["Cac_diem_bien" , "Lan_ban_thu_1" , "Lan_ban_thu_2" ] ,
title="Phuong_Phap_Ban_Don" );

76 > /* Lap y'(1) cho lan ban thu 3 */
dydx3:=(dydx1-dydx2)*(beta-y2 [ ii ])/(y1 [ ii ]-y2 [ ii ])
+dydx2;
79
/* Lan ban thu 3 */
> x3[0]:=a: y3[0]:=alpha: z3[0]:=dydx3:
82 > for i from 0 to ii-1 do
x3 [ i +1 ]:=x3 [ i ] +h;
k1y:=f1 ( x3 [ i ] , y3 [ i ] , z3 [ i ] );
85 k1z:=f2 ( x3 [ i ] , y3 [ i ] , z3 [ i ] );
k2y:=f1 ( x3 [ i ] +(1/2)*h, y3 [ i ] +(1/2)*k1y*h, z3 [ i ] +(1/2)*k1z*h );
k2z:=f2 ( x3 [ i ] +(1/2)*h, y3 [ i ] +(1/2)*k1y*h, z3 [ i ] +(1/2)*k1z*h );

```

```

88      k3y:=f1(x3[i]+(1/2)*h,y3[i]+(1/2)*k2y*h,z3[i]+(1/2)*k2z*h);
      k3z:=f2(x3[i]+(1/2)*h,y3[i]+(1/2)*k2y*h,z3[i]+(1/2)*k2z*h);
      k4y:=f1(x3[i]+h,y3[i]+k3y*h,z3[i]+k3z*h);
91      k4z:=f2(x3[i]+h,y3[i]+k3y*h,z3[i]+k3z*h);

      y3[i+1]:=y3[i]+(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
94      z3[i+1]:=z3[i]+(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h;
      end do;

97 > /* Tap hop so lieu thu duoc */
      data4:=[seq([x3[i],y3[i]],i=0..ii)];
      > /* The hien ca 3 lan ban */
100 plot([data1,data2,data3,data4],x=a..b,
      color=[BLACK,GREEN,YELLOW,RED],
      style=[POINT,LINE,LINE,LINE],
103 thickness=2,symbolsize=15,symbol=CIRCLE,
      legend=["Cac_diem_bien","Lan_ban_thu_1",
      "Lan_ban_thu_2","Lan_ban_thu_3"],
106 title="Phuong_Phap_Ban_Don");

      /* So sanh ket qua thu duoc voi nghiem chinh xac */
109 > for i from 0 by 100 to ii do
      print(x3[i],evalf(y3[i]),evalf(exact(x3[i]),
      evalf(abs(exact(x3[i])-y3[i])))):
112      end do;

```

## Phương pháp bắn đơn tổng quát

Mã giải Bài toán 3.2 như sau:

```

> restart;
2 > /* Tinh toan voi 15 chu so */
      Digits:=15:
      > /* Tim nghiem chinh xac bang lenh dsolve */

```

```

5   ode:=diff(q(x),x,x)=(3/2)*q(x)^2:
    bcs:=q(0)=4,q(1)=1:
    g:=unapply(rhs(dsolve({bcs,ode})),x):
8   dg:=unapply(diff(g(x),x),x):
    > /* Cac gia tri bien */
    a:=0: alpha:=4:
11   b:=1: beta:=1:
    > /* Lap ham f(x,y) gom 2 thanh phan f1,f2 */
    f1:=(x,y,z)->z:
14   f2:=(x,y,z)->(3/2)*y^2:
    > /* Lap ham tinh w, chu y: f_y*w+f_y'*w'=3*y*w */
    f3:=(x,yi,w,u)->u:
17   f4:=(x,yi,w,u)->3*yi*w:
    > /* Buoc nhay trong PP Runge Kutta */
    h:=0.001:
20   ii:=round((b-a)/h): /* Chu y: ii=1000 */
    > /* Xap xi ban dau cho y'(a) */
    dydx:=(beta-alpha)/(b-a):
23 > /* Bien k dem so lan lap */
    k:=0:
    epsilon:=1:
26 > /* Bat dau vong lap tim dydx */
    /* Phep lap se dung khi sai so epsilon dat 10^(-15) hoac
       so buoc lap k dat 20 */
29 while epsilon>10^(-15) and k<20 do
    x[0]:=a: y[0]:=alpha: z[0]:=dydx:
    w[0]:=0: u[0]:=1:
32 for i from 0 to ii-1 do
    x[i+1]:=x[i]+h:
    k1y:=f1(x[i],y[i],z[i]):
    k1z:=f2(x[i],y[i],z[i]):
35    k2y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h):
    k2z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h):
38    k3y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h):

```

```

k3z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h);
k4y:=f1(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
41 k4z:=f2(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
y[i+1]:=y[i]+(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
z[i+1]:=z[i]+(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h;
44
k1w:=f3(x[i],y[i],w[i],u[i]);
k1u:=f4(x[i],y[i],w[i],u[i]);
47 k2w:=f3(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k1w*h,u[i]+(1/2)*k1u*h);
k2u:=f4(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k1w*h,u[i]+(1/2)*k1u*h);
k3w:=f3(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k2w*h,u[i]+(1/2)*k2u*h);
50 k3u:=f4(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k2w*h,u[i]+(1/2)*k2u*h);
k4w:=f3(x[i]+h,y[i],w[i]+k3w*h,u[i]+k3u*h);
k4u:=f4(x[i]+h,y[i],w[i]+k3w*h,u[i]+k3u*h);
53 w[i+1]:=w[i]+(1/6*(k1w+2*k2w+2*k3w+k4w))*h;
u[i+1]:=u[i]+(1/6*(k1u+2*k2u+2*k3u+k4u))*h;
end do;
56 /* Tinh sai so epsilon va lap dydx moi bang
Phuong phap lap Newton */
epsilon:=|y[ii]-beta|;
59 dydx:=dydx-(y[ii]-beta)/w[ii];
k:=k+1:
end do: /* Ket thuc vong lap, da tim duoc dydx dung */
62 > /* Tap hop so lieu thu duoc */
data1:=[a,alpha],[b,beta];
data2:=seq([x[i],y[i]],i=0..ii);
65 > /* The hien nghiem so thu nhat tren do thi */
plot([data1,data2],x=a..b,color=[BLACK,GREEN],
style=[POINT,LINE],thickness=2,symbolsize=15,symbol=CIRCLE,
68 legend=["Cac_diem_bien","Nghiem_so_thu_nhat"],
title="Phuong_Phap_Ban_Don");
> /* Lap bang so sanh */
71 for i from 0 by 100 to ii do
print(x[i],evalf(y[i]),evalf(g(x[i])),

```

```

evalf(abs(y[i]-g(x[i]))):
74 end do;

```

## Phương pháp bắn bội

Mã giải Bài toán 3.3 như sau:

```

1 > restart;
  > /* Tinh toan voi 15 chu so */
    Digits:=15:
4 > /* Tim nghiem chinh xac bang lenh dsolve */
    ode:=diff(r(x),x,x)=100*r(x):
    bcs:=r(0)=1,r(4)=10:
7    exact:=unapply(rhs(dsolve({bcs,ode})),x):
  > /* Dat ham tinh thoi gian chay */
    tg:=time();
10 > /* Cac dieu kien bien */
    a:= 0.:alpha:=1.:b:=4.:beta:=10.:
  > /* Lap cac ma tran */
13    A:=Matrix([ [1,0],[0,0]]):
    B:=Matrix([ [0,0],[1,0]]):
    K:=Matrix([ [-1,0],[0,-1]]):
16    L:=Matrix([ [0,0],[0,0]]):
    DF:=Matrix(10):
    /* Ma tran F ban dau co cac phan tu deu bang 1 */
19    F:=Matrix(10,1,fill=1):
    s:=Matrix(10,1):
    s(1,1):=alpha: s(9,1):=beta:
22 > /* Cac diem chia */
    t[1]:=0.:t[2]:=1.:t[3]:=2.:t[4]:=3.:t[5]:=4.:
  > /* Buoc nhay trong PP Runge Kutta */
25    h := 0.001:
  > /* Lap cac ham cua y va w */
    f1:=(x,y,z)->z:

```

```

28      f2:=(x,y,z)->100*y:
      f3:=(x,yi,w,u)->u:
      f4:=(x,yi,w,u)->100*w:
31 > /* Dem so buoc lap */
      l := 0:
      > /* Bat dau vong lap */
34 while l < 3 do
      for j from 1 to 4 do
        k[j]:=0;
37      epsilon:=1;
      dydx[j]:=s(2*j,1);
      while epsilon>10^(-15) and k[j]<20 do
40        ii:=round((t[j]-t[1])/h);
        x[ii]:=t[j]; y[ii]:=s(2*j-1,1); z[ii]:=dydx[j];
        w[ii]:=0; u[ii]:=1;
43        for i from round((t[j]-t[1])/h) to
          round((t[j+1]-t[1])/h)-1 do
            x[i+1]:=x[i]+h;
46            k1y:=f1(x[i],y[i],z[i]);
            k1z:=f2(x[i],y[i],z[i]);
            k2y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h);
            k2z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h);
49            k3y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h);
            k3z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h);
            k4y:=f1(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
52            k4z:=f2(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
            y[i+1]:=y[i]+(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
55            z[i+1]:=z[i]+(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h;

            k1w:=f3(x[i],y[i],w[i],u[i]);
            k1u:=f4(x[i],y[i],w[i],u[i]);
58            k2w:=f3(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k1w*h,
              u[i]+(1/2)*k1u*h);
            k2u:=f4(x[i]+(1/2)*h,y[i],w[i]+(1/2)*k1w*h,
61              u[i]+(1/2)*k1u*h);

```

```

        u[i] + (1/2)*k1u*h);
        k3w:=f3(x[i] + (1/2)*h, y[i], w[i] + (1/2)*k2w*h,
64         u[i] + (1/2)*k2u*h);
        k3u:=f4(x[i] + (1/2)*h, y[i], w[i] + (1/2)*k2w*h,
        u[i] + (1/2)*k2u*h);
67         k4w:=f3(x[i] + h, y[i], w[i] + k3w*h, u[i] + k3u*h);
        k4u:=f4(x[i] + h, y[i], w[i] + k3w*h, u[i] + k3u*h);
        w[i+1]:=w[i] + (1/6*(k1w+2*k2w+2*k3w+k4w))*h;
70         u[i+1]:=u[i] + (1/6*(k1u+2*k2u+2*k3u+k4u))*h;
    end do: /* Ket thuc vong lap FOR doi voi bien i */

73     jj:=round((t[j+1]-t[1])/h);
    epsilon:=abs(y[jj]-s(2*j+1,1));
    dydx[j]:=dydx[j]-(y[jj]-s(2*j+1,1))/w[jj];
76     k[j]:=k[j]+1:
    end do: /* Ket thuc vong lap WHILE */
    /* Lap ham F */
79     F(2*j-1,1):=y[jj]-s(2*j+1,1);
    F(2*j,1):=z[jj]-s(2*j+2,1);
    F(9,1):=y[0]-alpha;
82     F(10,1):=y[jj]-beta;
    /* Gan lai cac gia tri cho ma tran s */
    s(2*j,1):=dydx[j]:
85     /* Tim cac ma tran G[k] nho PP Runge Kutta */
    g1:=(x,a,b,c,d)->c:
    g2:=(x,a,b,c,d)->d:
88     g3:=(x,a,b,c,d)->100*a:
    g4:=(x,a,b,c,d)->100*b:
    iii:=round(t[j]/h);
91     x[iii]:=t[j]:a[iii]:=1:b[iii]:=0:c[iii]:=0:d[iii]:=1;

    for i from round((t[j]-t[1])/h) to
94     round((t[j+1]-t[1])/h)-1 do
        x[i+1]:=x[i]+h;

```

```

k1a:=g1(x[i],a[i],b[i],c[i],d[i]);
97 k1b:=g2(x[i],a[i],b[i],c[i],d[i]);
k1c:=g3(x[i],a[i],b[i],c[i],d[i]);
k1d:=g4(x[i],a[i],b[i],c[i],d[i]);
100 k2a:=g1(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k1a*h,b[i]+
      (1/2)*k1b*h,c[i]+(1/2)*k1c*h,d[i]+(1/2)*k1d*h);
k2b:=g2(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k1a*h,b[i]+
103 (1/2)*k1b*h,c[i]+(1/2)*k1c*h,d[i]+(1/2)*k1d*h);
k2c:=g3(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k1a*h,b[i]+
      (1/2)*k1b*h,c[i]+(1/2)*k1c*h,d[i]+(1/2)*k1d*h);
106 k2d:=g4(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k1a*h,b[i]+
      (1/2)*k1b*h,c[i]+(1/2)*k1c*h,d[i]+(1/2)*k1d*h);
k3a:=g1(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k2a*h,b[i]+
109 (1/2)*k2b*h,c[i]+(1/2)*k2c*h,d[i]+(1/2)*k2d*h);
k3b:=g2(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k2a*h,b[i]+
      (1/2)*k2b*h,c[i]+(1/2)*k2c*h,d[i]+(1/2)*k2d*h);
112 k3c:=g3(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k2a*h,b[i]+
      (1/2)*k2b*h,c[i]+(1/2)*k2c*h,d[i]+(1/2)*k2d*h);
k3d:=g4(x[i]+(1/2)*h,a[i]+(1/2)*k2a*h,b[i]+
115 (1/2)*k2b*h,c[i]+(1/2)*k2c*h,d[i]+(1/2)*k2d*h);
k4a:=g1(x[i]+h,a[i]+k3a*h,b[i]+k3b*h,
      c[i]+k3c*h,d[i]+k3d*h);
118 k4b:=g2(x[i]+h,a[i]+k3a*h,b[i]+k3b*h,
      c[i]+k3c*h,d[i]+k3d*h);
k4c:=g3(x[i]+h,a[i]+k3a*h,b[i]+k3b*h,
121 c[i]+k3c*h,d[i]+k3d*h);
k4d:=g4(x[i]+h,a[i]+k3a*h,b[i]+k3b*h,
      c[i]+k3c*h,d[i]+k3d*h);
124 a[i+1]:=a[i]+(1/6*(k1a+2*k2a+2*k3a+k4a))*h;
b[i+1]:=b[i]+(1/6*(k1b+2*k2b+2*k3b+k4b))*h;
c[i+1]:=c[i]+(1/6*(k1c+2*k2c+2*k3c+k4c))*h;
127 d[i+1]:=d[i]+(1/6*(k1d+2*k2d+2*k3d+k4d))*h;
end do: /* Ket thuc vong lap FOR doi voi bien i */

```

```

130      jjj:=round((t[j+1]-t[1])/h);
      G[j]:=Matrix([[a[jjj],b[jjj]],[c[jjj],d[jjj]]]):
      end do: /* Ket thuc vong lap FOR doi voi bien j */
133 /* Lap ma tran DF */
      DF:=Matrix([[G[1],K,L,L,L],[L,G[2],K,L,L],
      [L,L,G[3],K,L],[L,L,L,G[4],K],[A,L,L,L,B]]);
136 /* Lap theo cong thuc Newton tim s moi */
      s:=s-(DF)^(-1).F:
      /* Gan lai gia tri cho s */
139 s(9,1):=beta;
      l:=l+1
      end do: /* Ket thuc vong lap WHILE doi voi bien l */
142 > /* Xem cac ket qua thu duoc */
      DF;
      s,F;
145 > /* Xem thoi gian chay */
      time()-tg;
      > /* Tao ket qua va so sanh voi nghiem chinh xac */
148 for i from 0 by 200 to 4000 do
      print(x[i],evalf(y[i]),evalf(abs(y[i]-exact(x[i])))):
      end do;
151 > /* Tap hop so lieu thu duoc */
      data1:=[[0,1],[4,10]];
      data2:=seq([x[50*i],y[50*i]],i=0..80);
154 > /* Ve nghiem so thu duoc tren do thi */
      plot([data1,data2],x=0..4,color=[BLACK,RED],
      style=[POINT,LINE],thickness=2,symbolsize=15,
157 symbol=CIRCLE,legend=["Cac_diem_bien","Nghiem_so"],
      title="Phuong_Phap_Ban_Boi");

```

## Kỹ thuật chọn điểm chia

Mã chương trình chọn điểm chia cho Bài toán 3.4 như sau:

```

1  > restart;
   > /* Cac diem bien */
      a:=0.: alpha:=0.:
4    b:=1.: beta:=1.:
   > /* Lap cac ham f */
      f1:=(x,y,z)->z:
7    f2:=(x,y,z)->5*sinh(5*y):
   > /* Buoc nhay khi chon diem */
      h := 0.01:
10 > /* Qui dao ban dau */
      eta:=x->x:
      deta:=unapply( diff( eta(x),x),x):
13 > /* Cac tham so ban dau */
      x[0]:=a:y[0]:=alpha:z[0]:=(beta-alpha)/(b-a):
      k:=0:
16  epsilon:=1.5:
      i:=0:
      j:=0:
19  t[j]:=a:
   > /* Lap tim cac diem chia */
      while i*h < b do
22    x[i+1]:=x[i]+h;
      k1y:=f1(x[i],y[i],z[i]);
      k1z:=f2(x[i],y[i],z[i]);
25    k2y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h);
      k2z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k1y*h,z[i]+(1/2)*k1z*h);
      k3y:=f1(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h);
28    k3z:=f2(x[i]+(1/2)*h,y[i]+(1/2)*k2y*h,z[i]+(1/2)*k2z*h);
      k4y:=f1(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
      k4z:=f2(x[i]+h,y[i]+k3y*h,z[i]+k3z*h);
31    y[i+1]:=y[i]+(1/6*(k1y+2*k2y+2*k3y+k4y))*h;
      z[i+1]:=z[i]+(1/6*(k1z+2*k2z+2*k3z+k4z))*h;

34    if abs(y[i+1]) >= epsilon*abs(eta(x[i+1])) then

```

```

        j:=j+1;
        t[j]:=x[i+1];
37      y[i+1]:=eta(x[i+1]);
        z[i+1]:=deta(x[i+1]);

    end if:
40      i:=i+1;

    end do: /* Ket thuc qua trinh lap */
    t[j+1]:=b: /* Diem chia cuoi cung */
43 > /* So cac diem chia */
        j+2;
    > /* In ra cac diem chia */
46    for k from 0 to j+1 do
        print(t[k]);

    end do;
49 > /* Tap hop so lieu va ve tren do thi */
    data1:=[a,alpha],[b,beta]:
    data2:=seq([x[i],y[i]],i=0..100):
52 plot([data1,data2],x=a..b,color=[BLACK,BLACK],
    style=[POINT,LINE],thickness=2,symbolsize=15,
    symbol=CIRCLE,legend=["Cac_diem_bien",
55 "Nghiem_khi_tim_diem_chia"],title="Phuong_Phap_Ban_Boi");

```