

Lời nói đầu

Theo Harker và Pang, bài toán bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1966 bởi Hartman và Stampacchia. Những nghiên cứu đầu tiên về bất đẳng thức biến phân liên quan tới việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và các ứng dụng của nó được giới thiệu trong cuốn sách "An introduction to variational inequalities and their application" của Kinderlehrer và Stampacchia xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách "Variational and quasivariational inequalities: Application to free boundary problems" của Baiocchi và Capelo xuất bản năm 1984.

Năm 1979 Michael J. Smith đưa ra bài toán cân bằng mạng giao thông và năm 1980 Defermos chỉ ra rằng: Điểm cân bằng của bài toán này là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Từ đó bài toán bất đẳng thức biến phân được phát triển và trở thành một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu và giải các bài toán cân bằng trong kinh tế tài chính, vận tải, lý thuyết trò chơi và nhiều bài toán khác.

Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị có quan hệ mật thiết với các bài toán tối ưu khác. Bài toán bù phi tuyến, xuất hiện vào năm 1964 trong luận án tiến sĩ của Cottle, là một trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị. Gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị cũng là một đề tài được nhiều người quan tâm nghiên cứu vì vai trò của nó trong lý thuyết toán học và trong các ứng dụng thực tế (xem [6]).

Một trong các hướng nghiên cứu quan trọng của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị là xây dựng phương pháp giải. Thông thường các phương pháp giải

được chia thành các loại sau: Loại thứ nhất là các phương pháp chuyển bài toán về hệ phương trình và dùng các phương pháp thông dụng như phương pháp Newton, phương pháp điểm trong để giải hệ phương trình này. Loại thứ hai là phương pháp có tính chất kiểu đơn điệu. Điển hình của phương pháp này là các phương pháp gradient, sau này được tổng quát bởi Cohen thành lý thuyết bài toán phụ, phương pháp điểm gần kề của Rockafellar, phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov,... Các phương pháp này khá hiệu quả, dễ thực thi trên máy tính nhưng các điều kiện hội tụ chỉ được đảm bảo dưới các giả thiết khác nhau về tính chất đơn điệu. Loại thứ ba là các phương pháp được dựa trên kỹ thuật hàm chặn. Nội dung chính của phương pháp này là chuyển bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị về cực tiểu của hàm chặn và sau đó sử dụng kỹ thuật tối ưu trơn hoặc không trơn để tìm cực tiểu của hàm chặn. Phương pháp này có thể giải được các bài toán với giả thiết rất nhẹ. Tuy nhiên, tốc độ hội tụ của thuật toán được đề xuất là chậm. Loại thứ tư là các phương pháp dựa trên điểm bất động. Nội dung chính của phương pháp này là chuyển bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị về tìm điểm bất động của ánh xạ nghiệm.

Luận văn này trình bày phương pháp giải bất đẳng thức biến phân đa trị thông qua tìm điểm bất động của ánh xạ nghiệm được viết trong bài báo "P. N. Anh, L. D. Muu, V. H. Nguyen and J. J. Strodiot (2005), Using the Banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, 124, pp. 285-306".

Ngoài lời nói đầu và phần tài liệu tham khảo, luận văn được chia làm 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ bản về giải tích lồi, tính Lipschitz của ánh xạ đa trị dựa trên khoảng cách Hausdorff. Trong phần ánh xạ đa trị đơn điệu, tìm hiểu về ánh xạ đơn điệu cực đại, đơn điệu mạnh, đồng bức. Bên cạnh đó ta đưa ra tính đơn điệu kết hợp với hàm lồi và tham số Minty của ánh xạ đa trị. Chương 2 đề cập đến bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị MVP, đưa ra một số ví dụ điển hình, sự tồn tại nghiệm cũng như tính chất của tập nghiệm. Trong hai chương còn lại trình bày phương pháp lặp Banach giải bài toán MVP. Chương 3 xét trong trường hợp hàm giá là đơn điệu mạnh còn chương 4 xét khi hàm giá là đồng bức. Khi đó, ánh xạ nghiệm chỉ là không giãn và việc tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn được tìm theo kiểu điểm bất động của Nadler.

Qua đây, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến người thầy, người hướng dẫn khoa học của mình, TS. Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn Thông).

Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin cảm ơn Trường THPT Xuân Trường - nơi tôi đang công tác, đã giúp đỡ tạo điều kiện rất nhiều cho tôi hoàn thành khoá học này. Tôi cũng xin cảm ơn nhóm seminar của tổ Giải Tích - khoa Toán-Cơ-Tin học, trường Đại học Khoa Học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội đã giúp tôi bổ sung, củng cố các kiến thức về Lý thuyết đa trị và tối ưu. Qua đây, tôi xin gửi tới các thầy cô Khoa Toán-Cơ-Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2007-2009, lời cảm ơn sâu sắc nhất đối với công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục đào tạo của Nhà trường. Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ tôi để tôi có thể hoàn thành Luận văn này.

Hà Nội, ngày 15 tháng 11 năm 2009

Người viết luận văn

Nguyễn Văn Khoa

Mục lục

Lời nói đầu	i
Mục lục	iii
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	iv
1 Ánh xạ đa trị đơn điệu	1
1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản	1
1.1.1. Tập lồi và hàm lồi	2
1.1.2. Dưới vi phân	3

1.1.3. Ánh xạ đa trị Lipschitz và nửa liên tục	6
1.2. Ánh xạ đa trị đơn điệu	10
1.2.1. Định nghĩa ánh xạ đa trị đơn điệu	10
1.2.2. Ánh xạ đơn điệu cực đại	14
1.2.3. Tham số Minty	17
1.2.4. Tính đơn điệu của hàm lỗi	20
1.2.5. Ánh xạ đơn điệu mạnh	23
1.2.6. Ánh xạ đồng bậc	26
2 Bất đẳng thức biến phân đa trị	28
2.1. Phát biểu bài toán và các ví dụ minh họa	28
2.2. Sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm	33
3 Phương pháp lặp Banach giải bài toán (MVIP) đơn điệu mạnh	35
3.1. Tính chất cơ của ánh xạ nghiệm	35
3.2. Thuật toán lặp Banach cho bài toán (MVIP) đơn điệu mạnh.	42
4 Phương pháp lặp Banach giải bài toán (MVIP) đồng bậc	47
4.1. Tính không giãn của ánh xạ nghiệm	47
4.2. Mô tả thuật toán và sự hội tụ	51
Kết luận chung	53
Tài liệu tham khảo	55

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\overline{\mathbb{R}}$	tập số thực mở rộng ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)
$\mathbb{N}$	tập số tự nhiên
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n -chiều
$ x $	trị tuyệt đối của số thực x
$\ x\ $	chuẩn Euclide của x
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vec tơ x và y
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\text{gph } S$	đồ thị của ánh xạ S
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x
$\text{dom } f$	miền hữu hiệu của hàm f
$\text{epi } f$	trên đồ thị của hàm f
f^*	hàm liên hợp của f
$\underset{x \in C}{\text{argmin}} \{f(x)\}$	tập các điểm cực tiểu của hàm f trên C
$\nabla f(x)$ hoặc $f'(x)$	đạo hàm của f tại x
P_C	phép chiếu lên tập C
$N_C(x)$	nón pháp tuyến ngoài của C tại x
C^*	nón đối cực
C^+	nón đối ngẫu
δ_C	hàm chỉ của tập C
$\text{int } C$	phần trong của tập C
$\text{ri } C$	phần trong tương đối của tập C
$\overline{C}$	bao đóng của C
$\text{aff } C$	bao affine của C

$d(x, C)$	khoảng cách từ x đến tập C
$\rho(A, B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
I	ánh xạ đồng nhất
A^t	ma trận chuyển vị của ma trận A
$\text{rank } A$	hạng của ma trận A
$x^k \rightarrow x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới x
VI	bài toán bất đẳng thức biến phân
MVIP	bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị.

CHƯƠNG 1

Ánh xạ đa trị đơn điệu

Một công cụ hữu ích giúp ta nghiên cứu ánh xạ dưới gradient và gradient, ánh xạ nghiệm, và đặc biệt là đóng vai trò quan trọng trong giải tích biến phân, đối với cả trường hợp đơn trị và trường hợp đa trị, là *ánh xạ đơn điệu*. Trong chương này, ta sẽ định nghĩa ánh xạ đa trị đơn điệu, trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của ánh xạ đơn điệu cực đại, đơn điệu mạnh, đồng bức, hàm lồi, dưới vi phân của hàm lồi,... Tài liệu tham khảo chính của phần này là [1], [5].

1.1. Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Trong toàn bộ bản luận văn này, chúng ta sẽ làm việc trên không gian Euclide n -chiều $\mathbb{R}^n$. Một phần tử $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ là một vec-tơ cột của $\mathbb{R}^n$. Ta nhắc lại rằng, với hai vec-tơ $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T$ thuộc $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

gọi là *tích vô hướng* của hai vec-tơ. *Chuẩn Euclide* của phần tử x và *khoảng cách Euclide* giữa hai phần tử x, y được định nghĩa bởi

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

$$d(x, y) := ||x - y||.$$

Ta gọi $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ là *tập số thực mở rộng*.

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,...

1.1.1. Tập lồi và hàm lồi

Định nghĩa 1.1.1 • Cho $C \subset \mathbb{R}^n$, bao affine của C , ký hiệu là $\text{aff } C$ được xác định bởi

$$\text{aff } C = \left\{ \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_m x^m \mid x^i \in C, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

• Một điểm $a \in C$ được gọi là *điểm trong tương đối* của C nếu nó là điểm trong của C theo tô pô cảm sinh bởi $\text{aff } C$, ký hiệu là $\text{ri } C$.

Vậy theo định nghĩa ta có

$$\text{ri } C := \{a \in C \mid \exists B : (a + B) \cap \text{aff } C \subset C\},$$

trong đó B là một lân cận mở của gốc.

Định nghĩa 1.1.2 • Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

• Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *nón* nếu

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó đồng thời là một tập lồi. Như vậy, một tập C là nón lồi khi và chỉ khi nó có các tính chất sau:

- (i) $\lambda C \subset C \ \forall \lambda > 0$,
- (ii) $C + C \subset C$.

Định nghĩa 1.1.3 Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và $x \in C$. Ký hiệu

$$N_C(x) := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\},$$

$$C^* := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x \rangle \leq 0, \forall x \in C\},$$

$$C^+ := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x \rangle \geq 0, \forall x \in C\},$$

theo thứ tự gọi là *nón pháp tuyến ngoài* của C tại x , *nón đối cực* và *nón đối ngẫu* của C .

Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ và $f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Ta ký hiệu

$$\text{epi } f := \{(x, \mu) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mu\}.$$

Tập epi f được gọi là *trên đồ thị* của hàm f . Tập

$$\text{dom } f := \{x \in C \mid f(x) < +\infty\}$$

được gọi là *miền hữu hiệu* của f .

Định nghĩa 1.1.4 Hàm f được gọi là *chính thường* nếu

$$\text{dom } f \neq \emptyset \text{ và } f(x) > -\infty \quad \forall x \in C.$$

Định nghĩa 1.1.5 • Hàm f được gọi là *hàm lồi* trên C nếu epi f lồi trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Một cách tương đương ta có, hàm f lồi trên C khi và chỉ khi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0; 1).$$

• Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *lồi ngặt* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in C, x \neq y, \forall \lambda \in (0; 1).$$

• Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *lồi mạnh* trên C với hệ số $\eta > 0$, nếu $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0; 1)$.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{1}{2}\eta\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

1.1.2. Dưới vi phân

Trong mục này ta luôn giả sử $f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm lồi với C là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$. Ta có định nghĩa dưới vi phân của hàm lồi như sau:

Định nghĩa 1.1.6 Vec-tơ $x^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *dưới gradient* của hàm f tại $x \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Tập tất cả dưới gradient của f tại x được gọi là *dưới vi phân* của f tại x , ký hiệu là $\partial f(x)$, tức là:

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Hàm f được gọi là *khả dưới vi phân* tại x nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Ví dụ 1.1.7 Cho $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, xét hàm chỉ của tập C

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in C \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

Nếu $x^0 \in C$ thì

$$\partial\delta_C(x^0) = \{x^* \mid \langle x^*, x - x^0 \rangle \leq \delta_C(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

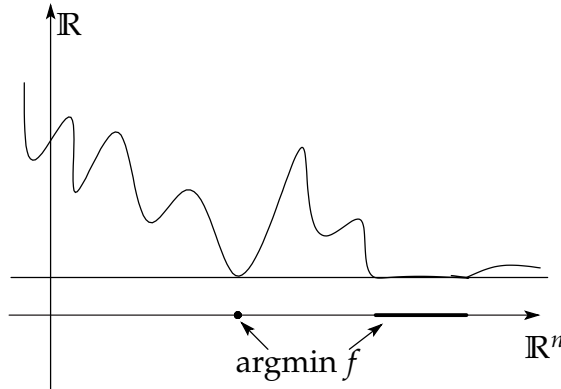
Với $x \notin C$, thì $\delta_C(x) = +\infty$, nên bất đẳng thức $\langle x^*, x - x^0 \rangle \leq \delta_C(x)$ luôn đúng. Do đó

$$\partial\delta_C(x^0) = \{x^* \mid \langle x^*, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\} = N_C(x^0).$$

Vậy dưới vi phân của hàm chỉ của C tại một điểm $x^0 \in C$ là nón pháp tuyến ngoài của C tại x^0 . $\square$

Với $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ta ký hiệu tập các điểm cực tiểu của hàm f trên $C \subset \mathbb{R}^n$ là $\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$,

$$\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x) = \begin{cases} \{x \in C \mid f(x) = \inf_{x \in C} f(x)\} & \text{nếu } \inf_{x \in C} f(x) \neq \infty \\ \emptyset & \text{nếu } \inf_{x \in C} f(x) = \infty. \end{cases}$$



Hình 1.1: argmin của hàm f .

Tính chất liên quan giữa argmin và dưới vi phân của hàm lồi f được thể hiện qua định lý sau:

Tính chất 1.1.8 Cho f là hàm lồi, khả dưới vi phân trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$y \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

khi và chỉ khi

$$0 \in \partial f(y).$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f(y) &= \{y^* \in \mathbb{R}^n \mid f(x) - f(y) \geq \langle y^*, x - y \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(y) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow f(y) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow y \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \end{aligned}$$

□

Tính chất 1.1.9 Với C là một tập lồi, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri} C \neq \emptyset$, khi đó

$$y \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$$

khi và chỉ khi

$$0 \in \partial f(y) + N_C(y),$$

trong đó

$$N_C(y) := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x - y \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$$

là nón pháp tuyến ngoài của C tại y .

Chứng minh. Gọi $\delta_C(\cdot)$ là hàm chỉ của tập C . Khi đó y là điểm cực tiểu của f trên C khi và chỉ khi nó là cực tiểu của hàm $h(x) = f(x) + \delta_C(x)$ trên toàn không gian. Theo Tính chất 1.1.8, điều kiện cần và đủ để y là điểm cực tiểu của h trên $\mathbb{R}^n$ là $0 \in \partial h(y)$. Do $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri} C \neq \emptyset$, theo Định lý Moreau-Rockafellar (xem [1], Mệnh đề 11.11) có:

$$\partial h(y) = \partial f(y) + \partial \delta_C(y).$$

Vì $y \in C$, nên $\partial \delta_C(y) = N_C(y)$. Vậy

$$0 \in \partial f(y) + N_C(y).$$

□

1.1.3. Ánh xạ đa trị Lipschitz và nửa liên tục

Trước hết ta định nghĩa ánh xạ đa trị. Cho X, Y là hai tập con bất kỳ của $\mathbb{R}^n$. Cho $T : X \rightarrow 2^Y$ là ánh xạ từ X vào tập hợp gồm toàn bộ các tập con của Y (được ký hiệu là 2^Y). Ta nói T là *ánh xạ đa trị* từ X vào Y . Như vậy, với mỗi $x \in X$, $T(x)$ là một tập hợp con của Y ($T(x)$ có thể là một tập rỗng).

Nếu với mỗi $x \in X$, tập $T(x)$ chỉ gồm đúng một phần tử của Y , thì ta nói T là *ánh xạ đơn trị* từ X vào Y và thường được ký hiệu $T : X \rightarrow Y$.

Ánh xạ ngược $T^{-1} : Y \rightarrow 2^X$ của ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow 2^Y$ được xác định bởi công thức

$$T^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in T(x)\} \quad (y \in Y).$$

Ta đã biết rằng khái niệm liên tục Lipschitz là một khái niệm có vai trò quan trọng trong giải tích toán học. Trong mục này ta định nghĩa liên tục Lipschitz của một ánh xạ đa trị dựa trên khoảng cách Hausdorff. Với $x \in \mathbb{R}^n$ là một vector bất kỳ, C là tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, *khoảng cách từ x đến C* , ký hiệu là $d(x, C)$, được xác định như sau

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Nếu tồn tại $z \in C$ sao cho $d(x, C) = \|x - z\|$, thì ta nói z là *hình chiếu* (vuông góc) của x trên C .

Định nghĩa 1.1.10 (Khoảng cách Hausdorff). Với $A, B \subset \mathbb{R}^n$ là hai tập đóng và khác rỗng, *khoảng cách Hausdorff* của A và B được xác định bởi:

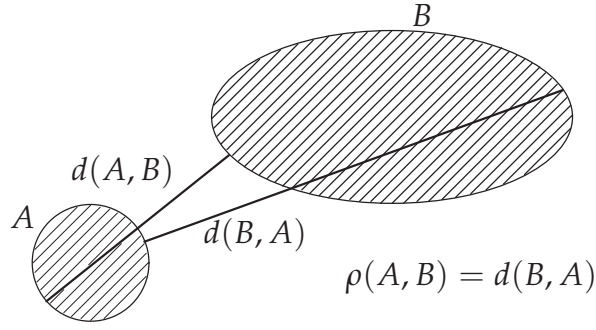
$$\rho(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

với $d(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$, $d(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A)$.

Định nghĩa 1.1.11 (Ánh xạ đa trị liên tục Lipschitz). Cho C là một tập con khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Ánh xạ đa trị $T : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được gọi là *Lipschitz* với hệ số $L > 0$ (được viết tắt là *L-Lipschitz*) nếu

$$\rho(T(x), T(x')) \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Nếu $L < 1$ thì T được gọi là *co* trên C . Nếu $L = 1$ thì T được gọi là *không giãn* trên C .



Hình 1.2: Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A và B .

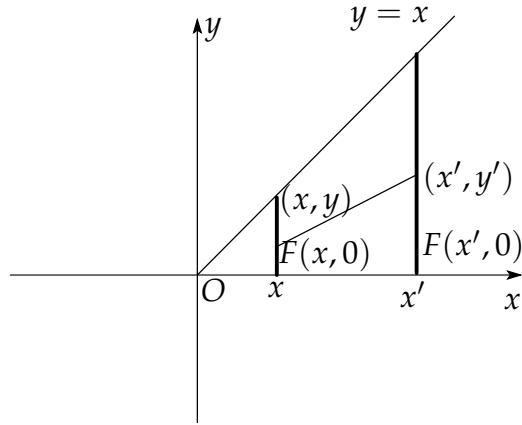
Để minh họa cho định nghĩa trên ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1.1.12 Cho $C := \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ và ánh xạ $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ xác định bởi

$$F(x, 0) := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}. \quad (1.1)$$

Khi đó ánh xạ F Lipschitz với hệ số $L = \sqrt{2}$.

Thật vậy, với mọi $(x, 0), (x', 0) \in C$ ($x < x'$) thì



Hình 1.3:

$$\begin{aligned} d(F(x, 0), F(x', 0)) &= \max_{(x, y) \in F(x, 0)} \min_{(x', y') \in F(x', 0)} \|(x, y) - (x', y')\| \\ &= \max_{(x, y) \in F(x, 0)} \min_{(x', y') \in F(x', 0)} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &= \max_{(x, y) \in F(x, 0)} |x - x'| \\ &= |x - x'| = \|(x, 0) - (x', 0)\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(F(x', 0), F(x, 0)) &= \max_{(x', y') \in F(x', 0)} \min_{(x, y) \in F(x, 0)} \|(x, y) - (x', y')\| \\
&= \max_{(x', y') \in F(x', 0)} \min_{(x, y) \in F(x, 0)} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
&\leq \sqrt{2} \max_{(x', y') \in F(x', 0)} |x - x'| \\
&= \sqrt{2}|x - x'| = \sqrt{2}\|(x, 0) - (x', 0)\|.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\rho(F(x, 0), F(x', 0)) \leq \sqrt{2}\|(x, 0) - (x', 0)\| \quad \forall (x, 0), (x', 0) \in C.$$

□

Tính chất 1.1.13 Cho A là một ma trận cỡ $p \times n$ ($p \geq n$), $\text{rank } A = n$, $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, b \in \mathbb{R}^p\}$ là một tập đa diện trong $\mathbb{R}^n$ và $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là L -Lipschitz trên C . Khi đó ta có

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \bar{L}\|A(x - y)\| \quad \forall x, y \in C,$$

ở đây $\bar{L} = L\|\hat{A}^{-1}\|$ với $\hat{A} := (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận con của A sao cho $\text{rank } \hat{A} = n$ và

$$\|\hat{A}^{-1}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\hat{A}^{-1}x\|.$$

Chứng minh. Theo giả thiết, F là L -Lipschitz trên C nên

$$\rho(F(x), F(y)) \leq L\|A(x - y)\| \quad \forall x, y \in C.$$

Mà

$$\|x - y\| = \|\hat{A}^{-1}(\hat{A}(x - y))\| \leq \|\hat{A}^{-1}\| \cdot \|\hat{A}(x - y)\| \quad \forall x, y \in C.$$

Do vậy ta có:

$$\rho(F(x), F(y)) \leq L\|\hat{A}^{-1}\| \cdot \|A(x - y)\| \quad \forall x, y \in C.$$

□

Định nghĩa 1.1.14 Ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được gọi là

- *Nửa liên tục trên* tại $x \in \text{dom } T$ nếu với bất kì tập mở U chứa $T(x)$, tồn tại một lân cận mở V của x sao cho

$$T(x') \subset U \quad \forall x' \in V.$$

- *Nửa liên tục dưới* tại $x \in \text{dom } T$ nếu với bất kì $y \in T(x)$ và dãy $x^n \in \text{dom } T$ hội tụ đến x , tồn tại dãy phần tử $y^n \in T(x^n)$ hội tụ về y .

Ánh xạ đa trị T được gọi là nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới) trên C nếu nó nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới) tại mọi điểm x thuộc C .

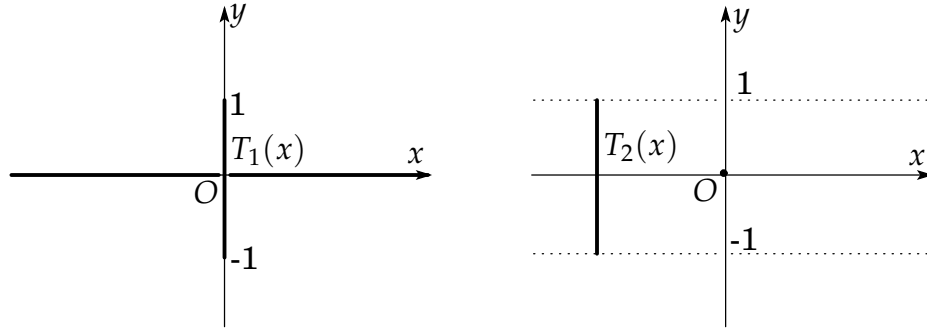
Ví dụ 1.1.15 Xét ánh xạ $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ xác định bởi:

$$T_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \neq 0 \\ [-1; 1] & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

và

$$T_2(x) := \begin{cases} [-1; 1] & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ánh xạ $T_1(x)$ nửa liên tục trên tại 0, vì với mọi tập mở $(a, b) \supset [-1; 1] = T_1(0)$,



Hình 1.4: Đồ thị của ánh xạ $T_1(x)$ và $T_2(x)$

tồn tại lân cận của 0, chẳng hạn $(-1; 1)$, ta có

$$T_1(x') = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x' \in (-1; 1) \setminus \{0\} \\ [-1; 1] & \text{nếu } x' = 0, \end{cases}$$

do đó, $T_1(x') \supset (a, b) \quad \forall x' \in (-1; 1)$. Tuy nhiên, ánh xạ $T_1(x)$ lại không nửa liên tục dưới tại 0. Thật vậy, lấy $y = 1 \in [-1; 1] = T_1(0)$ và dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ hội tụ về 0. Vì $T_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ nên không tồn tại dãy phần tử $y^n \in T_1\left(\frac{1}{n}\right)$ hội tụ về 1.

Với ánh xạ $T_2(x)$, lấy một lân cận mở của $T_2(0)$ là $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, khi đó không tồn tại lân cận mở V của 0 sao cho $T_2(x') \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \forall x' \in V$. Do đó, ánh xạ này không nửa liên tục trên tại 0. Bây giờ, với dãy bất kỳ $x^n \in \mathbb{R}$ hội tụ đến $0 = T_2(0)$, tồn tại dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \frac{1}{n} \in [-1; 1] = T_2(x^n)$ hội tụ về 0. Vậy $T_2(x)$ nửa liên tục dưới tại 0. $\square$

1.2. Ánh xạ đa trị đơn điệu

1.2.1. Định nghĩa ánh xạ đa trị đơn điệu

Định nghĩa 1.2.1 Với $C \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được gọi là:

- *Đơn điệu* trên C , nếu

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in C, v \in T(x), v' \in T(x').$$

Khi T đơn trị, bất đẳng thức trên trở thành:

$$\langle T(x) - T(x'), x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in C.$$

- *Đơn điệu ngặt* trên C , nếu

$$\langle v - v', x - x' \rangle > 0 \quad \forall x, x' \in C, x \neq x', v \in T(x), v' \in T(x').$$

- *Giả đơn điệu* trên C nếu với mọi $x, x' \in C, v \in T(x), v' \in T(x')$ ta có

$$\langle v, x - x' \rangle \geq 0 \text{ kéo theo } \langle v', x - x' \rangle \geq 0.$$

- T được gọi là *đơn điệu tuần hoàn* trên C , nếu với mọi số nguyên m và mọi cặp $x^i, y^i \in \text{gph } T, x^i \in C (i = 0, \dots, m)$ ta có

$$\langle x^1 - x^0, y^0 \rangle + \langle x^2 - x^1, y^1 \rangle + \dots + \langle x^0 - x^m, y^m \rangle \leq 0.$$

Như vậy, đơn điệu là trường hợp riêng của đơn điệu tuần hoàn khi $m = 1$.

Ví dụ 1.2.2 Ánh xạ đa trị F định nghĩa trong Ví dụ 1.1.12, tức là

$$F(x, 0) := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}$$

là đơn điệu trên $C = \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$.

Chứng minh. Với mọi $(x, 0), (x', 0) \in C$ và với mọi $(x, y) \in F(x, 0), (x', y') \in F(x', 0)$, ta có

$$\begin{aligned} \langle (x, y) - (x', y'), (x, 0) - (x', 0) \rangle &= \langle (x - x', y - y'), (x - x', 0) \rangle \\ &= |x - x'|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hơn nữa, ánh xạ F là đơn điệu ngặt vì bất đẳng thức trên là ngặt khi $(x, 0) \neq (x', 0)$. $\square$

Ví dụ 1.2.3 (Nửa xác định dương). Một ánh xạ affine $T(x) = Ax + a$ với véc-tơ $a \in \mathbb{R}^n$ và ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (không nhất thiết đối xứng) là đơn điệu khi và chỉ khi A là nửa xác định dương, hay $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ánh xạ T là đơn điệu ngặt khi và chỉ khi A là xác định dương, hay $\langle x, Ax \rangle > 0$ với mọi $x \neq 0$. Đặc biệt ánh xạ đồng nhất là đơn điệu ngặt.

Chứng minh. T là ánh xạ đơn trị nên theo định nghĩa 1.2.1 ta có:

$$\begin{aligned} T \text{ đơn điệu} &\Leftrightarrow \langle T(x) - T(x'), x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \langle A(x - x'), (x - x') \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow A \text{ là nửa xác định dương.} \end{aligned}$$

Trong trường hợp T đơn điệu ngặt cũng được chỉ ra tương tự. Hơn nữa nếu $A = I_{n \times n}$ và $a = 0$ thì T là ánh xạ đồng nhất và cũng là ánh xạ đơn điệu ngặt. $\square$

Ví dụ 1.2.4 (Tính đơn điệu của ánh xạ khả vi). Một ánh xạ khả vi $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ đơn điệu khi và chỉ khi với mỗi x , ma trận Jacobian $\nabla F(x)$ (không nhất thiết đối xứng) là nửa xác định dương. Ánh xạ F đơn điệu ngặt nếu $\nabla F(x)$ xác định dương với mỗi x .

Chứng minh. Nếu F là ánh xạ đơn điệu, ta có:

$$\langle F(x + \tau v) - F(x), (x + \tau v) - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Chia hai vế bất đẳng thức trên cho τ và cho qua giới hạn khi $\tau \searrow 0$ ta được:

$$\langle \nabla F(x)v, v \rangle \geq 0, \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^n,$$

bất đẳng thức này đúng với mọi v khi và chỉ khi ma trận $\nabla F(x)$ là nửa xác định dương với mọi x .

Ngược lại, giả sử $\nabla F(x)$ là nửa xác định dương với mọi x , với các điểm tùy ý x, x' xét hàm số:

$$\varphi(\tau) := \langle x - x', F(x_\tau) - F(x') \rangle \text{ với } x_\tau := (1 - \tau)x' + \tau x.$$

Để chứng minh F là ánh xạ đơn điệu ta cần phải chứng minh $\varphi(1) \geq 0$. Ta có $\varphi(0) = 0$ và $\varphi'(\tau) = \langle x - x', \nabla F(x_\tau)(x - x') \rangle$. Do $\nabla F(x)$ là nửa xác định dương

nên $\varphi'(\tau) \geq 0$, tức φ là hàm không giảm, suy ra $\varphi(1) \geq \varphi(0) = 0$.

Nếu $\nabla F(x)$ là xác định dương với mỗi x thì với cách xét hàm $\varphi(\tau)$ tương tự như trên ta dẫn đến φ là hàm tăng, do đó $\varphi(1) > 0$ khi $x \neq x'$, tức là $\langle x - x', F(x) - F(x') \rangle > 0$ khi $x \neq x'$. Vậy F là đơn điệu ngặt. $\square$

Ví dụ 1.2.5 (Tính đơn điệu của dưới vi phân của hàm lồi). Với bất kỳ hàm lồi, chính thường $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ánh xạ $\partial f : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là đơn điệu trên $\text{dom}(\partial f)$.

Chứng minh. Giả sử f là hàm lồi, với mọi $x, x' \in \text{dom}(\partial f)$, $v \in \partial f(x)$ và $v' \in \partial f(x')$, từ bất đẳng thức dưới gradient ta có:

$$f(x) \geq f(x') + \langle v', x - x' \rangle$$

và

$$f(x') \geq f(x) + \langle v, x' - x \rangle,$$

với các giá trị $f(x)$ và $f(x')$ hữu hạn. Cộng các bất đẳng thức trên lại với nhau ta được

$$0 \geq \langle v', x - x' \rangle + \langle v, x' - x \rangle,$$

hay

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x, x' \in \text{dom}(\partial f), v \in \partial f(x), v' \in \partial f(x').$$

Vậy ∂f đơn điệu. $\square$

Qua ví dụ trên ta thấy, nếu $T \equiv \partial f$, thì T đơn điệu trên $\text{dom}(\partial f)$. Một câu hỏi được đặt ra là điều ngược lại có đúng không? Trả lời câu hỏi này ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2.6 *Giả sử T là ánh xạ đa trị từ $\mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$. Điều kiện cần và đủ để tồn tại một hàm lồi, đóng, chính thường f trên $\mathbb{R}^n$ sao cho $T(x) \subset \partial f(x)$ với mọi $x \in \text{dom}(T)$ là ánh xạ T đơn điệu tuần hoàn.*

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên vì bản thân ∂f là ánh xạ đơn điệu.

Để chứng minh điều kiện đủ, hãy giả sử T là ánh xạ đơn điệu tuần hoàn và $(x^0, y^0) \in \text{gph } T$. Ta định nghĩa hàm f bởi

$$f(x) := \sup \{ \langle x - x^m, y^m \rangle + \langle x^m - x^{m-1}, y^{m-1} \rangle \dots + \langle x^1 - x^0, y^0 \rangle \}$$

trong đó cận trên đúng được lấy trên tất cả các cặp $(x^i, y^i) \in \text{gph } T$ và các số nguyên dương m . Do f là bao trên của một họ các hàm affine, nên f là một hàm

lồi đóng. Do tính đơn điệu tuần hoàn của T , nên $f(x^0) = 0$. Vậy f là hàm lồi, chính thường. Với bất kỳ cặp $(x, x^*) \in \text{gph } T$, ta sẽ chỉ ra rằng $x^* \in \partial f(x)$. Muốn thế chỉ cần chỉ ra rằng với mọi $\alpha < f(x)$ và $y \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$f(y) > \alpha + \langle y - x, x^* \rangle.$$

Thật vậy, do $\alpha < f(x)$, nên theo tính chất của cận trên đúng, sẽ tồn tại các cặp $(x^i, y^i) \in \text{gph } T$ và số nguyên dương $m(i = 1, 2, \dots, m)$ thỏa mãn

$$\alpha < \langle x - x^m, y^m \rangle + \dots + \langle x^1 - x^0, y^0 \rangle.$$

Theo định nghĩa của $f(y)$, ta được

$$f(y) \geq \langle y - x^{m+1}, y^{m+1} \rangle + \langle x^{m+1} - x^m, y^m \rangle + \dots + \langle x^1 - x^0, y^0 \rangle.$$

Thay $x^{m+1} = x$ và $y^{m+1} = x^*$, ta có:

$$\begin{aligned} f(y) &\geq \langle y - x, x^* \rangle + \langle x^{m+1} - x^m, y^m \rangle + \dots + \langle x^1 - x^0, y^0 \rangle \\ &> \langle y - x, x^* \rangle + \alpha. \end{aligned}$$

Điều này đúng với mọi $(x, x^*) \in \text{gph } T$, nên $T \subset \partial f$. □

Tính chất 1.2.7 (Phép toán bảo toàn tính đơn điệu). Cho $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là một ánh xạ đa trị.

(a) Nếu T là đơn điệu thì T^{-1} cũng đơn điệu.

(b) Nếu T là đơn điệu (đơn điệu ngặt) thì λT ($\lambda > 0$) cũng đơn điệu (đơn điệu ngặt).

(c) Nếu $T' : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ cũng là ánh xạ đa trị đơn điệu thì $T + T'$ là đơn điệu. Nếu thêm điều kiện T hoặc T' là đơn điệu ngặt thì $T + T'$ đơn điệu ngặt.

(d) Nếu $S : \mathbb{R}^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ là đơn điệu thì với bất kì ma trận $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ và véc-tơ $a \in \mathbb{R}^m$, ánh xạ $T(x) = A^t S(Ax + a)$ là đơn điệu. Nếu thêm điều kiện ánh xạ S đơn điệu ngặt và $\text{rank } A = n$ thì T đơn điệu ngặt.

Chứng minh. (a) Giả sử T đơn điệu. Với $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, x \in T^{-1}(v), x' \in T^{-1}(v')$, theo định nghĩa ánh xạ đa trị ngược thì $v \in T(x)$ và $v' \in T(x')$. Ta có

$$\langle x - x', v - v' \rangle = \langle v - v', x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall x \in T^{-1}(v), x' \in T^{-1}(v').$$

Vậy T^{-1} là ánh xạ đơn điệu.

(b) Với $\lambda > 0, \forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \lambda v \in \lambda T(x), \lambda v' \in \lambda T(x')$ ta có

$$\langle \lambda v - \lambda v', x - x' \rangle = \lambda \langle v - v', x - x' \rangle \geq 0.$$

Vậy λT là ánh xạ đơn điệu khi T đơn điệu. Hiển nhiên bất đẳng thức trên là ngặt khi T đơn điệu ngặt.

(c) Với mọi $x, x' \in \mathbb{R}^n$ và

$$\begin{aligned} w &\in (T + T')(x) = \{u + v \mid u \in T(x), v \in T'(x)\}, \\ w' &\in (T + T')(x') = \{u' + v' \mid u' \in T(x'), v' \in T'(x')\} \end{aligned}$$

ta có:

$$\begin{aligned} \langle w - w', x - x' \rangle &= \langle u + v - u' - v', x - x' \rangle \\ &= \langle u - u', x - x' \rangle + \langle v - v', x - x' \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

do T và T' đơn điệu. Vậy $T + T'$ là ánh xạ đơn điệu.

Nếu T hoặc T' đơn điệu ngặt thì bất đẳng thức trên là ngặt khi $x \neq x'$, do đó $T + T'$ đơn điệu ngặt.

(d) Với $\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$ ta lấy bất kì $w \in S(Ax + a), w' \in S(Ax' + a)$. Đặt $v = A^t S(Ax + a), v' = A^t S(Ax' + a)$

Ta có:

$$\begin{aligned} \langle v - v', x - x' \rangle &= \langle A^t w - A^t w', x - x' \rangle \\ &= \langle A^t (w - w'), x - x' \rangle \\ &= \langle w - w', A(x - x') \rangle \\ &= \langle w - w', (Ax + a) - (Ax' + a) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

vì S là ánh xạ đơn điệu. Vậy T là ánh xạ đơn điệu. Nếu $\text{rank } A = n$ thì với $x \neq x'$, $(Ax + a) \neq (Ax' + a)$, mà S đơn điệu ngặt nên bất đẳng thức trên là ngặt, do đó T đơn điệu ngặt. $\square$

1.2.2. Ánh xạ đơn điệu cực đại

Với ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, đồ thị $\text{gph } T$, miền hữu hiệu $\text{dom } T$ và miền ảnh $\text{rge } T$ của T tương ứng được xác định bằng các công thức

$$\begin{aligned} \text{gph } T &:= \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in T(x)\}, \\ \text{dom } T &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

và

$$\text{rge } T := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sao cho } v \in T(x)\}.$$

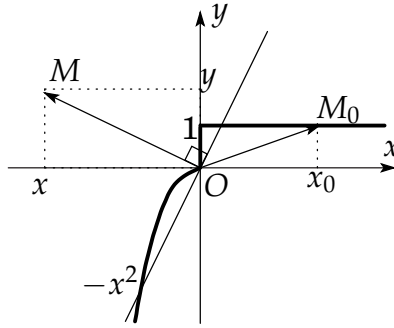
Sau đây ta đưa ra định nghĩa ánh xạ đơn điệu cực đại và nêu một số tính chất cơ bản liên quan đến ánh xạ này.

Định nghĩa 1.2.8 Một ánh xạ đơn điệu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được gọi là *đơn điệu cực đại*, nếu đồ thị của nó không phải là tập con thực sự của đồ thị của một ánh xạ đơn điệu nào khác, một cách tương đương, nếu với mọi cặp $(\bar{x}, \bar{v}) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \text{gph } T$, tồn tại $(x, v) \in \text{gph } T$ sao cho $\langle \bar{v} - v, \bar{x} - x \rangle < 0$.

Ví dụ 1.2.9 Ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ định nghĩa bởi:

$$T(x) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ [0; 1] & \text{nếu } x = 0 \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

là ánh xạ đơn điệu cực đại.



Hình 1.5:

Thật vậy, với mọi $M(x, y) \notin \text{gph } T$, ta luôn tìm được điểm $M_0(x_0, y_0) \in \text{gph } T$ sao cho góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OM_0}$ là góc tù, điều này có nghĩa là

$$\langle (x, y), (x_0, y_0) \rangle = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_0} < 0.$$

Do vậy, T là ánh xạ đơn điệu cực đại.

□

Một ánh xạ đơn điệu có thể được mở rộng lên thành ánh xạ đơn điệu cực đại dựa vào mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.10 (Sự tồn tại mở rộng cực đại). Với $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là một ánh xạ đơn điệu bất kỳ, khi đó có ánh xạ đơn điệu cực đại $\bar{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ (không nhất thiết duy nhất) sao cho $\text{gph } \bar{T} \supset \text{gph } T$.

Chứng minh. Ký hiệu $\mathcal{T}' = \{T' : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \mid \text{gph } T' \supset \text{gph } T\}$ và xét $\mathcal{T}$ dưới phép cảm sinh là sự bao hàm đồ thị. Theo tiên đề Zorn (xem [2], trang 255), có một tập con được sắp thứ tự tuyến tính cực đại $\mathcal{T}_0$ của $\mathcal{T}$. Gọi $\bar{T}$ là ánh xạ mà đồ thị của nó là hợp các đồ thị của các ánh xạ $T' \in \mathcal{T}_0$. Như vậy $\bar{T}$ là đơn điệu và không có ánh xạ đơn điệu T' mà $\text{gph } \bar{T} \subset \text{gph } T', \bar{T} \neq T'$. Do đó $\bar{T}$ là đơn điệu cực đại. $\square$

Ví dụ 1.2.11 Nếu ánh xạ đơn trị liên tục $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là đơn điệu thì nó là đơn điệu cực đại. Đặc biệt, mọi ánh xạ khả vi F liên tục và có ma trận Jacobian $\nabla F(x)$ nửa xác định dương trên $\mathbb{R}^n$ là đơn điệu cực đại.

Chứng minh. Giả sử $(\hat{x}, \hat{v})$ có tính chất: $\langle \hat{v} - F(x), \hat{x} - x \rangle \geq 0 \quad \forall x$, ta phải chứng minh $\hat{v} = F(\hat{x})$. Đặt $x = \hat{x} + \epsilon u$ với $\epsilon > 0$ và u tùy ý thuộc $\mathbb{R}^n$. Ta thấy $\langle \hat{v} - F(\hat{x} + \epsilon u), u \rangle \geq 0$. Do tính liên tục của F nên $F(\hat{x} + \epsilon u) \rightarrow F(\hat{x})$ khi $\epsilon \searrow 0$. Vì thế $\langle \hat{v} - F(\hat{x}), u \rangle \geq 0$ thỏa mãn với mọi $u \in \mathbb{R}^n$ khi $\hat{v} - F(\hat{x}) = 0$ hay $\hat{v} = F(\hat{x})$.

Nếu ánh xạ khả vi F có ma trận Jacobian $\nabla F(x)$ nửa xác định dương thì theo Ví dụ 1.2.4 ta có F đơn điệu. Mặt khác, F liên tục trên $\mathbb{R}^n$ nên F đơn điệu cực đại. $\square$

Tính chất 1.2.12 (Đồ thị và ảnh qua ánh xạ đơn điệu cực đại)

- (a) T đơn điệu cực đại khi và chỉ khi T^{-1} đơn điệu cực đại.
- (b) Nếu T đơn điệu cực đại thì $\text{gph } T$ là tập đóng.
- (c) Nếu T là đơn điệu cực đại thì T và T^{-1} là ánh xạ có giá trị là tập lồi đóng.

Chứng minh.

- (a) Giả sử T đơn điệu cực đại, theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} \forall (\hat{x}, \hat{v}) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \text{gph } T, \exists (\tilde{x}, \tilde{v}) \in \text{gph } T : \langle \hat{v} - \tilde{v}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle < 0, \hat{v} \notin T(\hat{x}), \tilde{v} \notin T(\tilde{x}) \\ \Leftrightarrow \hat{x} \notin T^{-1}(\hat{v}), \exists \tilde{x} \in T^{-1}(\tilde{v}) : \langle \hat{x} - \tilde{x}, \hat{v} - \tilde{v} \rangle < 0. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là T^{-1} đơn điệu cực đại.

- (b) Với mọi $(x, v) \in \text{gph } T, \{(x^\nu, v^\nu)\}_\nu \in \text{gph } T$ mà $(x^\nu, v^\nu) \rightarrow (\bar{x}, \bar{v})$ khi $\nu \rightarrow \infty$, ta có:

$$\langle v - v^\nu, x - x^\nu \rangle \geq 0.$$

Do tính liên tục của tích vô hướng nên khi cho $\nu \rightarrow \infty$ ta được: $\langle v - \bar{v}, x - \bar{x} \rangle \geq 0$. Mặt khác T đơn điệu cực đại nên $(\bar{x}, \bar{v}) \in \text{gph } T$. Vậy $\text{gph } T$ đóng.

(c) Do (a) và (b) nên ta chỉ cần chứng minh T là ánh xạ có giá trị là tập lồi. Thật vậy, với mọi $x, \bar{x} \in \text{dom } T, v \in T(x), v^1 \in T(\bar{x}), v^2 \in T(\bar{x})$ ta có:

$$\begin{aligned}\langle v - v^1, x - \bar{x} \rangle &\geq 0, \\ \langle v - v^2, x - \bar{x} \rangle &\geq 0.\end{aligned}$$

Suy ra với mọi $\tau \in (0, 1)$ thì

$$\begin{aligned}(1 - \tau) \langle v - v^1, x - \bar{x} \rangle &\geq 0, \\ \tau \langle v - v^2, x - \bar{x} \rangle &\geq 0.\end{aligned}$$

Do đó $\langle v - v_\tau, x - \bar{x} \rangle \geq 0$ với $v_\tau = (1 - \tau)v^1 + \tau v^2$, mà T đơn điệu cực đại nên $(\bar{x}, v_\tau) \in \text{gph } T$. Vậy T là ánh xạ có giá trị là tập lồi đóng. $\square$

Trong toàn bộ mục 1.2.3 cũng như mục 1.2.4 sau đây, ta hiểu khái niệm không giãn của ánh xạ đa trị theo nghĩa: $T : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ đa trị không giãn trên $C \subset \mathbb{R}^n$ nếu với mọi $x, x' \in C, v \in T(x), v' \in T(x')$ thì

$$\|v - v'\| \leq \|x - x'\|.$$

1.2.3. Tham số Minty

Bổ đề 1.2.13 Với các ánh xạ không giãn $T, T' : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ và $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $|\lambda| + |\lambda'| \leq 1$ thì $\lambda T + \lambda' T'$ cũng là ánh xạ không giãn.

Chứng minh.

Với mọi $z, z' \in \mathbb{R}^n$ và

$$\begin{aligned}v &= \lambda a + \lambda' b \in (\lambda T + \lambda' T')(z), \quad a \in T(z), b \in T'(z), \\ v' &= \lambda a' + \lambda' b' \in (\lambda T + \lambda' T')(z'), \quad a' \in T(z'), b' \in T'(z').\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\|v - v'\| &= \|\lambda(a - a') + \lambda'(b - b')\| \\ &\leq |\lambda| \|a - a'\| + |\lambda'| \|b - b'\| \\ &\leq |\lambda| \|z - z'\| + |\lambda'| \|z - z'\| \quad (\text{do } T, T' \text{ không giãn}) \\ &= (|\lambda| + |\lambda'|) \|z - z'\| \leq \|z - z'\| \quad (\text{do } |\lambda| + |\lambda'| \leq 1).\end{aligned}$$

Vậy $\lambda T + \lambda' T'$ là ánh xạ không giãn. $\square$

Bổ đề 1.2.14 Song ánh $J : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ với $J(x, v) = (v + x, v - x)$ cảm sinh tương ứng 1-1 giữa ánh xạ $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ và ánh xạ $S : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ với $\text{gph } S = J(\text{gph } T)$, $\text{gph } T = J^{-1}(\text{gph } S)$. Khi đó, S là ánh xạ không giãn khi và chỉ khi T đơn điệu; S là ánh xạ co khi và chỉ khi T đơn điệu ngặt và đơn trị trên $\text{dom } T$ và ta có:

$$S = I - 2I \circ (I + T)^{-1}, \quad T = (I - S)^{-1} \circ 2I - I. \quad (1.2)$$

Chứng minh. Với $(z, w) = J(x, v)$ và $(z', w') = J(x', v')$ ta có:

$$\begin{aligned} \|z - z'\|^2 - \|w - w'\|^2 &= \langle (z - z') + w - w', (z - z') - (w - w') \rangle \\ &= \langle (z + w) - (z' + w'), (z - w) - (z' - w') \rangle \\ &= \langle 2v - 2v', 2x - 2x' \rangle \\ &= 4\langle v - v', x - x' \rangle \end{aligned}$$

và do đó

$$\|w - w'\| \leq \|z - z'\| \Leftrightarrow \langle v - v', x - x' \rangle \geq 0. \quad (1.3)$$

Vì điều này đúng với mọi cặp tương ứng $(z, w), (z', w') \in \text{gph } S$ và $(x, v), (x', v') \in \text{gph } T$, nên S không giãn khi và chỉ khi T đơn điệu.

Ta có S là ánh xạ co khi và chỉ khi bất đẳng thức bên trái của (1.3) là ngặt khi $(z, w) \neq (z', w')$. Mặt khác T đơn điệu ngặt và đơn trị trên $\text{dom } T$ khi và chỉ khi bất đẳng thức bên phải của (1.3) là ngặt khi $(x, v) \neq (x', v')$. Với $(z, w) \in J(\text{gph } T)$, $x, v \in T(x)$ ta có: $z = v + x$ và $w = v - x$. Điều này tương đương với tồn tại x sao cho $z \in (I + T)(x)$ và $w = (z - x) - x = z - 2x$. Vì vậy $w \in S(z)$ khi và chỉ khi $w = z - 2x$ với $x \in (I + T)^{-1}(z)$.

Vậy

$$S = I - 2I \circ (I + T)^{-1},$$

suy ra

$$(I + T) = (I - S)^{-1} \circ 2I.$$

□

Định lý 1.2.15 Nếu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ đơn điệu và $\lambda > 0$ thì $(I + \lambda T)^{-1}$ đơn điệu và không giãn. Hơn nữa, T là đơn điệu cực đại khi và chỉ khi $\text{dom}(I + \lambda T)^{-1} = \mathbb{R}^n$. Trong trường hợp đó $(I + \lambda T)^{-1}$ cũng đơn điệu cực đại và đơn trị trên $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Theo tính chất 1.2.7(b), ánh xạ T đơn điệu khi và chỉ khi λT ($\lambda > 0$) đơn điệu, và dễ thấy λT đơn điệu cực đại khi và chỉ khi T đơn điệu cực đại. Do đó, không mất tính tổng quát ta có thể thay λT bởi T .

Giả sử T đơn điệu, do I cũng đơn điệu nên $I + T$ đơn điệu (theo 1.2.7(c)), do vậy $(I + T)^{-1}$ đơn điệu (theo 1.2.7(a)).

Theo Bổ đề 1.2.14 ta có $(I + T)^{-1} = \frac{1}{2}(I - S)$ với ánh xạ không giãn S nào đó. Vì I là ánh xạ không giãn nên $\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}S$ cũng không giãn (theo 1.2.13). Do đó $(I + T)^{-1}$ không giãn trên $D = \text{dom}(I + T)^{-1}$. Vậy $(I + T)^{-1}$ đơn điệu và không giãn.

Từ Bổ đề 1.2.14, T là ánh xạ đơn điệu cực đại khi và chỉ khi S là ánh xạ không giãn cực đại. Mặt khác, ánh xạ không giãn S có thể được mở rộng lên toàn $\mathbb{R}^n$ (xem [8], Định lý 9.58). Do đó, S là ánh xạ không giãn cực đại khi và chỉ khi $\text{dom } S = \mathbb{R}^n$. Vậy đối với ánh xạ $(I + T)^{-1}$, khi T đơn điệu cực đại, ta có $\text{dom}(I + T)^{-1} = \mathbb{R}^n$. Do $(I + T)^{-1}$ là đơn trị, liên tục trên $\text{dom}(I + T)^{-1}$ và đơn điệu dẫn đến $(I + T)^{-1}$ là đơn điệu cực đại (theo 1.2.11). $\square$

Bổ đề 1.2.16 Mọi ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ ta có đồng nhất thức:

$$(\lambda I + T^{-1})^{-1} = \lambda^{-1}[I - (I + \lambda T)^{-1}] \text{ với } \lambda > 0.$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} z &\in \lambda^{-1}[I - (I + \lambda T)^{-1}](w) \\ &\Leftrightarrow \lambda z \in w - (I + \lambda T)^{-1}(w) \\ &\Leftrightarrow w - \lambda z \in (I + \lambda T)^{-1}(w) \\ &\Leftrightarrow w \in (w - \lambda z) + \lambda T(w - \lambda z) \\ &\Leftrightarrow z \in T(w - \lambda z) \Leftrightarrow w - \lambda z \in T^{-1}(z) \\ &\Leftrightarrow w \in (\lambda I + T^{-1})(z) \Leftrightarrow z \in (\lambda I + T^{-1})^{-1}(w) \end{aligned}$$

$\square$

Tính chất 1.2.17 (Tham số hóa Minty). Cho $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là đơn điệu cực đại. Khi đó các ánh xạ

$$P = (I + T)^{-1}, \quad Q = (I + T^{-1})^{-1}$$

là đơn trị, đơn điệu cực đại và không giãn, ánh xạ $z \mapsto (P(z), Q(z))$ là ánh xạ 1-1 từ $\mathbb{R}^n$ vào $\text{gph } T$. Do vậy, ta có một cách tham số hóa của T mà Lipschitz theo cả

hai phương:

$$(P(z), Q(z)) = (x, v) \Leftrightarrow z = x + v, (x, v) \in \text{gph } T.$$

Chứng minh. Theo tính chất 1.2.7(a), T^{-1} đơn điệu cực đại khi và chỉ khi T đơn điệu cực đại, và từ Định lý 1.2.15 suy ra P và Q đơn trị, đơn điệu cực đại và không giãn, do đó liên tục Lipschitz. Mặt khác, $P + Q = I$ (theo Bổ đề 1.2.16) nên khi $(P(z), Q(z)) = (x, v)$ ta có $x + v = z$ và $z \in (I + T)(x)$, vì thế $v = z - x \in T(x)$, tức là $(x, v) \in \text{gph } T$.

Ngược lại, nếu $(x, v) \in \text{gph } T$ và $x + v = z$ thì $z - x = v \in T(x)$, hay $z \in (I + T)(x)$, vì thế $x = P(z)$, do tính đối xứng nên ta cũng có $v = Q(z)$.

Ánh xạ $z \mapsto (P(z), Q(z))$ liên tục Lipschitz vì P và Q liên tục Lipschitz. Thật vậy, giả sử P, Q liên tục Lipschitz với hệ số L_P, L_Q . Với mọi z_1, z_2 thì :

$$\begin{aligned} \|((P(z_1), Q(z_1)) - (P(z_2), Q(z_2)))\| &= \|(P(z_1) - P(z_2), Q(z_1) - Q(z_2))\| \\ &= \sqrt{(P(z_1) - P(z_2))^2 + (Q(z_1) - Q(z_2))^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{(L_P \|z_1 - z_2\|)^2 + (L_Q \|z_1 - z_2\|)^2} \\ &= \sqrt{2(L_P^2 + L_Q^2)} \|z_1 - z_2\| \end{aligned}$$

Ánh xạ $(x, v) \mapsto x + v$ là liên tục Lipschitz vì đây là phép biến đổi tuyến tính. □

Ví dụ 1.2.18 Cho ánh xạ không giãn $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, khi đó ánh xạ $I - F$ là đơn điệu cực đại.

Chứng minh. Vì F là ánh xạ không giãn, xác định trên $\mathbb{R}^n$ nên F là ánh xạ không giãn cực đại. Theo Bổ đề 1.2.14 ta có

$$T_0 = (I - F)^{-1} \circ 2I - I$$

là ánh xạ đơn điệu cực đại. Do đó, $I - F = \frac{1}{2}I \circ (I + T_0)^{-1}$ đơn điệu cực đại (theo 1.2.17). □

1.2.4. Tính đơn điệu của hàm lồi

Trước khi đưa ra tính đơn điệu của hàm lồi, ta nhắc lại một số kết quả của Rockafellar dưới dạng bổ đề như sau:

Bổ đề 1.2.19 Cho hàm lồi, chính thường $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ và $\lambda > 0$. Khi đó

$$P_\lambda f(x) = (I + \lambda \partial f)^{-1}(x), \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó, $P_\lambda f(x) = \operatorname{argmin}_w \{f(w) + \frac{1}{2\lambda} \|w - x\|^2\}$.

Chứng minh. Theo Tính chất 1.1.8 ta có:

$$\begin{aligned} y \in P_\lambda f(x) &\Leftrightarrow y \in \operatorname{argmin}_w \{f(w) + \frac{1}{2\lambda} \|w - x\|^2\} \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(y) + \frac{1}{\lambda}(y - x) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \lambda \partial f(y) + y - x \\ &\Leftrightarrow x \in y + \lambda \partial f(y) = (I + \lambda \partial f)(y) \\ &\Leftrightarrow y \in (I + \lambda \partial f)^{-1}(x). \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 1.2.20 Với hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ta có

$$\partial f^* = (\partial f)^{-1},$$

với $f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ là hàm liên hợp của f .

Chứng minh. Theo định nghĩa hàm liên hợp, ta có

$$f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}.$$

Điều này tương đương với

$$f^*(x^*) \geq \langle x^*, y \rangle - f(y) \quad \forall y.$$

Do đó

$$f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x \rangle,$$

khi và chỉ khi

$$\langle x^*, y \rangle - f(y) - f(x) \leq \langle x^*, x \rangle \quad \forall y,$$

tương đương với $x^* \in \partial f(x)$. Do tính đối xứng nên ta cũng có

$$f^*(x^*) + f(x) = \langle x^*, x \rangle$$

khi và chỉ khi

$$x \in \partial f^*(x^*).$$

Vậy

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*),$$

hay

$$\partial f^* = (\partial f)^{-1}.$$

□

Định lý 1.2.21 Nếu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường thì ∂f đơn điệu cực đại.

Chứng minh. Giả sử f là hàm lồi, chính thường, ta có ∂f đơn điệu (theo Ví dụ 1.2.5) và với $\lambda > 0$, $P_\lambda f = (I + \lambda \partial f)^{-1}$ (theo Bổ đề 1.2.19). Mặt khác, từ định nghĩa của $P_\lambda f$ ta dễ thấy $\text{dom } P_\lambda f = \mathbb{R}^n$, suy ra $\text{dom}(I + \lambda \partial f)^{-1} = \mathbb{R}^n$. Vậy ∂f đơn điệu cực đại (theo Định lý 1.2.15).

□

Hệ quả 1.2.22 Với bất kì tập lồi, đóng, khác rỗng C trong $\mathbb{R}^n$, ánh xạ $N_C : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là đơn điệu cực đại.

Chứng minh. Ta xét hàm $f = \delta_C$, thì f là hàm chính thường, nửa liên tục dưới và lồi (do C là tập lồi) với $\partial f = N_C$. Áp dụng Định lý 1.2.21 ta có $\partial f = N_C$ đơn điệu cực đại.

□

Ở đây, ta lưu ý rằng, khi xem N_C như một ánh xạ đa trị từ $\mathbb{R}^n$ vào $2^{\mathbb{R}^n}$, ta đã quy ước

$$N_C(x) := \emptyset \text{ với mọi } x \notin C.$$

Mệnh đề 1.2.23 Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, khi đó với bất kì $\lambda > 0$, ánh xạ xấp xỉ $P_\lambda f : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là đơn điệu cực đại, không giãn và

$$I - P_\lambda f = P_\lambda f^* \text{ khi } \lambda = 1.$$

Chứng minh. Do f là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới nên theo Định lý 1.2.21 ta có ∂f đơn điệu cực đại, do đó với $\lambda > 0$ thì $\lambda \partial f$ đơn điệu cực đại. Áp dụng tính chất 1.2.17 suy ra $(I + \lambda \partial f)^{-1}$ đơn điệu cực đại và không giãn. Nhưng theo 1.2.19 thì $P_\lambda f(x) = (I + \lambda \partial f)^{-1}(x)$ với mọi x . Vậy ta có $P_\lambda f$ đơn điệu cực đại

và không giãn.

Với bất kì hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ta luôn có $\partial f^* = (\partial f)^{-1}$. Do đó:

$$\begin{aligned} I - P_1 f &= I - (I + \partial f)^{-1} \\ &= [I + (\partial f)^{-1}]^{-1} \text{ (theo Bổ đề 1.2.16)} \\ &= (I + \partial f^*) = P_1 f^*. \end{aligned}$$

Vậy khi $\lambda = 1$ ta có: $I - P_\lambda f = P_\lambda f^*$. □

Hàm $f = \delta_C$ là hàm chính thường, nửa liên tục dưới với $\partial f = N_C$, và hàm f lồi khi C là tập lồi. Ta có $P_\lambda f = P_C$, nên theo mệnh đề 1.2.23 ta có kết quả dưới đây:

Hệ quả 1.2.24 (Phép chiếu). Cho tập lồi, khác rỗng $C \subset \mathbb{R}^n$, phép chiếu $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ xác định bởi

$$P_C(x) = \operatorname{argmin}_{w \in \mathbb{R}^n} \{ \|w - x\| + \delta_C(w) \}$$

là đơn điệu cực đại.

Ta đã biết một không gian con là một tập lồi nên áp dụng Hệ quả 1.2.22 và 1.2.24 ta có kết quả dưới đây:

Hệ quả 1.2.25 (Phép chiếu trong không gian con). Với mọi không gian con tuyến tính $M \subset \mathbb{R}^n$ và phần bù trực giao $M^\perp$, ánh xạ:

$$N_M(x) = \begin{cases} M^\perp & \text{khi } x \in M, \\ \emptyset & \text{khi } x \notin M \end{cases}$$

và ánh xạ nghịch đảo

$$N_M^{-1}(v) = \begin{cases} M & \text{khi } v \in M^\perp, \\ \emptyset & \text{khi } v \notin M^\perp. \end{cases}$$

đơn điệu cực đại với . Phép chiếu tuyến tính lên M là $P_M = (I + N_M)^{-1}$, lên $M^\perp$ là $P_{M^\perp} = (I + N_M^{-1})^{-1}$. Các phép chiếu này cũng đơn điệu cực đại.

1.2.5. Ánh xạ đơn điệu mạnh

Định nghĩa 1.2.26 Ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ gọi là đơn điệu mạnh với hệ số $\sigma > 0$ trên C nếu với mọi $x, x' \in C$, tồn tại $\sigma > 0$ sao cho $T - \sigma I$ đơn điệu, tức là

$$\langle (v - \sigma x) - (v' - \sigma x'), x - x' \rangle \geq 0 \quad \forall v \in T(x), v' \in T(x').$$

Bất đẳng thức trong định nghĩa có thể viết dưới dạng:

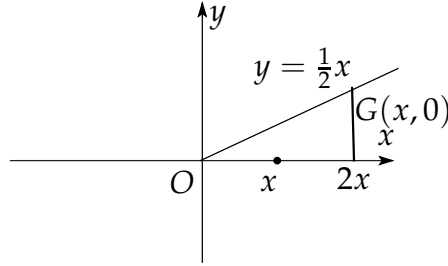
$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq \sigma \|x - x'\|^2 \quad \forall v \in T(x), v' \in T(x').$$

Dễ dàng suy ra rằng nếu T đơn điệu mạnh thì T đơn điệu ngặt.

Ví dụ 1.2.27 Cho $C = \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ và ánh xạ $G : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ được cho bởi

$$G(x, 0) := \{(2x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}.$$

Khi đó, G đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\sigma = 1$.



Hình 1.6:

Thật vậy, ta có

$$(G - I)(x, 0) = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\} =: F(x, 0).$$

Mà theo Ví dụ 1.2.2 thì $F(x, 0)$ đơn điệu trên C . Vậy $G(x, 0)$ đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\sigma = 1$.

□

Mệnh đề 1.2.28 Nếu ánh xạ đơn điệu cực đại $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ đơn điệu mạnh với hệ số $\sigma > 0$ thì T^{-1} đơn trị và liên tục Lipschitz với hệ số $\kappa = \frac{1}{\sigma}$.

Chứng minh. Do T đơn điệu mạnh với hệ số $\sigma > 0$ nên ánh xạ $T_0 = T - \sigma I$ đơn điệu, do đó $T^{-1} = (\sigma I + T_0)^{-1}$ cũng đơn điệu; mặt khác, T đơn điệu cực đại nên T_0 phải đơn điệu cực đại. Mở rộng đơn điệu chính tắc $\overline{T}_0$ của T_0 tương ứng cho ta mở rộng đơn điệu chính tắc $\overline{T}_0 + \sigma I$ của T . Theo Định lý 1.2.15, ánh xạ $(I + \frac{1}{\sigma} T_0)^{-1}$ đơn trị và không giãn. Vậy $(\sigma I + T_0)^{-1}$ đơn trị và liên tục Lipschitz với hệ số $\frac{1}{\sigma}$.

□

Áp dụng mệnh đề 1.2.28 cho ánh xạ T^{-1} ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.2.29 Nếu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là đơn điệu cực đại và T^{-1} đơn điệu mạnh với hệ số $\sigma > 0$, tức là

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq \sigma \|v - v'\|^2 \quad \forall v \in T(x), v' \in T(x').$$

Tính chất 1.2.30 Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ và $\sigma > 0$, nếu f lồi mạnh với hệ số σ thì ∂f đơn điệu mạnh với hệ số σ .

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng: f lồi mạnh với hệ số σ khi và chỉ khi $f - \frac{1}{2}\sigma \|\cdot\|^2$ là lồi. Thật vậy, giả sử $f - \frac{1}{2}\sigma \|\cdot\|^2$ lồi, với mọi $x, x' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in (0, 1)$ ta có:

$$\begin{aligned} & f((1-\lambda)x + \lambda x') - \frac{1}{2}\sigma \|(1-\lambda)x + \lambda x'\|^2 \\ & \leq (1-\lambda)(f(x) - \frac{1}{2}\sigma \|x\|^2) + \lambda(f(x') - \frac{1}{2}\sigma \|x'\|^2) \\ \Leftrightarrow & f((1-\lambda)x + \lambda x') \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') - \frac{1}{2}(1-\lambda)\sigma \|x\|^2 - \frac{1}{2}\lambda\sigma \|x'\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2}\sigma \|(1-\lambda)x + \lambda x'\|^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Thực hiện biến đổi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma \|(1-\lambda)x + \lambda x'\|^2 - \frac{1}{2}(1-\lambda)\sigma \|x\|^2 - \frac{1}{2}\lambda\sigma \|x'\|^2 \\ = & \frac{1}{2}\sigma \|x\|^2 + \frac{1}{2}\sigma \lambda^2 \|x - x'\|^2 - \sigma \langle x, \lambda(x - x') \rangle - \frac{1}{2}\sigma(1-\lambda)\|x\|^2 - \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x'\|^2 \\ = & \frac{1}{2}\sigma \lambda^2 \|x - x'\|^2 - \sigma \lambda \|x\|^2 + \sigma \lambda \langle x, x' \rangle + \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x\|^2 - \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x'\|^2 \\ = & \frac{1}{2}\sigma \lambda^2 \|x - x'\|^2 - \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x\|^2 + \sigma \lambda \langle x, x' \rangle - \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x'\|^2 \\ = & \frac{1}{2}\sigma \lambda^2 \|x - x'\|^2 - \frac{1}{2}\sigma \lambda \|x - x'\|^2 \\ = & \frac{1}{2}\sigma \lambda (\lambda - 1) \|x - x'\|^2. \end{aligned}$$

Do vậy, bất đẳng thức (1.4) tương đương với

$$f((1-\lambda)x + \lambda x') \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') - \frac{1}{2}\sigma \lambda (1-\lambda) \|x - x'\|^2.$$

Theo Ví dụ 1.2.5, $\partial f - \sigma I$ đơn điệu. Vậy ∂f đơn điệu mạnh với hệ số σ . □

Từ Tính chất trên với chú ý đến Bổ đề 1.2.20 và Hệ quả 1.2.29 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.2.31 Với $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và số thực $\sigma > 0$. Nếu hàm liên hợp f^* của f lồi mạnh với hệ số σ thì

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq \sigma \|v - v'\|^2 \quad \forall x, x', v \in \partial f(x), v' \in \partial f(x').$$

1.2.6. Ánh xạ đồng bậc

Định nghĩa 1.2.32 Cho ánh xạ đa trị $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, T được gọi là đồng bậc với hệ số $\delta > 0$ trên C nếu

$$\langle v - v', x - x' \rangle \geq \delta \rho^2(T(x), T(x')) \quad \forall x, x' \in C, v \in T(x), v' \in T(x').$$

Ví dụ 1.2.33 Xét ánh xạ $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$, với $C = \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$F(x, 0) := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}.$$

Khi đó, F đồng bậc trên C với hệ số $\delta = \frac{1}{2}$.

Chứng minh. Theo Ví dụ 1.1.12, ta đã biết ánh xạ này Lipschitz trên C với hệ số $L = \sqrt{2}$. Bây giờ, lấy tùy ý $(x, 0), (x', 0) \in C, (x, y) \in T(x), (x', y') \in T(x')$ ta có

$$\langle (x, y) - (x', y'), (x, 0) - (x', 0) \rangle = |x - x'|^2 = \|(x, 0) - (x', 0)\|^2.$$

Từ hai điều trên ta suy ra

$$\rho^2(F(x, 0), F(x', 0)) \leq 2 \|(x, 0) - (x', 0)\|^2 = 2 \langle (x, y) - (x', y'), (x, 0) - (x', 0) \rangle,$$

với mọi $(x, 0), (x', 0) \in C, (x, y) \in T(x), (x', y') \in T(x')$. Vậy $F(x, 0)$ đồng bậc trên C với hệ số $\delta = \frac{1}{2}$. $\square$

Mệnh đề 1.2.34 Nếu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ đồng bậc thì T là ánh xạ Lipschitz.

Chứng minh. Giả sử ánh xạ T đồng bậc với hệ số $\delta > 0$ trên C , khi đó với mọi $x, x' \in C, v \in T(x), v' \in T(x')$ ta có

$$\delta \rho^2(T(x), T(x')) \leq \langle v - v', x - x' \rangle \leq \|v - v'\| \cdot \|x - x'\|.$$

Suy ra

$$\delta \rho^2(T(x), T(x')) \leq \|x - x'\| \inf_{v' \in T(x')} \|v - v'\| \quad \text{với } v \in T(x) \text{ cố định tùy ý,}$$

do đó

$$\delta\rho^2(T(x), T(x')) \leq \|x - x'\| \sup_{v \in T(x)} \inf_{v' \in T(x')} \|v - v'\| = \|x - x'\| d(T(x), T(x')).$$

Tương tự ta có

$$\delta\rho^2(T(x), T(x')) \leq \|x - x'\| \sup_{v' \in T(x')} \inf_{v \in T(x)} \|v - v'\| = \|x - x'\| d(T(x'), T(x)).$$

Vậy

$$\delta\rho^2(T(x), T(x')) \leq \|x - x'\| \rho(T(x), T(x')) \|x - x'\|.$$

Hay

$$\rho(T(x), T(x')) \leq \frac{1}{\delta} \|x - x'\|.$$

□

Ngược lại ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2.35 Nếu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là ánh xạ Lipschitz và đơn điệu mạnh thì T là ánh xạ đồng bức.

Chứng minh. Giả sử T là ánh xạ Lipschitz với hệ số $L > 0$ và đơn điệu mạnh với hệ số $\sigma > 0$ trên C . Áp dụng trực tiếp định nghĩa, với mọi $x, x' \in C$ và $v \in T(x), v' \in T(x')$, ta có

$$\begin{aligned} \langle v - v', x - x' \rangle &\geq \sigma \|x - x'\|^2 \\ &\geq \frac{\sigma}{L^2} \rho^2(T(x), T(x')). \end{aligned}$$

□

CHƯƠNG 2

Bất đẳng thức biến phân đa trị

Chương này gồm hai phần, phần đầu định nghĩa bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVIP) và hai trường hợp đặc biệt là bài toán quy hoạch lồi và bài toán bù. Bên cạnh đó, ta xét một vài ví dụ thực tế của bài toán MVIP. Trong phần tiếp theo phát biểu một số kết quả về điều kiện có nghiệm của bài toán MVIP và tính chất nghiệm của bài toán đó. Tài liệu tham khảo chính của chương này là [2], [5] và [6].

2.1. Phát biểu bài toán và các ví dụ minh họa

Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, cho $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là một ánh xạ đa trị, ta luôn giả sử $C \subseteq \text{dom}F$, trong đó theo định nghĩa

$$\text{dom}F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

Ta cũng luôn giả sử rằng $F(x)$ lồi, đóng với mọi $x \in \text{dom}F$. Khi đó, *bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị* (được viết tắt là MVIP) có thể được phát biểu như sau:

$$(MVIP) \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in C \text{ và } v^* \in F(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \end{cases} \quad (2.1)$$

F được gọi là *ánh xạ giá* của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVIP).

Một trường hợp riêng điển hình của bài toán MVIP là *bài toán quy hoạch lồi*. Ta có cách tiếp cận bài toán dựa trên mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.1 Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$. Hàm $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ là lồi, khả vi phân trên C . Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán

$$\min\{f(x) \mid x \in C\} \quad (2.2)$$

khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^* \in C \text{ và } v^* \in \partial f(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử x^* là nghiệm của bài toán (2.2) và $v^* \in \partial f(x^*)$. Khi đó $x^* \in C, f(x^*) \leq f(x), \forall x \in C$ và $\langle v^*, x - x^* \rangle \geq f(x) - f(x^*)$. Suy ra $\langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$

Ngược lại, giả sử $x^* \in C$ và $v^* \in \partial f(x^*)$ sao cho $\langle v^*, x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$. Điều này có nghĩa là

$$\begin{aligned} \langle v^*, x - x^* \rangle &\geq f(x) - f(x^*), \\ \text{và } \langle v^*, x - x^* \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

với $\forall x \in C$. Do đó, $f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in C$, hay x^* là nghiệm của bài toán (2.2). $\square$

Từ Mệnh đề 2.1.1, khi f là hàm khả vi trên C , suy ra ngay rằng bài toán (2.2) tương đương với bài toán:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho} \\ \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \end{cases}$$

Chú ý rằng khi C là một nón lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n$, thì bài toán MVIP trở thành bài toán bù. Cụ thể ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1.2 Nếu C là một nón lồi, đóng trong $\mathbb{R}^n$, F là ánh xạ đơn trị, thì bài toán MVIP tương đương với bài toán bù sau:

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in C \text{ sao cho} \\ F(x) \in C^+ \text{ và } \langle F(x), x \rangle = 0, \end{cases}$$

trong đó

$$C^+ := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C\}$$

là nón đối ngẫu của C .

Chứng minh. Nếu x là nghiệm của bất đẳng thức biến phân thì

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Do C là nón lồi, $x \in C$ nên $x + y \in C$ với mọi $y \in C$. Trong bất đẳng thức trên thay y bởi $x + y$ ta có $\langle F(x), x + y - x \rangle = \langle F(x), y \rangle \geq 0, \forall y \in C$. Ngoài ra nếu chọn $y = 0$ ta có $0 \leq -\langle F(x), x \rangle \leq 0$. Suy ra $\langle F(x), x \rangle = 0$.

Điều ngược lại mọi nghiệm của bài toán bù đều là nghiệm của bất đẳng thức biến phân là hiển nhiên. $\square$

Như vậy, bài toán bù cũng là một trường hợp đặc biệt của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Dưới đây ta xét hai ví dụ thực tế của bài toán MVIP.

Ví dụ 2.1.3 (Bài toán cân bằng mạng giao thông).

Xét một mạng giao thông được cho bởi một mạng luồng hữu hạn. Gọi

- $\mathcal{N}$: tập hợp các nút của mạng.

- $\mathcal{A}$: là tập hợp các cạnh (mỗi cạnh được gọi là một đoạn đường).

Giả sử $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{N}$ sao cho $\mathcal{O} \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Mỗi phần tử của $\mathcal{O}$ được gọi là điểm nguồn, còn mỗi phần tử của $\mathcal{D}$ được gọi là điểm đích. Mỗi điểm nguồn và điểm đích được nối với nhau bởi một tập hợp liên tiếp các cạnh (được gọi là một tuyến đường). Ký hiệu:

- f_a^i là mật độ giao thông của phương tiện i trên đoạn đường $a \in \mathcal{A}$. Đặt f là vec-tơ có các thành phần là f_a^i với $i \in I$ và $a \in \mathcal{A}$ (I là tập hợp các phương tiện giao thông).

- c_a^i là chi phí khi sử dụng phương tiện giao thông i trên đoạn đường $a \in \mathcal{A}$. Đặt c là vec-tơ có các thành phần là c_a^i với $i \in I, a \in \mathcal{A}$.

- d_w^i là nhu cầu sử dụng loại phương tiện $i \in I$ trên tuyến đường $w = (O, D)$ với $O \in \mathcal{O}, D \in \mathcal{D}$.

Giả sử rằng chi phí giao thông phụ thuộc vào lưu lượng, tức là $c = c(f)$ là một hàm của f .

- λ_w^i là mức độ chi phí trên tuyến đường w của phương tiện giao thông i .

- x_w^i là mật độ giao thông của phương tiện $i \in I$ trên tuyến $w \in \mathcal{O} \times \mathcal{D}$.

Giả sử trong mạng trên, phương trình cân bằng sau được thoả mãn

$$d_w^i = \sum_{p \in P_w} x_p^i \quad \forall i \in I, w \in \mathcal{O} \times \mathcal{D}, \quad (2.3)$$

trong đó, P_w ký hiệu tập hợp các tuyến đường của $w = (O, D)$ (nối điểm nguồn O và điểm đích D). Theo phương trình (2.3), thì nhu cầu sử dụng loại phương tiện i trên tuyến đường w bằng đúng tổng mật độ giao thông của phương tiện đó trên mọi tuyến đường nối điểm nguồn và điểm đích của tuyến đường đó. Khi đó ta có

$$f_a^i = \sum_{p \in P_w} x_p^i \delta_{ap} \quad \forall i \in I, w \in \mathcal{O} \times \mathcal{D}, \quad (2.4)$$

trong đó

$$\delta_{ap} := \begin{cases} 1 & \text{nếu } a \in p \\ 0 & \text{nếu } a \notin p \end{cases}$$

Với mỗi tuyến đường p nối một điểm nguồn và một điểm đích, đặt

$$c_p^i = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a^i \delta_{ap}. \quad (2.5)$$

Như vậy, c_p^i là một chi phí khi sử dụng phương tiện i trên tuyến đường p . Đặt d là vec-tơ có các thành phần là d_w^i ($i \in I, w \in \mathcal{O} \times \mathcal{D}$) và đặt f là vec-tơ có các thành phần là f_a^i ($i \in I, a \in \mathcal{O} \times \mathcal{D}$). Một cặp (d^*, f^*) thoả mãn các điều kiện (2.3) và (2.4) được gọi là điểm cân bằng của mạng giao thông nếu

$$c_p^i(f^*) \begin{cases} = \lambda_w^i(d^*) & \text{khi } x_p^i > 0, \\ > \lambda_w^i(d^*) & \text{khi } x_p^i = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

với mỗi $i \in I$ và mỗi tuyến đường p . Theo định nghĩa này, tại điểm cân bằng đối với mọi loại phương tiện giao thông và mọi tuyến đường, chi phí sẽ thấp nhất khi có lưu lượng giao thông trên tuyến đó. Trái lại, chi phí sẽ không phải thấp nhất. Đặt

$$K = \{(f, d) \mid \exists x \geq 0 \text{ sao cho (2.3) và (2.4) đúng}\}.$$

Khi đó, theo [6], ta có định lý sau:

Định lý 2.1.4 Một cặp vec-tơ $(f^*, d^*) \in K$ là một điểm cân bằng của mạng giao thông khi và chỉ khi nó là nghiệm của bất đẳng thức biến phân sau:

$$\text{Tìm } (f^*, d^*) \in K \text{ sao cho } \langle (c(f^*), \lambda(d^*)), (f, d) - (f^*, d^*) \rangle \geq 0 \quad \forall (f, d) \in K.$$

Ví dụ 2.1.5 (Bài toán kinh tế bán độc quyền). Giả sử có n công ty cùng sản xuất một loại sản phẩm và lợi nhuận p_i của mỗi công ty i phụ thuộc vào tổng số lượng sản phẩm của tất cả các công ty $\sigma := \sum_{j=1}^n x_j$. Ký hiệu $h_i(x_i)$ là chi phí của công ty i khi sản xuất ra lượng hàng hoá x_i . Giả sử rằng lợi nhuận của công ty i được cho bởi

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i p_i \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) - h_i(x_i) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.7)$$

trong đó $p(\sum_{j=1}^n x_j)$ là giá của một đơn vị sản phẩm, phụ thuộc vào tổng sản phẩm, còn hàm chi phí của mỗi công ty i chỉ phụ thuộc vào mức độ sản xuất của công ty đó.

Đặt $U_i \subset \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, n)$ là tập chiến lược của công ty i . Lẽ dĩ nhiên, mỗi công ty cần xác định cho mình một mức độ sản xuất để đạt được lợi nhuận cao nhất. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, việc tất cả các công ty đều có lợi nhuận cực đại là khó có thể được. Vì vậy người ta dùng đến khái niệm cân bằng:

Một điểm $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in U := U_1 \times \dots \times U_n$ được gọi là *điểm cân bằng Nash* nếu

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad \forall y_i \in U_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Trong mô hình cân bằng Cournot cổ điển, hàm chi phí và hàm lợi nhuận của mỗi công ty là affine có dạng

$$p_i(\sigma) \equiv p(\sigma) = \alpha_0 - \beta\sigma, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \text{với } \sigma = \sum_{i=1}^n x_i, \\ h_i(x_i) = \mu_i x_i + \zeta_i, \quad \mu_i \geq 0, \quad \zeta_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$\alpha^T = (\alpha_0, \dots, \alpha_0), \quad \mu^T = (\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Theo [6], điểm x^* là điểm cân bằng Nash khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân:

$$\begin{cases} \text{Tìm điểm } x \in U \text{ sao cho} \\ \langle \tilde{A}x + \mu - \alpha, y - x \rangle + y^T A y - x^T A x \geq 0 \quad \forall y \in U. \end{cases}$$

2.2. Sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm

Định lý 2.2.1 Cho ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, $f : \text{gph } F \rightarrow \mathbb{R}$, và $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được xác định bởi công thức

$$g(x) = \sup_{y \in F(x)} f(x, y).$$

Khi đó,

- (i) Nếu f và F nửa liên tục dưới, thì g cũng là nửa liên tục dưới.
- (ii) Nếu f và F nửa liên tục trên và $F(x)$ compact với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, thì g cũng là nửa liên tục trên.

Định lý dưới đây được đưa ra bởi Ky Fan (thường được gọi là bất đẳng thức Ky Fan), và sau đó được mở rộng bởi H. Brézis, L Nirenberg và G. Stampacchia.

Định lý 2.2.2 Cho C là một tập lồi, đóng của không gian $\mathbb{R}^n$, và song hàm $\phi : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $\phi(x, x) = 0 \quad \forall x \in C$, $\phi(\cdot, v)$ là nửa liên tục trên với mỗi $v \in C$ và $\phi(u, \cdot)$ là hàm lồi trên C với mỗi $u \in C$. Giả sử rằng một trong các giả thiết sau đây đúng:

- (i) C là tập bị chặn.
- (ii) Tồn tại một tập con U khác rỗng và bị chặn của C sao cho với mọi $u \in C \setminus U$ tồn tại $v \in U$ thoả mãn $\phi(u, v) < 0$.

Khi đó, tồn tại $u^* \in C$ sao cho

$$\phi(u^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in C.$$

Để áp dụng cho bài toán MVIP, với mỗi $x \in C$ và $w \in F(x)$, ta đặt

$$\phi(x, y) := \max_{w \in F(x)} \{\langle w, y - x \rangle\}. \quad (2.8)$$

Giả thiết thêm rằng với mỗi $x \in C$, $F(x)$ là một tập compact. Khi đó, theo Định lý 2.2.1, hàm $\phi(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên theo biến x với mỗi $y \in C$. $\phi(x, \cdot)$ là hàm lồi theo biến y với mỗi $x \in C$ cố định. Như vậy, hàm ϕ thoả mãn các giả thiết của Định lý 2.2.2. Khi đó, ta có định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán MVIP như sau.

Định lý 2.2.3 Cho C là một tập lồi, đóng của không gian $\mathbb{R}^n$; Cho $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ thoả mãn F là nửa liên tục trên, $F(x)$ lồi compact với mỗi $x \in C$. Giả sử rằng một trong các điều kiện sau đây đúng:

(i) C là tập bị chặn.

(ii) Tồn tại một tập con U khác rỗng và bị chặn của C sao cho với mọi $x \in C \setminus U$ tồn tại $y \in U$ thoả mãn

$$\langle w, x - y \rangle > 0 \quad \forall w \in F(x).$$

Khi đó, bài toán $MVIP$ có nghiệm.

Định lý 2.2.4 Cho một tập lồi compact $C \subset \mathbb{R}^n$, và một ánh xạ đa trị đóng $F : C \rightarrow 2^D$ từ C vào một tập compact $D \subset \mathbb{R}^n$, sao cho với mọi $x \in C$, $F(x)$ là tập lồi compact không rỗng. Khi ấy bài toán $MVIP$ có nghiệm.

Chứng minh. Xem [2], Định lý 21, trang 305 .

Tính chất về nghiệm của bài toán $MVIP$ được phát biểu qua mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.2.5 Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$, F như trong bài toán $MVIP$. Khi đó,

(i) Nếu F đơn điệu ngặt trên C , thì bài toán $MVIP$ có nhiều nhất một nghiệm.

(ii) Nếu F đơn điệu mạnh, nửa liên tục trên và $F(x)$ lồi, đóng, khác rỗng với mọi $x \in C$, thì bài toán $MVIP$ có duy nhất một nghiệm.

CHƯƠNG 3

Phương pháp lặp Banach giải bài toán (MVIP) đơn điệu mạnh

Như ta đã biết, phương pháp lặp theo nguyên lý ánh xạ co Banach là một kết quả nổi tiếng và là phương pháp cơ bản, rất hiệu quả để tính điểm bất động của một ánh xạ co. Nguyên lý này sau đó được Nadler mở rộng cho ánh xạ đa trị (xem [2], Định lý 14).

Trong chương này, chúng ta sẽ dùng cách tiếp cận điểm bất động theo phương pháp lặp của nguyên lý ánh xạ co Banach để giải bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (2.1) được định nghĩa ở Chương 2. Ta sẽ xét trường hợp khi F là ánh xạ đơn điệu mạnh.

Chương này sẽ xét đến tính chất co của ánh xạ nghiệm được xây dựng từ bài toán (2.1), trên cơ sở đó trình bày thuật toán lặp Banach và chứng minh tính chất hội tụ của thuật toán.

3.1. Tính chất co của ánh xạ nghiệm

Bổ đề 3.1.1 *Giả sử $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi đóng khác rỗng và ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ là L -Lipschitz trên C sao cho $F(x)$ là lồi đóng khác rỗng với mọi $x \in C$. Khi đó với mọi $x, x' \in C$ và $w \in F(x)$, đều tồn tại $w' \in F(x')$ (nói riêng $w' = P_{F(x')}(w)$), sao cho*

$$\|w - w'\| \leq L\|x - x'\|,$$

trong đó, $P_{F(x')}(w)$ là hình chiếu vuông góc của w trên $F(x')$. Ngược lại, nếu ánh xạ F thoả mãn điều kiện trên thì F là ánh xạ L -Lipschitz.

Chứng minh. Dùng định nghĩa của hình chiếu $w' = P_{F(x')}(w)$, ta có

$$\|w - w'\| = \min_{v' \in F(x')} \|w - v'\|. \quad (3.1)$$

Theo định nghĩa của khoảng cách Hausdorff, ta được

$$\begin{aligned} \rho(F(x), F(x')) &= \max\{d(F(x), F(x')), d(F(x'), F(x))\} \\ &\geq d(F(x), F(x')) \\ &= \max_{v \in F(x)} \min_{v' \in F(x')} \|v - v'\| \\ &\geq \min_{v' \in F(x')} \|w - v'\|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Kết hợp (3.1), (3.2) và giả thiết F là L -Lipschitz trên C , ta nhận được

$$\|w - w'\| \leq L\|x - x'\|.$$

Ngược lại, nếu với mọi $x, x' \in C, w \in F(x)$, đều tồn tại $w' \in F(x')$ sao cho

$$\|w - w'\| \leq L\|x - x'\|.$$

Do vậy, với $w \in F(x)$ cố định tùy ý thì

$$\inf_{w' \in F(x')} \|w - w'\| \leq L\|x - x'\|,$$

suy ra

$$\sup_{w \in F(x)} \inf_{w' \in F(x')} \|w - w'\| \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Do đó,

$$d(F(x), F(x')) \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Tương tự

$$d(F(x'), F(x)) \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Vậy ta có

$$\rho(F(x), F(x')) \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

□

Trong trường hợp ánh xạ F là đơn trị, bài toán MVIP được viết lại dưới dạng như sau (viết tắt là VI):

$$(VI) \quad \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho} \\ \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \end{cases}$$

Khi xét bài toán VI, Auslender đã đưa ra hàm chặn (gap, merit) bằng cách với mỗi $x \in C$, đặt

$$g_1(x) = \sup\{\langle F(x), x - y \rangle \mid y \in C\}.$$

Ta dễ nhận thấy rằng $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in C$. Theo [7], bài toán VI có thể được viết dưới dạng bài toán tối ưu

$$\inf\{g_1(x) \mid x \in C\}. \quad (3.3)$$

Tuy nhiên, một khó khăn của bài toán này là trong trường hợp tổng quát, hàm g_1 có thể không khả vi. Để giải quyết khó khăn này, Fukushima (xem [9]) đã đề xuất hàm chặn mới có dạng

$$g_2(x) = \max\{-\frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x) \rangle - \langle F(x), y - x \rangle \mid y \in C\}, \quad (3.4)$$

trong đó, G là một ma trận đối xứng, xác định dương.

Cũng như đối với hàm chặn g_1 , ta có $g_2(x) \geq 0$ với mọi $x \in C$ và bài toán VI có thể được viết dưới dạng bài toán tối ưu

$$\inf\{g_2(x) \mid x \in C\}. \quad (3.5)$$

Theo [9], hàm g_2 được xác định bởi công thức (3.4) là khả vi trên C với F là hàm khả vi. Khi đó, có thể dùng phương pháp tối ưu để giải bài toán VI thông qua việc giải bài toán trơn (3.4).

Dựa vào cách xây dựng các hàm chặn ở trên, ta xét trở lại bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (2.1). Với mỗi $x \in C$ và $w \in F(x)$, đặt $y = h(x, w)$ là nghiệm duy nhất của bài toán qui hoạch

$$\min\{\frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle w, y - x \rangle \mid y \in C\}, \quad (3.6)$$

trong đó G là một ma trận đối xứng, xác định dương. Do C khác rỗng, lồi, đóng và hàm mục tiêu của bài toán (3.6) lồi mạnh (do đó, theo Tính chất 1.1.30, hàm

$G(y - x) + w$ đơn điệu mạnh), nửa liên tục trên trên C , nên $h(x, w)$ được xác định và duy nhất (theo Mệnh đề 2.2.5).

Theo Mệnh đề 2.1.1, $h(x, w)$ là nghiệm của bài toán (3.6) khi và chỉ khi $h(x, w)$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân

$$\langle w + G(h(x, w) - x), y - h(x, w) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.7)$$

Với mỗi $x \in C$, ta định nghĩa ánh xạ sau:

$$H(x) := \{h(x, w) \mid w \in F(x)\}.$$

Nói chung, H là một ánh xạ đa trị và $\text{dom} H \subseteq C$. Để tiện cho việc trình bày, ta sẽ gọi H là ánh xạ nghiệm của bài toán MVIP. Kết quả sau đây chỉ ra rằng điểm x^* là nghiệm của bài toán MVIP khi và chỉ khi x^* là điểm bất động của ánh xạ H .

Định lý 3.1.2 x^* là nghiệm của bài toán MVIP khi và chỉ khi $x^* \in H(x^*)$.

Chứng minh. Giả sử x^* là nghiệm của bài toán MVIP. Điều đó có nghĩa rằng tồn tại $w^* \in F(x^*)$ sao cho (x^*, w^*) thỏa mãn bất đẳng thức

$$\langle w^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (3.8)$$

Với mỗi (x^*, w^*) cho trước, do $h(x^*, w^*)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (3.6), nên $h(x^*, w^*) \in C$. Thay thế x bởi $h(x^*, w^*)$ trong bất đẳng thức (3.8), ta được

$$\langle w^*, h(x^*, w^*) - x^* \rangle \geq 0. \quad (3.9)$$

Bất đẳng thức (3.7) chỉ ra rằng

$$\langle w^* + G(h(x^*, w^*) - x^*), y - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.10)$$

Thay thế y bởi $x^* \in C$ trong bất đẳng thức (3.10), ta có

$$\langle w^* + G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0. \quad (3.11)$$

Từ bất đẳng thức (3.9) và (3.11) suy ra

$$\langle G(h(x^*, w^*) - x^*), x^* - h(x^*, w^*) \rangle \geq 0, \quad (3.12)$$

Do ma trận G là đối xứng, xác định dương, ta có $h(x^*, w^*) = x^*$. Suy ra $x^* \in H(x^*)$.

Bây giờ, ta xét chiều ngược lại. Giả sử rằng $x^* \in H(x^*)$. Khi đó, tồn tại w^* thuộc $F(x^*)$ sao cho $x^* = h(x^*, w^*)$. Nhưng với mọi $x \in C, w \in F(x)$, chúng ta luôn có

$$\langle w + G(h(x, w) - x), y - h(x, w) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.13)$$

Thay thế x, w bởi các điểm tương ứng $x^* = h(x^*, w^*), w^*$ trong bất đẳng thức (3.13) ta được

$$\langle w^* + z^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3.14)$$

Điều này có nghĩa rằng x^* là nghiệm của bài toán MVIP. $\square$

Hãy trở lại bài toán (3.4) với C lồi, đóng. Để tiện cho việc trình bày, ta viết bài toán này dưới dạng tương đương là:

$$g_2(x) = -\min\left\{\frac{1}{2}\langle y - x, G(y - x) \rangle + \langle F(x), y - x \rangle \mid y \in C\right\}. \quad (3.15)$$

Vì G là ma trận đối xứng và xác định dương, nên (3.15) là một bài toán quy hoạch lồi mạnh và do đó nó có duy nhất nghiệm. Khi F là ánh xạ đơn trị thì ánh xạ nghiệm H của bài toán MVIP là đơn trị và $H(x)$ chính là nghiệm của bài toán (3.15) với mỗi $x \in C$. Khi đó, kết quả nhận được của Định lý 3.1.2 trùng với kết quả được chỉ ra bởi Fukushima (xem [9]) cho bài toán VI. Cụ thể, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 3.1.3 x^* là nghiệm của bài toán VI khi và chỉ khi $x^* = H(x^*)$.

Dưới đây để đơn giản, ta giả sử $G = \alpha I$, trong đó $\alpha > 0$ và I là ma trận đồng nhất. Khi đó, chúng ta sẽ đưa ra cách điều chỉnh tham số α phù hợp, sao cho ánh xạ nghiệm H có tính chất co trên C . Tham số α được gọi là tham số chính quy hoá. Định lý dưới đây sẽ khẳng định tính chất co của ánh xạ nghiệm H trong trường hợp F là ánh xạ đơn điệu mạnh trên C .

Định lý 3.1.4 Giả sử rằng $F(x)$ là lồi, đóng, khác rỗng với mỗi $x \in C$, F là một ánh xạ đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$ và Lipschitz với hệ số $L > 0$ trên C . Khi đó, với $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, ánh xạ H là co trên C với hệ số $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$. Cụ thể, ta có

$$\rho(H(x), H(x')) \leq \delta \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Chứng minh. Bài toán (3.6) có thể được viết dưới dạng

$$\min_y \left\{ \frac{1}{2} \alpha \|y - x\|^2 + \langle w, y - x \rangle + \delta_C(y) \right\},$$

ở đây δ_C là hàm chỉ của C . Đây là một quy hoạch toàn phương lồi mạnh, do đó nó có duy nhất nghiệm và nghiệm này được ký hiệu bởi $h(x, w)$. Theo Tính chất 1.1.8, ta có

$$0 \in \alpha(h(x, w) - x) + w + N_C(h(x, w)),$$

$N_C(h(x, w))$ là nón pháp tuyến của C tại $h(x, w)$. Điều này có nghĩa rằng tồn tại $z_1 \in N_C(h(x, w))$ sao cho

$$\alpha(h(x, w) - x) + w + z_1 = 0.$$

Do vậy

$$h(x, w) = x - \frac{1}{\alpha}w - \frac{1}{\alpha}z_1. \quad (3.16)$$

Tương tự với $x' \in C, w' \in F(x')$, ta có

$$h(x', w') = x' - \frac{1}{\alpha}w' - \frac{1}{\alpha}z'_1 - \frac{1}{\alpha}z'_2, \quad (3.17)$$

ở đây $z'_1 \in N_C(h(x', w'))$.

Do ánh xạ đa trị N_C là đơn điệu, ta có

$$\langle z_1 - z'_1, h(x, w) - h(x', w') \rangle \geq 0. \quad (3.18)$$

Thay thế z_1 của công thức (3.16) và z'_1 của công thức (3.17) vào công thức (3.18), ta nhận được

$$\langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') - (h(x, w) - h(x', w')), h(x, w) - h(x', w') \rangle \geq 0,$$

điều này tương đương với

$$||h(x, w) - h(x', w')||^2 \leq \langle x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w'), h(x, w) - h(x', w') \rangle. \quad (3.19)$$

Bất đẳng thức này chỉ ra rằng

$$||h(x, w) - h(x', w')||^2 \leq ||x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')|| \cdot ||h(x, w) - h(x', w')||.$$

Như vậy là

$$\begin{aligned} ||h(x, w) - h(x', w')||^2 &\leq ||x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')||^2 \\ &= ||x - x'||^2 - \frac{2}{\alpha} \langle x - x', w - w' \rangle + \frac{1}{\alpha^2} ||w - w'||^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Từ giả thiết ánh xạ F là L -Lipschitz trên C , $F(x')$ đóng với mỗi $x' \in C$ và $w \in F(x)$, nên theo Bổ đề 3.1.1, tồn tại $w' \in F(x')$ sao cho

$$\|w(x) - w(x')\| \leq L\|x - x'\|.$$

Mặt khác, do giả thiết F đơn điệu mạnh với hệ số β nên

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq \beta\|x - x'\|^2,$$

Do vậy, từ bất đẳng thức (3.20), ta có

$$\|(h(x, w) - h(x', w'))\|^2 \leq (1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2})\|x - x'\|^2. \quad (3.21)$$

Nếu chọn hệ số $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, thì $1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2} > 0$. Cuối cùng, từ bất đẳng thức (3.21) ta được

$$\|h(x, w) - h(x', w')\| \leq \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}\|x - x'\|.$$

Đặt $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$, khi đó

$$\|h(x, w) - h(x', w')\| \leq \delta\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C, w \in F(x).$$

Do đó

$$\rho(H(x), H(x')) \leq \delta\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

Chú ý rằng nếu $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$ thì $\delta \in (0, 1)$. Như vậy, ánh xạ đa trị H là co trên C với hệ số δ . □

Chú ý 3.1.5 Kết hợp định nghĩa của ánh xạ H và Định lý 3.1.4, ta nhận thấy nếu F là ánh xạ đơn trị thì ánh xạ nghiệm H là co trên C .

Bây giờ, thay giả thiết đơn điệu mạnh của ánh xạ F bởi giả thiết yếu hơn là F đơn điệu. Khi đó, ta có hệ quả trực tiếp sau:

Hệ quả 3.1.6 Giả sử F là ánh xạ đơn điệu và Lipschitz với hệ số $L > 0$, $F(x)$ là một tập lồi, đóng với mỗi $x \in C$. Khi đó, nếu $\alpha > 0$, thì ánh xạ H có tính chất Lipschitz trên C với hệ số

$$\delta := \frac{\sqrt{L^2 + \alpha^2}}{\alpha}.$$

3.2. Thuật toán lặp Banach cho bài toán (MVIP) đơn điệu mạnh.

Theo Định lý 3.1.4, với giả thiết ánh xạ F là đơn điệu mạnh, ta có thể chọn tham số chính quy α phù hợp sao cho ánh xạ nghiệm H là co trên C . Trong trường hợp này, theo nguyên lý ánh xạ co Banach, được mở rộng bởi Nadler, nghiệm của bài toán MVIP có thể được xấp xỉ bởi quá trình lặp

$$x^{k+1} \in H(x^k), k = 0, 1, \dots$$

với x^0 là một điểm tùy ý của C .

Theo định nghĩa của ánh xạ H , điểm x^{k+1} chính là nghiệm duy nhất của quy hoạch toàn phương lồi mạnh.

Hiển nhiên, khi F đơn trị, ánh xạ nghiệm H cũng đơn trị và khi đó quá trình lặp được viết dưới dạng đơn giản như sau:

$$x^0 \in C, x^{k+1} := H(x^k) \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Mô tả thuật toán và sự hội tụ

Khi thực hiện các thuật toán vô hạn, việc tìm ra một nghiệm tối ưu chính xác là khó thực hiện được. Vì vậy, người ta thường phải lấy nghiệm xấp xỉ với độ chính xác nào đó. Giả sử x^* là nghiệm chính xác của bài toán MVIP, khi đó $x \in C$ được gọi là ϵ -nghiệm của bài toán MVIP nếu $\|x - x^*\| \leq \epsilon$. Thuật toán lặp Banach cho ánh xạ F đơn điệu mạnh trên C được miêu tả chi tiết như sau:

Thuật toán 3.2.1 *Bước đầu. Chọn sai số $\epsilon \geq 0$.*

Chọn tham số chính quy $\alpha > \frac{L^2}{\beta}$, khi F là β -đơn điệu mạnh, ở đây L là hệ số Lipschitz của F .

Chọn $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

Bước lặp $k(k = 0, 1, 2, \dots)$. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$P(x^k) : \min \left\{ \frac{1}{2} \alpha \|x - x^k\|^2 + \langle w^k, x - x^k \rangle \mid x \in C \right\},$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1} . Tìm $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ sao cho

$$\|w^{k+1} - w^k\| \leq L \|x^{k+1} - x^k\|,$$

chẳng hạn có thể chọn $w^{k+1} := P_{F(x^{k+1})}(w^k)$ (hình chiếu của w^k trên $F(x^{k+1})$).

Xét hai trường hợp:

-Trường hợp 1: Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$, thì thuật toán dừng: x^k là một ϵ -nghiệm của bài toán MVIP.

-Trường hợp 2: Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| > \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$, thì ta thay thế $k := k + 1$ và chuyển sang Bước lặp k .

Theo Định lý 3.1.4, và nguyên lý lặp Banach, ta có mối quan hệ giữa điểm x^k và nghiệm chính xác x^* của bài toán MVIP được xác định bởi công thức sau:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \quad \forall k,$$

ở đây $0 < \delta < 1$ là hệ số co của ánh xạ nghiệm H . Theo Định lý 3.1.4

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}},$$

khi F là β -đơn điệu mạnh.

Định lý 3.2.2 Dưới giả thiết của Định lý 3.1.4, dãy $\{x^k\}$ được xây dựng bởi Thuật toán 3.2.1 thoả mãn

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\delta^{k+1}}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \quad \forall k, \quad (3.22)$$

ở đây x^* là nghiệm chính xác của bài toán MVIP. Nếu ta thêm giả thiết ánh xạ F là đóng trên C , thì dãy $\{w^k\}$ hội tụ tới $w^* \in F(x^*)$ với tốc độ hội tụ

$$\|w^k - w^*\| \leq \frac{L\delta^k}{1-\delta} \|x^0 - x^1\| \quad \forall k.$$

Chứng minh. Trước hết, ta giả sử các giả thiết của Định lý 3.1.4 được thoả mãn. Theo Bổ đề 3.1.1, ta có

$$x^* \in H(x^*) := \{h(x^*, w) \mid w \in F(x^*)\}.$$

Lấy $w^* \in F(x^*)$ sao cho $x^* = h(x^*, w^*) \in H(x^*)$. Theo cách xây dựng w^{k+1} của Thuật toán 3.2.1, ta được

$$\|w^{k+1} - w^k\| \leq L \|x^{k+1} - x^k\| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Khi đó theo Định lý 3.1.4 ta nhận được

$$||h(x^{k+1}, w^{k+1}) - h(x^k, w^k)|| \leq \delta ||x^{k+1} - x^k|| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Từ $h(x^{k+1}, w^{k+1}) = x^{k+2}$ suy ra

$$||x^{k+2} - x^{k+1}|| \leq \delta ||x^{k+1} - x^k|| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Theo nguyên lý ánh xạ co Banach, ta có

$$||x^k - x^*|| \leq \frac{\delta^{k+1}}{1 - \delta} ||x^0 - x^1|| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Như vậy, $x^k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow +\infty$. Hơn nữa, sử dụng tính chất co của ánh xạ nghiệm H , ta đạt được

$$||x^{p+k} - x^k|| \leq \frac{\delta^k(1 - \delta^p)}{1 - \delta} ||x^{k+1} - x^k|| \quad \forall k, p.$$

Cho $p \rightarrow +\infty$, ta được

$$||x^k - x^*|| \leq \frac{\delta^k}{1 - \delta} ||x^{k+1} - x^k|| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Nếu Trường hợp 1 của Thuật toán 3.2.1 xảy ra

$$||x^{k+1} - x^k|| \leq \frac{\epsilon(1 - \delta)}{\delta^k}$$

và do đó $||x^k - x^*|| \leq \epsilon$. Điều đó có nghĩa là x^k là một ϵ -nghiệm của bài toán MVIP.

Mặt khác, từ

$$||w^{k+1} - w^k|| \leq L ||x^{k+1} - x^k||$$

suy ra

$$\begin{aligned} ||w^{k+p} - w^j|| &\leq ||w^{k+1} - w^k|| + ||w^{k+2} - w^{k+1}|| + \dots + ||w^{k+p} - w^{k+p-1}|| \\ &\leq L(||x^{k+1} - x^k|| + ||x^{k+2} - x^{k+1}|| + \dots + ||x^{k+p} - x^{k+p-1}||) \\ &\leq L(\delta^k + \delta^{k+1} + \dots + \delta^{k+p-1}) ||x^1 - x^0||. \end{aligned}$$

Do vậy

$$||w^{k+p} - w^k|| \leq \frac{L\delta^k(\delta^p - 1)}{\delta - 1} ||x^1 - x^0||. \quad (3.23)$$

Điều này chỉ ra rằng $\{w^k\}$ là dãy Cauchy trong không gian $\mathbb{R}^n$. Do đó, dãy $\{w^k\}$ hội tụ tới $w^* \in C$. Do F là ánh xạ đồng trên C nên $w^* \in F(x^*)$. Trong đẳng thức (3.23), ta cho $p \rightarrow +\infty$ và nhận được

$$\|w^k - w^*\| \leq \frac{L\delta^k}{1-\delta} \|x^1 - x^0\| \quad \forall j.$$

□

Chú ý 3.2.3 • Theo Định lý 3.1.4, $\delta := \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{L^2}{\alpha^2}}$ ta thấy rằng hệ số co δ là một hàm theo tham số chính quy hoá α . Tính toán thông thường đã chỉ ra rằng δ nhỏ nhất khi chọn tham số $\alpha = \frac{L^2}{\beta}$. Do vậy, Thuật toán 3.2.1 hội tụ tốt nhất khi ta chọn tham số $\alpha = \frac{L^2}{\beta}$.

• Trong Thuật toán 3.2.1, tại Bước lặp k , thuật toán này đòi hỏi phải tìm $w^{k+1} \in F(x^{k+1})$ sao cho

$$\|w^{k+1} - w^k\| \leq L \|x^{k+1} - x^k\|.$$

Việc tính toán này là dễ dàng khi với mỗi $x \in C$, $F(x)$ có một cấu trúc đặc biệt như không gian con, hình hộp, hình cầu, đơn hình.

• Ta áp dụng Thuật toán 3.2.1 cho bài toán VI, ở đây F là ánh xạ đơn trị. Khi đó, bài toán phụ của thuật toán này là tìm hình chiếu của một điểm trên tập C . Trong trường hợp này, ta thu lại được các thuật toán đã có. Cụ thể, thuật toán được trình bày như sau.

Thuật toán 3.2.4 *Bước đầu. Chọn sai số $\epsilon \geq 0$.*

Chọn tham số chính quy $\alpha > \frac{L^2}{2\beta}$, khi F là β -đơn điệu mạnh, ở đây L là hệ số Lipschitz của ánh xạ đơn trị F .

Chọn $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$.

Bước lặp $k(k = 0, 1, 2, \dots)$

Giải bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh

$$P(x^k) : \min \left\{ \frac{1}{2} \alpha \|x - x^k\|^2 + \langle F(x^k), x - x^k \rangle \mid x \in C \right\},$$

thu được nghiệm duy nhất x^{k+1} .

Xét hai trường hợp:

-Trường hợp 1: Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$, thì thuật toán dừng: x^k là một ϵ -nghiệm của bài toán VI.

-Trường hợp 2: Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| > \frac{\epsilon(1-\delta)}{\delta^k}$, thì ta thay thế $k := k + 1$ và chuyển sang Bước lặp k .

Như vậy, trong chương này ta đã dùng cách tiếp cận điểm bất động cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị với ánh xạ giá là đơn điệu mạnh. Ta đã chứng tỏ rằng việc tìm nghiệm của bài toán MVIP được qui về tìm điểm bất động của một ánh xạ đa trị H . Bằng cách sử dụng kỹ thuật điều chỉnh, ta đã chứng tỏ rằng ánh xạ nghiệm H có tính chất co (theo khoảng cách Hausdorff). Cụ thể, khi ánh xạ giá là đơn điệu mạnh, tính chất co này cho phép ta xây dựng một thuật toán lặp theo kiểu nguyên lý ánh xạ co Banach để giải bài toán MVIP. Cách tiếp cận này cho phép thiết lập dễ dàng tốc độ hội tụ của phương pháp lặp.

CHƯƠNG 4

Phương pháp lặp Banach giải bài toán (MVIP) đồng bức

Trong chương này, ta xét bài toán MVIP với giả thiết F là ánh xạ đồng bức trên C . Trong trường hợp này, bài toán MVIP có thể không duy nhất nghiệm. Chúng ta sẽ chỉ ra cách chọn tham số chính quy hoá α sao cho ánh xạ nghiệm H là không giãn trên C . Trên cơ sở đó xây dựng thuật toán giải bài toán MVIP với F là ánh xạ đồng bức.

4.1. Tính không giãn của ánh xạ nghiệm

Định lý 4.1.1 *Giả sử rằng ánh xạ F là đồng bức với hệ số $\gamma > 0$ trên C , tập $F(x)$ là lồi, đóng với mỗi $x \in C$. Khi đó, nếu $\alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$ thì ánh xạ nghiệm H là không giãn trên C .*

Chứng minh. Bằng cách suy luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 3.1.4, ta có

$$\|h(x, w) - h(x', w')\|^2 \leq \|x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w')\|^2 \quad \forall x, \quad (4.1)$$

$$\forall x' \in C, w \in F(x), w' \in F(x').$$

Từ tính đồng bức của F trên C với hệ số γ suy ra

$$\gamma \rho^2(F(x), F(x')) \leq \langle x - x', w - w' \rangle \quad \forall x, x' \in C, w \in F(x), w' \in F(x').$$

Vậy,

$$\begin{aligned}
& \left\| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w - w') \right\|^2 \\
&= \left\| x - x' \right\|^2 - \frac{2}{\alpha} \langle x - x', w - w' \rangle + \frac{1}{\alpha^2} \|w - w'\|^2 \\
&\leq \left\| x - x' \right\|^2 - \frac{2\gamma}{\alpha} \rho^2(F(x), F(x')) + \frac{1}{\alpha^2} \|w - w'\|^2 \quad \forall x, x' \in C, w \in F(x), w' \in F(x').
\end{aligned}$$

Mặt khác, với mọi $x, x' \in C, w(x) \in F(x)$, tồn tại $w(x') = P_{F(x')}(w(x))$ sao cho

$$\rho(F(x), F(x')) \geq \|w(x) - w(x')\|.$$

Do vậy,

$$\begin{aligned}
& \left\| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w(x) - w(x')) \right\|^2 \\
&\leq \left\| x - x' \right\|^2 - \frac{2\gamma}{\alpha} \|w(x) - w(x')\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|w(x) - w(x')\|^2 \\
&\leq \left\| x - x' \right\|^2 - \left(\frac{2\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \|w(x) - w(x')\|^2.
\end{aligned}$$

Từ $\alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$ suy ra

$$\left\| x - x' - \frac{1}{\alpha}(w(x) - w(x')) \right\|^2 \leq \left\| x - x' \right\|^2 \quad \forall x, x' \in C, w(x) \in F(x). \quad (4.2)$$

Kết hợp (4.1) và (4.2), ta nhận được

$$\|h(x, w(x)) - h(x', w(x'))\| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C, w(x) \in F(x).$$

Do đó,

$$\rho(H(x), H(x')) \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in C.$$

□

Như vậy, tuy rằng bài toán MVIP có thể không duy nhất nghiệm trong trường hợp ánh xạ F là đồng bức, nhưng Định lý 4.1.1 chỉ ra rằng ta có thể tìm được một nghiệm của bài toán này thông qua việc tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn H . Để tìm điểm bất động của ánh xạ H , ta sẽ sử dụng định lý sau.

Định lý 4.1.2 Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập lồi, compact, khác rỗng và $S : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$. Giả sử rằng S là ánh xạ đóng, $\text{dom } S \supseteq C$ và không giãn trên C . Với mỗi $\lambda \in (0, 1)$, ta đặt

$$S_\lambda := (1 - \lambda)I + \lambda S.$$

Khi đó, các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} x^{k+1} &:= (1 - \lambda)x^k + \lambda y^k, \\ y^k &\in S(x^k), \\ \|y^{k+1} - y^k\| &\leq \|x^{k+1} - x^k\| \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

sẽ thoả mãn

$$\|x^k - y^k\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow +\infty.$$

Hơn nữa, bất kỳ một điểm tụ nào của dãy $\{x^k\}$ đều là điểm bất động của ánh xạ S .

Để chứng minh định lý này, ta cần tới bổ đề sau:

Bổ đề 4.1.3 Dưới giả thiết của Định lý 4.1.2, với mọi $i, m = 0, 1, \dots$, ta có

$$\|y^{i+m} - x^i\| \geq (1 - \lambda)^{-m} [\|y^{i+m} - x^{i+m}\| - \|y^i - x^i\|] + (1 + \lambda m) \|y^i - x^i\|. \quad (4.3)$$

Chứng minh của Bổ đề 4.1.3. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học theo m . Với $m = 0$, thì (4.3) hiển nhiên đúng với mọi i . Giả sử (4.3) đúng với m và với mọi i . Thay thế i bởi $i + 1$ trong (4.3), suy ra

$$\begin{aligned} \|y^{i+m+1} - x^{i+1}\| &\geq (1 - \lambda)^{-m} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^{i+1} - x^{i+1}\|] \\ &\quad + (1 + \lambda m) \|y^{i+1} - x^{i+1}\|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Từ $x^{k+1} := (1 - \lambda)x^k + \lambda y^k$ với $y^k \in S(x^k)$ với mọi $k = 0, 1, \dots$ suy ra

$$\begin{aligned} \|y^{i+m+1} - x^{i+1}\| &= \|y^{i+m+1} - [(1 - \lambda)x^i + \lambda y^i]\| \\ &\leq \lambda \|y^{i+m+1} - y^i\| + (1 - \lambda) \|y^{i+m+1} - x^i\| \\ &\leq (1 - \lambda) \|y^{i+m+1} - x^i\| + \lambda \sum_{k=0}^m \|x^{i+k+1} - x^{i+k}\|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kết hợp (4.4) và (4.5), ta nhận được

$$\begin{aligned} \|y^{i+m+1} - x^i\| &\geq (1 - \lambda)^{-(m+1)} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^{i+1} - x^{i+1}\|] \\ &\quad + (1 - \lambda)^{-1} (1 + \lambda m) \|y^{i+1} - x^{i+1}\| \\ &\quad - \lambda (1 - \lambda)^{-1} \sum_{k=0}^m \|x^{i+k+1} - x^{i+k}\|. \end{aligned}$$

Do $\|x^{i+k+1} - x^{i+k}\| = \lambda \|y^{k+i} - x^{k+i}\|$, nên dãy $\{\|y^m - x^m\|\}$ là giảm vì

$$\begin{aligned}
\lambda \|y^m - x^m\| &= \|x^{m+1} - x^m\| \\
&= \|(1-\lambda)x^m + \lambda y^m - [(1-\lambda)x^{m-1} - \lambda y^{m-1}]\| \\
&\leq (1-\lambda)\|x^m - x^{m-1}\| + \lambda\|y^m - y^{m-1}\| \\
&\leq \|x^m - x^{m-1}\| \\
&= \lambda\|y^{m-1} - x^{m-1}\|.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\|y^{i+m+1} - x^i\| &\geq (1-\lambda)^{-(m+1)} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^{i+1} - x^{i+1}\|] \\
&\quad + (1-\lambda)^{-1}(1+\lambda m)\|y^{i+1} - x^{i+1}\| \\
&\quad - \lambda^2(1-\lambda)^{-1}(m+1)\|y^i - x^i\| \\
&= (1-\lambda)^{-(m+1)} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^i - x^i\|] \\
&\quad + [(1-\lambda)^{-1}(1+\lambda m) - (1-\lambda)^{-(m+1)}]\|y^{i+1} - x^{i+1}\| \\
&\quad + [(1-\lambda)^{-(m+1)} - \lambda^2(1-\lambda)^{-1}(m+1)]\|y^i - x^i\| \\
&\geq (1-\lambda)^{-(m+1)} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^i - x^i\|] \\
&\quad + [(1-\lambda)^{-1}(1+\lambda m) - (1-\lambda)^{-(m+1)}]\|y^i - x^i\| \\
&\quad + [(1-\lambda)^{-(m+1)} - \lambda^2(1-\lambda)^{-1}(m+1)]\|y^i - x^i\| \\
&= (1-\lambda)^{-(m+1)} [\|y^{i+m+1} - x^{i+m+1}\| - \|y^i - x^i\|] \\
&\quad + [1 + \lambda(m+1)]\|y^i - x^i\|.
\end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức (4.3) đúng với $m+1$. Theo quy nạp toán học, Bổ đề 4.1.3 được chứng minh. □

Chứng minh của Định lý 4.1.2. Đặt

$$d := \sup\{\text{diam } S(x) \mid x \in C\}.$$

Từ tính bị chặn của C và $S : C \rightarrow 2^C$ là ánh xạ không giãn, suy ra $d < +\infty$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y^m - x^m\| = r > 0.$$

Chọn $m \geq \frac{d}{r\lambda}$ và ϵ là một số dương đủ nhỏ sao cho

$$\epsilon(1-\lambda)^{-m} < r.$$

Từ dãy $\{\|y^m - x^m\|\}$ giảm, suy ra tồn tại một số tự nhiên i sao cho

$$0 \leq \|y^i - x^i\| - \|y^{m+i} - x^{m+i}\| \leq \epsilon.$$

Bổ đề 4.1.3 và bất đẳng thức $1 + m\lambda(1 - \lambda)^{-m}$ dẫn đến sự mâu thuẫn sau

$$\begin{aligned} d + r &\leq (1 + m\lambda)r \\ &\leq (1 + m\lambda)\|y^i - x^i\| \\ &\leq \|y^{m+i} - x^i\| + (1 - \lambda)^{-m}[\|y^i - x^i\| - \|y^{m+i} - x^{m+i}\|] \\ &\leq \|y^{m+i} - x^i\| + (1 - \lambda)^{-m}\epsilon \\ &< d + r. \end{aligned}$$

Do vậy, $r = 0$, cụ thể hơn là

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^m - y^m\| = 0. \quad (4.6)$$

Do $x^k \in C$ với mọi k và C compact, nên tồn tại một dãy con x^{k_j} hội tụ tới x^* . Khi đó, do (4.6) nên $y^{k_j} \in S(x^{k_j})$ cũng hội tụ tới x^* . Từ S là ánh xạ đóng, suy ra $x^* \in S(x^*)$. Như vậy, mọi điểm tụ của dãy $\{x^k\}$ đều là điểm bất động của ánh xạ S . $\square$

4.2. Mô tả thuật toán và sự hội tụ

Bây giờ, áp dụng Định lý 4.1.1 cho ánh xạ không giãn H , ta có thể tìm một nghiệm của bài toán MVIP với F là ánh xạ đồng bức với hệ số γ trên C bằng cách tìm điểm bất động của ánh xạ H . Như trên đã thấy, nếu x^k lại chính là nghiệm của bài toán $P(x^k)$, thì x^k là nghiệm của bài toán MVIP. Do đó, trong thuật toán dưới đây, nếu y^k là nghiệm của bài toán $P(x^k)$ và $\|x^k - y^k\| \leq \epsilon$ thì ta có thể coi y^k là một ϵ -nghiệm của bài toán MVIP và dừng thuật toán. Thuật toán cụ thể được trình bày như sau.

Thuật toán 4.2.1 *Bước 0.* Chọn sai số $\epsilon \geq 0$ và $\lambda \in (0, 1)$, $\alpha \geq \frac{1}{2\gamma}$ và tìm $x^0 \in C, w^0 \in F(x^0)$. Đặt $k = 0$.

Bước 1. Giải bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$P(x^k) : \min \left\{ \frac{1}{2}\alpha \|y - x^k\|^2 + \langle w^k, y - x^k \rangle \mid y \in C \right\}$$

để được nghiệm duy nhất y^k .

Nếu $\|y^k - x^k\| \leq \epsilon$, thì dừng thuật toán.

Ngược lại chuyển sang Bước 2.

Bước 2. Lấy

$$x^{k+1} := (1 - \lambda)x^k + \lambda y^k.$$

Tìm $w^{k+1} := P_{F(x^{k+1})}(w^k)$.

Gán $k := k + 1$ và trở lại Bước 1.

Định lý 4.2.2 Ngoài các giả thiết của Định lý 4.1.1, ta giả sử thêm rằng C là tập compact. Khi đó, nếu Thuật toán 4.2.1 không dừng, thì dãy $\{x^k\}$ bị chặn và mọi điểm tụ của nó đều là nghiệm của bài toán $MVIP$. Hơn nữa, $d(x^k, H(x^k)) \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Trong Thuật toán 4.2.1, ta có $w^{k+1} := P_{F(x^{k+1})}(w^k)$ với $w^k \in F(x^k)$.

Từ Bổ đề 3.1.1 và định nghĩa của $\rho(F(x^k), F(x^{k+1}))$ suy ra

$$\|w^{k+1} - w^k\| \leq \rho(F(x^k), F(x^{k+1})).$$

Theo tính chất đồng bức của F trên C với hệ số γ , ta có

$$\gamma \rho^2(F(x^k), F(x^{k+1})) \leq \langle x^k - x^{k+1}, w^k - w^{k+1} \rangle.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|x^k - x^{k+1} - \frac{1}{\alpha}(w^k - w^{k+1})\|^2 &= \|x^k - x^{k+1}\|^2 - \frac{2}{\alpha} \langle x^k - x^{k+1}, w^k - w^{k+1} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \|w^k - w^{k+1}\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^{k+1}\|^2 - \frac{2\gamma}{\alpha} \|w^k - w^{k+1}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2} \|w^k - w^{k+1}\|^2 \\ &= \|x^k - x^{k+1}\|^2 - \left(\frac{2\gamma}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \|w^k - w^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Vì $\alpha > \frac{1}{2\gamma}$, ta có

$$\|x^k - x^{k+1} - \frac{1}{\alpha}(w^k - w^{k+1})\|^2 \leq \|x^k - x^{k+1}\|^2.$$

Kết hợp điều này với tính chất không giãn của ánh xạ nghiệm H , ta được

$$\|y^{k+1} - y^k\| \leq \|x^{k+1} - x^k\|,$$

trong đó

$$y^k = h(x^k, w^k) \in H(x^k), y^{k+1} = h(x^{k+1}, w^{k+1}) \in H(x^{k+1}).$$

Từ điều kiện bức của F với hệ số $\beta > 0$ hay với mọi $x, x' \in C, w \in F(x)$, tồn tại $w' \in F(x')$ sao cho

$$\langle w - w', x - x' \rangle \geq \beta \|w - w'\|^2,$$

suy ra

$$\|w - w'\| \leq \frac{1}{\beta} \|x - x'\|.$$

Do đó, F là đóng trên C . Từ các giả thiết C là tập compact, F là đóng, suy ra ánh xạ nghiệm

$$H(x) := \{h(x, w) \mid w \in F(x)\},$$

với $h(x, w)$ là nghiệm của bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \alpha \|z - x\|^2 + \langle w, z - x \rangle \mid z \in C \right\}$$

là đóng trên C .

Theo Định lý 4.1.2, mọi điểm tụ x^* của dãy $\{x^k\}$ là điểm bất động của ánh xạ nghiệm H và cũng là nghiệm của bài toán MVIP.

Hơn nữa, kết hợp các giả thiết C là tập compact, F là nửa liên tục trên trên C và $w^k \in F(x^k)$ với mọi k , ta có $F(C)$ là compact. Như vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể coi w^k hội tụ tới w^* . Do F đóng tại x^* , nên $w^* \in F(x^*)$.

Trong Thuật toán 4.2.1, ta luôn có $y^k \in H(x^k)$, do vậy

$$d(x^k, H(x^k)) \leq \|x^k - y^k\| \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Theo Định lý 4.1.2,

$$\|x^k - y^k\| \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty,$$

nên $d(x^k, H(x^k)) \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. □

Như vậy, cũng bằng cách sử dụng phương pháp lặp Banach, nhưng khi giảm nhẹ điều kiện đơn điệu mạnh bằng điều kiện đồng bức, ta đã chỉ ra rằng ánh xạ nghiệm H có tính chất không giãn. Tính chất này cho phép ta bổ sung phương pháp lặp theo nguyên lý ánh xạ co Banach để thu được một phương pháp giải cho bài toán MVIP.

Kết luận

Các kết quả chính của luận văn:

Trình bày về ánh xạ đa trị đơn điệu, đặc biệt là tính chất đơn điệu liên quan đến dưới vi phân của một hàm lồi.

Phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (MVIP), đề cập đến hai trường hợp riêng điển hình là bài toán quy hoạch lồi và bài toán bù. Đưa ra ví dụ thực tế liên quan đến bài toán MVIP là bài toán cân bằng mạng giao thông và bài toán kinh tế bán độc quyền. Đặc biệt, luận văn đã nêu lên được điều kiện để bài toán MVIP có nghiệm cũng như tính chất của tập nghiệm (có duy nhất nghiệm hay có nhiều nhất một nghiệm).

Phần trọng tâm của luận văn này là trình bày phương pháp lặp Banach để giải bài toán MVIP. Ta đã chứng tỏ rằng việc tìm nghiệm của bài toán MVIP được qui về tìm điểm bất động của một ánh xạ nghiệm đa trị H . Bằng cách sử dụng kỹ thuật hiệu chỉnh, ta đã chỉ ra rằng ánh xạ nghiệm H có tính chất co (theo khoảng cách Hausdorff). Cụ thể, khi ánh xạ giá là đơn điệu mạnh, tính chất co này cho phép ta xây dựng một thuật toán lặp theo kiểu nguyên lý ánh xạ co Banach để giải bài toán MVIP. Khi ánh xạ giá là đồng bức, ánh xạ đa trị H có tính chất không giãn. Tính chất này cũng giúp ta xây dựng được một thuật toán tìm nghiệm cho bài toán MVIP, hơn nữa, ta còn đánh giá được sự hội tụ của thuật toán này.

Do vấn đề được đề cập trong luận văn là tương đối mới và phức tạp và thời gian cũng như khả năng còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô giáo, các bạn đồng nghiệp và những người quan tâm để đề tài được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Hiền, Lê Dũng Mưu (2003), *Nhập môn Giải tích lồi và ứng dụng*, Viện Toán học, Hà Nội.
- [2] Hoàng Tuy (2003), *Hàm thực và giải tích hàm*, Viện Toán học, Hà Nội.
- [3] P. N. Anh, L. D. Muu, V. H. Nguyen and J. J. Strodiot (2005), "Using the Banach contraction principle to implement the proximal point method for multivalued monotone variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 124 , pp. 285- 306.
- [4] P. N. Anh (2009), "An interior proximal method for solving pseudomonotone nonlipschitzian multivalued variational inequalities", *Nonlinear Analysis Forum*, 4, pp. 1-16.
- [5] F. Facchinei and J. S. Pang (2003), *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementary Problems*, Springer-Verlag, New York.
- [6] I. V. Konnov (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 495, Springer, Berlin.
- [7] M. Patriksson (1997), "Merit function and descent algorithms for a class of variational inequality problems", *Optimization*, 41, pp. 37-55.
- [8] R. T. Rockafellar (1999), *Variational Analysis*, Springer, Berlin.
- [9] K. Taji and M. Fukushima (1996), "A new merit function and a successive quadratic programming algorithm for variational inequality problem", *SIAM Journal on Optimization*, 6, pp. 704-713.