MỤC LỤC

MỘT SỐ KÍ HIỆU SỬ DỤNG TRONG LUẬN VĂN

- $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực không âm.
- $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclid n chiều với chuẩn $\|.\|$ và tích vô hướng $\langle .,. \rangle$.
- $\mathbb{R}^{n\times m}$ là tập các ma trận cấp $n \times m$.
- $L_2([t,s],\mathbb{R}^n)$ là tập các hàm L_2-khả tích trên $[s,t]$.
- A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A.
- $Q \geq 0$ $(Q > 0)$, kí hiệu ma trận Q xác định không âm (tương ứng xác định dương), tức là

$$\langle Qx, x\rangle \ \geq \ 0 \qquad (\langle Qx, x\rangle \ > \ 0).$$

- $M(\mathbb{R}^n_+)$ là tập các hàm ma trận đối xứng, xác định không âm trong $\mathbb{R}^n$, liên tục trên $t \in [0,\infty)$.
- $BM^+(0,\infty)$ là tập các hàm ma trận bị chặn, đối xứng, xác định không âm trong $\mathbb{R}^n$, liên tục trên $t \in [0,\infty)$.
- $BMU^+(0,\infty)$ là không gian các hàm ma trận bị chặn, đối xứng, xác định dương đều trong $\mathbb{R}^n$, liên tục trên $t \in [0,\infty)$.
- $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ là tập các hàm liên tục trên $[a,b]$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$.

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết điều khiển toán học là một trong những lĩnh vực toán học ứng dụng quan trọng mới được xuất hiện và phát triển trong mấy thập kỉ gần đây. Công cụ chính của lý thuyết điều khiển toán học là những mô hình và các phương pháp toán học được ứng dụng để giải quyết những vấn đề định tính của các hệ thống điều khiển. Rất nhiều bài toán thực tiễn trong khoa học, công nghệ, kinh tế được mô tả bởi các phương trình toán học điều khiển thuần tuý và cần đến những công cụ toán học tinh vi, hiện đại để tìm lời giải. Trong thực tiễn, nhiều bài toán đề cập các vấn đề kĩ thuật, điều khiển thường liên quan đến hệ động lực mô tả bởi các phương trình vi phân (PTVP) toán học với thời gian liên tục hay rời rạc dạng

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

$$x(k+l) = f(k, x(k), u(k)), k = 0, 1, 2, ...$$

trong đó $x(.)$ là biến trạng thái mô tả đối tượng đầu ra, $u(.)$ là biến điều khiển mô tả đối tượng đầu vào của hệ thống. Như vậy, một hệ thống điều khiển như là một mô hình toán học được mô tả bởi phương trình toán học biểu thị sự liên hệ vào-ra.

Một trong những mục đích chính của bài toán điều khiển hệ thống là tìm điều khiển (đầu vào) sao cho hệ thống (đầu ra) có những tính chất mà ta mong muốn. Căn cứ vào những mục đích cụ thể của hệ thống - đầu ra - người ta xác đinh các bài toán điều khiển khác nhau như: bài toán điều khiển được, bài toán ổn định và ổn định hoá, bài toán điều khiển tối ưu. Hiện nay, lý thuyết điều khiển toán học đang được phát triển mạnh theo hai hướng lý thuyết và ứng dụng, được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Có nhiều phương pháp được sử dụng trong lý thuyết điều khiển như: điều khiển tương thích (adaptive control), điều khiển bền vững, điều khiển tối ưu,...

Trong luận văn này chúng tôi sử dụng phương pháp H_∞ (bài toán điều khiển H_∞) trong lý thuyết điều khiển để đạt được quá trình điều khiển ổn định bền vững. Bài toán điều khiển H_∞ là sự kết hợp của bài toán ổn định hoá và bài toán tối ưu hoá. Bài toán điều khiển H_∞ là tìm hàm điều khiển để hệ đã cho là ổn định và thoả mãn các điều kiện tối ưu mức cho trước. Bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính ôtônôm, phương pháp phổ dụng là sử dụng hàm Lyapunov-Krasovskii và điều kiện ổn định đạt được dựa trên việc giải nghiệm của bất đẳng thức ma trận tuyến tính hoặc phương trình Riccati đại số. Đối với hệ tuyến tính không ôtônôm thì các điều kiện được dựa trên nghiệm của phương trình Riccati vi phân. Bằng phương pháp đó, trong [9, 10] các tác giả đã đưa ra điều kiện đủ để giải được bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính không ôtônôm không có trễ với giả thiết điều khiển được của hệ điều khiển.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 trình bày những kiến thức cơ sở về phương trình vi phân thường, phương trình vi phân có chậm, tính ổn định và phương pháp hàm Lyapunov đối với hệ PTVP chậm. Tiếp đến trình bày các bài toán điều khiển được, bài toán ổn định hoá và bài toán điều khiển H_∞. Phần cuối Chương 1 đề cập đến một số bổ đề được sử dụng nhiều trong luận văn này.

Trong Chương 2, luận văn giới thiệu một số kết quả đã có về điều kiện giải được của bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính không ôtônôm không có trễ trong [9] dựa trên mối quan hệ giữa điều khiển đều hoàn toàn hoặc điều khiển được về 0 của hệ điều khiển và sự tồn tại nghiệm của phương trình Riccati vi phân (RDE). Cuối chương, luận văn trình bày điều kiện có lời giải của bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho lớp hệ phương trình vi phân không ôtônôm có trễ hằng. Đồng thời ở mỗi kết quả đều đưa ra ví dụ minh hoạ.

Kết quả nghiên cứu mới của luận văn được trình bày trong chương 3 là chứng minh các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho một lớp hệ PTVP không ôtônôm có trễ hằng, trễ biến thiên hỗn hợp và xây dựng hàm điều khiển ngược ổn định dựa trên nghiệm của phương trình vi phân Riccati.

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, em đã nhận được sự giúp đỡ tận tình, sự chỉ bảo ân cần, nghiêm túc của thầy hướng dẫn, GS.TSKH Vũ Ngọc Phát. Thầy không chỉ dạy em tri thức, kĩ năng cần thiết mà còn truyền đạt cho em những bài học bổ ích, phương pháp nghiên cứu khoa học... Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy. Ngoài ra để hoàn thành luận văn này, em cũng nhận được sự động viên, khích lệ của các thầy cô trong tổ bộ môn toán Giải tích khoa Toán trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội cùng với sự quan tâm, tạo điều kiện của khoa Toán trường ĐH Khoa học tự nhiên, phòng tối ưu và điều khiển Viện Toán Học, và rất nhiều bạn bè nữa. Đó là những nguồn động lực lớn để em có cơ hội được học tập, trao đổi và nghiên cứu. Em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới các thầy cô, bạn bè và các đơn vị nói trên.

Vì thời gian và năng lực bản thân có hạn nên bản luận văn này không thể tránh khỏi thiếu sót và hạn chế, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Chương 1

CƠ SỞ TOÁN HỌC

Trong chương này, luận văn trình bày các khái niệm cơ bản của phương trình vi phân có chậm, tính ổn định và phương pháp hàm Lyapunov đối với hệ phương trình vi phân có chậm, sau đó định nghĩa và nêu các kết quả liên quan đến các bài toán điều khiển được, bài toán ổn định hoá và bài toán điều khiển H_∞ mà luận văn nghiên cứu và sử dụng.

1.1 Phương trình vi phân chậm

1.1.1 Phương trình vi phân thường

Xét phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \quad t \in I = [t_0, t_0 + b] \\ x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \ t_0 \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó

$$f(t,x) : I \times D \to \mathbb{R}^n, \ D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq a\}.$$

Nghiệm $x(t)$ của phương trình vi phân (1.1) là hàm số $x(t)$ khả vi liên tục thoả mãn:

i) $(t, x(t)) \in I \times D$,

ii) $x(t)$ thoả mãn phương trình vi phân (1.1).

Giả sử hàm $f(t, x(t))$ liên tục trên $I \times D$, khi đó nghiệm $x(t)$ cho bởi dạng tích phân sau

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

1.1.2 Phương trình vi phân chậm

Giả sử $h > 0$. Kí hiệu $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục từ $[-h, 0]$ vào $\mathbb{R}^n$ với chuẩn được xác định bởi $\|\phi\| = \sup_{-h\leq\theta\leq 0} \|\phi(\theta)\|$. Với bất kì $t \geq 0$, đặt $x_t(\theta) = x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0$ là đoạn quỹ đạo của $x(t)$ với chuẩn $\|x_t\| = \sup_{s\in[-h,0]} \|x(t+s)\|$. Phương trình vi phân chậm (có trễ) dạng

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t),\ t \geq 0, \qquad (1.2)\\ x(t) &= \phi(t),\ t \in [-h, 0], \end{aligned}$$

trong đó $f : \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước. Phương trình vi phân có trễ được kí hiệu là RFDE(f), $\phi(t) \in C$.

Ví dụ một số dạng phương trình vi phân có trễ được nghiên cứu trong luận văn như:

○ Phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ rời rạc

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h),\ t \geq 0,\\ x(t) &= \phi(t),\ t \in [-h, 0], \end{aligned}$$

trong đó $h \geq 0;\ x(t) \in \mathbb{R}^n$; $A(t),\ A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[-h,0]} \|\phi(t)\|.$$

◦ Phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ phân phối

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)\int_{t-h}^{t} x(s)ds,\ t \geq 0,$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0],$$

trong đó $h \geq 0$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $A(t),\ A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[-h,0]} \|\phi(t)\|.$$

◦ Phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ hỗn hợp

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + A_2(t)\int_{t-k}^{t} x(s)ds,\ t \geq 0,$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-\max(h, k), 0],$$

trong đó $h, k \geq 0$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $A(t),\ A_1(t),\ A_2(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-\max(h, k), 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[-\max(h,k),0]} \|\phi(t)\|.$$

1.1.3 Tính ổn định của hệ phương trình vi phân chậm

Xét hệ phương trình vi phân có chậm (1.2) với giả thiết $f(t, 0) \equiv 0$, tức là hệ (1.2) có nghiệm không. Tương tự như bài toán ổn định của hệ phương trình vi phân thường, ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.1:

• *Nghiệm không của hệ (1.2) được gọi là ổn định nếu với mọi số* $\varepsilon > 0, t_0 \geq 0$, *tồn tại số* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *sao cho bất kì nghiệm* $x(t_0, \phi)(t)$ *của hệ thoả mãn* $\|\phi\| < \delta$ *thì*

$$\|x(t_0, \phi)(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \geq t_0.$$

• *Nghiệm không của hệ (1.2) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và hơn nữa với mỗi $t_0 \geq 0$ tồn tại $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho với mọi $\phi \in C$ thoả mãn $\|\phi\| < \delta$, ta có*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t_0, \phi)(t)\| = 0.$$

• *Nghiệm không của hệ (1.2) được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại các số $M > 0, \delta > 0$ sao cho mọi nghiệm của hệ (1.9) thoả mãn*

$$\|x(t_0, \phi)(t)\| \leq Me^{-\delta(t-t_0)}\|\phi\|, \ \forall t \geq t_0.$$

1.1.4 Phương pháp hàm Lyapunov

Sử dụng phương pháp hàm Lyapunov như đối với phương trình vi phân thường, chúng ta có thể xét được tính ổn định của hệ RFDE(f) (1.2).

Định nghĩa 1.1.2: *Xét hệ RFED(f) (1.2). Hàm khả vi liên tục $V : \mathbb{R}^+ \times C \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov của hệ (1.2) nếu tồn tại các hằng số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ thoả mãn*

i) $\lambda_1\|x(t)\|^2 \ \leq \ V(t, x_t) \ \leq \ \lambda_2\|x_t\|^2,$

ii) $\dot{V}(t, x_t) \ \leq \ -\lambda_3\|x(t)\|^2$

với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ.

Định lý 1.1.3: *Nếu hệ RFDE(f) (1.2) tồn tại hàm Lyapunov thì hệ đã cho ổn định tiệm cận.*

1.2 Bài toán điều khiển được

Xét một hệ thống điều khiển mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính, kí hiệu $[A(t), B(t)]$, dạng

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \ t \geq 0, \tag{1.3}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là vectơ điều khiển, $n \geq m$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ t \geq 0$ là các ma trận hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Một hàm véctơ $u(t)$ xác định trên $[0, \infty)$ mà là khả tích địa phương lấy giá trị trong $\mathbb{R}^m$ sẽ được gọi là điều khiển chấp nhận được của hệ (1.3). Lớp các hàm điều khiển chấp nhận được thông thường là các hàm trong $L_p([0, \infty), \mathbb{R}^m)$.

Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.3) với giá trị ban đầu $x(0) = x_0$ cho trước. Khi đó ứng với mỗi điều khiển chấp nhận được $u(t)$, bài toán Cauchy của hệ phương trình vi phân tuyến tính (1.3) luôn có nghiệm $x(t, x_0, u)$ tại thời điểm t được cho bởi

$$x(t, x_0, u) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)B(s)u(s)ds,\ t \geq 0$$

trong đó $U(t, s)$ là ma trận nghiệm cơ bản của hệ tuyến tính thuần nhất:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ t \geq 0.$$

Định nghĩa 1.2.1: *Cho hai trạng thái $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, cặp (x_0, x_1) được gọi là điều khiển được sau thời gian $t_1 > 0$, nếu tồn tại điều khiển chấp nhận được $u(t)$ sao cho nghiệm $x(t, x_0, u)$ của hệ thoả mãn điều kiện*

$$x(0, x_0, u) = x_0,\ x(t_1, x_0, u) = x_1.$$

Định nghĩa 1.2.2: *Hệ $[A(t), B(t)]$ gọi là điều khiển được hoàn toàn về 0 nếu với bất kì trạng thái $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tồn tại một thời gian $t_1 > 0$ sao cho $(x_0, 0)$ là điều khiển được sau thời gian t_1. Hay nói cách khác tồn tại $T > 0$ sao cho:*

$$\int_0^T U(T, s)B(s)B^T(s)U^T(T, s)ds \ > \ 0.$$

Trước tiên chúng ta xét kết quả cơ sở đầu tiên về tính điều khiển được của hệ tuyến tính dừng dạng

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \geq 0, \tag{1.4}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, A, B$ là các ma trận hằng có số chiều tương ứng.

Định lý 1.2.3: *(Tiêu chuẩn hạng Kalman)*

Hệ tuyến tính dừng (1.4) là điều khiển được hoàn toàn về 0 *khi và chỉ khi*

$$rank[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n.$$

Như vậy để xét tính điều khiển được của một hệ tuyến tính dừng (1.4), ta chỉ cần xác lập ma trận $[B, AB, ..., A^{n-1}B] - (n \times m)$, sau đó kiểm tra hạng của nó là đủ. Ma trận này được gọi là ma trận điều khiển được, kí hiệu là $[A/B]$.

Ví dụ 1.2.4: Xét tính điều khiển được của hệ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Ta có

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vì

$$rank[A/B] = rank \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

nên hệ đã cho là điều khiển được hoàn toàn về 0.

Bên cạnh đó chúng ta có thể kiểm tra được tính điều khiển được hoàn toàn cho hệ tuyến tính không dừng dưới dạng điều kiện Kalman.

Định lý 1.2.5: [2] *Giả sử các ma trận* $A(t), B(t)$ *là các hàm giải tích trên* $[t_0, \infty)$. *Hệ (1.3) là điều khiển được hoàn toàn về* 0 *khi và chỉ khi*

$$\exists t_1 \in [t_0, \infty) : rank[M_0(t_1), M_1(t_1), ..., M_n(t_1)] = n,$$

trong đó

$$M_0(t) = B(t),$$

$$M_{k+1}(t) = -A(t)M_k(t) + \frac{d}{dt}M_k(t),\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Chú ý rằng nếu hệ là dừng, tức là các ma trận $A(.), B(.)$ là hằng số, thì các điều kiện Kalman trong hai định lý 1.2.3 và 1.2.5 là đồng nhất.

Ví dụ 1.2.6: Xét hệ (1.3) trong đó

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2}\sin t \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & e^{-\cos t} \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$M_0(t) = B(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & e^{-\cos t} \end{pmatrix},$$

$$M_1(t) = -A(t)B(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\cos te^{-\sin t} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\sin te^{-\cos t} \end{pmatrix}.$$

Vì ma trận $[M_0(t), M_1(t)]$ có hạng bằng 2 với mọi $t > t_0 = 0$ nên theo định lý 1.2.5, hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0.

Định nghĩa 1.2.7: [9] *Hệ $[A(t), B(t)]$ gọi là điều khiển được đều hoàn toàn nếu tồn tại $N > 0, c_1, c_2, c_3, c_3, c_4 > 0$ sao cho với mọi $t \in \mathbb{R}^+$:*

i) $c_1 I \le W(t, t+N) \le c_2 I$

ii) $c_3 I \le U(t, t+N)W(t, t+N)U(t, t+N) \le c_4 I$

trong đó

$$W(t, t+N) = \int_t^{t+N} U(N, s)B(s)B^T(s)U^T(N, s)ds.$$

1.3 Bài toán ổn định hoá

Xét hệ điều khiển mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \geq 0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{1.5}$$

Định nghĩa 1.3.1: *Hệ (1.5) gọi là ổn định hoá được nếu tồn tại hàm $h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho với hàm điều khiển này hệ phương trình vi phân*

$$x(t) = f(t, x(t), h(x(t))),\ t \geq 0,$$

là ổn định tiệm cận. Hàm $h(x)$ thường gọi là hàm điều khiển ngược.

Trường hợp hệ (1.5) là hệ tuyến tính

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

thì hệ là ổn định hoá được nếu tồn tại ma trận K sao cho ma trận $(A + BK)$ là ổn định.

Định lý 1.3.2: *Hệ tuyến tính (1.5) là ổn định hoá được nếu nó là điều khiển được hoàn toàn về* 0.

Ví dụ 1.3.3: Xét hệ điều khiển tuyến tính (1.5) trong đó

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có hệ $\dot{x} = Ax$ là ổn định, do đó hệ đã cho là ổn định hoá được với $K = 0$. Tuy nhiên hệ không là GNC vì

$$rank[A/B] = 1 < 2.$$

Ví dụ trên chỉ ra rằng nếu hệ là ổn định hoá được thì hệ đó chưa chắc đã là GNC. Do đó phần đảo của định lý 1.3.2 không đúng.

Trường hợp hệ (1.5) là hệ phi tuyến, ta có định lý sau:

Định lý 1.3.4: *Xét hệ điều khiển phi tuyến (1.5). Giả sử tồn tại hàm $V(t,x)$ và hàm véctơ $h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho*

i) $V(t,x)$ xác định dương

ii) Tồn tại $\gamma(.) \in K : \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) \leq -\gamma(\|x\|),\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0.$

Khi đó hệ là ổn định hoá được với điều khiển ngược $u(t) = h(x(t))$.

Ví dụ 1.3.5: Xét tính ổn định hoá được của hệ phi tuyến

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 - u_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 - u_2^3 \end{cases}$$

Xét các hàm

$$\begin{aligned} &V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \qquad && a(t) = \gamma(t) = t^2, \\ &b(t) = 2t^2, && u = h(x) = x \end{aligned}$$

với $u = (u_1, u_2), x = (x_1, x_2)$. Ta có

$$V(0,0) = 0,$$

$$a(\|(x_1, x_2)\| \leq V(x_1, x_2) \leq b(\|(x_1, x_2)\|)$$

và

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) &= 2x_1.\dot{x_1} + 2x_2.\dot{x_2} = -4x_1^4 - 4x_2^4 \\ &\leq -x_1^2 - x_2^2 = -\gamma(\|(x_1, x_2)\|,\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Do đó hệ đã cho là ổn định hoá được với điều khiển ngược

$$u(t) = h(x(t)) = x(t).$$

1.4 Bài toán điều khiển H_∞

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0,\\
&z(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ t \geq 0,\\
&x(0) = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là biến nhiễu, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm quan sát, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r},\ C(t) \in \mathbb{R}^{l\times n},\ D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$. Hàm nhiễu $\omega(t)$ là chấp nhận được nếu $\omega \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^r)$.

Định nghĩa 1.4.1: [9] *Cho $\gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (1.6) là bài toán tìm điều khiển ngược $u(t) = K(t)x(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với $\omega = 0$, mọi nghiệm của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t) \tag{1.7}$$

ổn định tiệm cận Lyapunov;

(ii) Tồn tại $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|x_0\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leq \gamma \tag{1.8}$$

với supremum trên mọi giá trị ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và mọi hàm nhiễu khác không $\omega \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^r)$.

Định nghĩa 1.4.2: [7] *Cho $\gamma > 0$. Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (1.6) là bài toán tìm điều khiển ngược $u(t) = K(t)x(t)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Mọi nghiệm của hệ đóng

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t) + B_1(t)\omega(t) \tag{1.9}$$

thuộc $L_2([0,\infty),\mathbb{R}^n)$ với mọi nhiễu chấp nhận được $\omega(t)$;

(ii) Tồn tại $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|x_0\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \le \gamma \tag{1.10}$$

với supremum trên mọi giá trị ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và mọi hàm nhiễu khác không $\omega \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^r)$.

1.5 Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.5.1: [7] *(Bất đẳng thức ma trận Cauchy) Cho Q, S là hai ma trận đối xứng và $S > 0$, khi đó*

$$2\langle Qy, x\rangle - \langle Sy, y\rangle \ \le\ \langle QS^{-1}Q^T x, x\rangle, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

Bổ đề 1.5.2: *Với mọi ma trận đối xứng xác định dương $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vô hướng $\nu \ge 0$ và hàm véctơ $\omega : [0,\nu] \to \mathbb{R}^n$ sao cho các tích phân có liên quan đều xác định, ta có*

$$\Big(\int_0^\nu \omega(s)ds\Big)^T W\Big(\int_0^\nu \omega(s)ds\Big) \ \le\ \nu\int_0^\nu \omega^T(s)W\omega(s)ds.$$

Bổ đề 1.5.3: [7] *Với bất kì ma trận $A(t)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^+$, tồn tại $Q \in BM^+(0,\infty)$ thoả mãn $Q(t) - A(t) \ge 0$.*

Kết hợp với hệ điều khiển (1.3), xét phương trình vi phân Riccati

$$\dot P(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \tag{1.11}$$

ta có một số bổ đề sau:

Bổ đề 1.5.4: [7] *Giả sử $A(t), B(t)$ bị chặn trên $\mathbb{R}^+$. Nếu hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0 thì với bất kì ma trận $Q \in BM^+(0,\infty)$, phương trình vi phân Riccati (1.11) có nghiệm $P \in BM^+(0,\infty)$.*

Bổ đề 1.5.5: [9] *Nếu hệ* $[A(t), B(t)]$ *là điều khiển được đều hoàn toàn thì khẳng định sau luôn đúng:*

Phương trình Riccati vi phân (1.11), trong đó $Q(t) = I$*, có nghiệm* $P \in M(\mathbb{R}^n_+)$ *bị chặn đều trên và dưới, tức là tồn tại* $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ *thoả mãn*

$$\beta_1 \leq \|P(t)\| \leq \beta_2, \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Chương 2

Một số kết quả về bài toán điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính không ôtônôm với giả thiết điều khiển được

Phần đầu chương 2, luận văn trình bày kết quả giải được của bài toán điều khiển H_∞ cho hệ phương trình vi phân không ôtônôm không có trễ dựa trên mối quan hệ giữa tính điều khiển được đều hoàn toàn và sự tồn tại nghiệm của phương trình Riccati vi phân. Tiếp đó đưa ra một số kết quả mở rộng trong [7] về bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ hằng trên biến trạng thái với các giả thiết về điều khiển được nhẹ hơn.

2.1 Tính điều khiển được và điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính liên tục không ôtônôm

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0,\\
&z(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ t \geq 0, \qquad (2.1)\\
&x(0) = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là biến nhiễu, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm quan sát, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}, B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}, C(t) \in \mathbb{R}^{l\times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$. Hàm nhiễu $\omega(t)$ là chấp nhận được nếu $\omega \in L_2([0,\infty), \mathbb{R}^r)$.

Xét hệ (2.1) với các hàm ma trận $B_1(t), C(t)$ liên tục bị chặn trên $[0,\infty)$ và giả thiết

$$D^T(t)[C(t), D(t)] = [0, I], \ \forall t \geq 0 \tag{2.2}$$

để giảm sự phức tạp khi đánh giá các điều kiện. Ta có định lý sau:

Định lý 2.1.1: *Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được đều hoàn toàn. Bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (2.1) có lời giải nếu tồn tại $P \in M(\mathbb{R}^n_+)$ thoả mãn phương trình vi phân Riccati (RDE)*

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t)\\ &-P(t)\big[B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)\big]P(t) + I = 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

và hàm điều khiển ngược là

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t), \ t \geq 0.$$

Chứng minh. Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được đều hoàn toàn, theo bổ đề 1.5.5, phương trình RDE (2.3) có nghiệm $P(t) \in M(\mathbb{R}^n_+)$ thoả mãn điều kiện

$$\beta_1 \leq \|P(t)\| \leq \beta_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Với hàm điều khiển ngược $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ và hệ đóng với $\omega = 0$:

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B^T(t)P(t)]x(t)$$

xét hàm Lyapunov dạng sau

$$V(t,x) = \langle P(t)x, x\rangle.$$

Ta có

$$\beta_1\|x(t)\| \le V(t, x(t)) \le \beta_2\|x(t)\|.$$

Lấy đạo hàm của $V(.)$ dọc theo nghiệm của hệ đóng, với $\omega = 0$, ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x(t)) &= \langle \dot{P}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)x(t), \dot{x}(t)\rangle \\
&= -\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\le -\|x(t)\|^2
\end{aligned}$$

bởi vì

$$\begin{aligned}
\langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle &\ge 0 \\
\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle &\ge 0 \\
\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle &\ge 0,\ \forall t \ge 0.
\end{aligned}$$

Vậy theo Định lý 1.1.3, hệ đóng với $\omega = 0$ là ổn định tiệm cận.

Tiếp theo chúng ta chứng minh điều kiện (1.8) của với mọi giá trị ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và hàm nhiễu chấp nhận được $\omega(t)$. Ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x(t)) &= -\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B^T(t)B(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1^T(t)B_1(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad +2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle
\end{aligned}$$

Hơn nữa, với $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ và điều kiện (2.2) có

$$\|z(t)\|^2 = \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\right]dt \\
&\le \int_0^\infty \left[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 + \dot{V}(t, x(t))\right]dt - \int_0^\infty \dot{V}(t, x(t))dt
\end{aligned}$$

$$\le \int_0^\infty \Big[-\|x(t)\|^2 - \frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1^T(t)B_1(t)P(t)x(t), x(t)\rangle$$
$$+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2\Big]dt + \langle P(0)x_0, x_0\rangle.$$

Sử dụng bổ đề (1.5.1) ta có

$$2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2 \le \frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt &\le \langle P(0)x_0, x_0\rangle \\ &\le \|P(0)\|\|x_0\|^2.\end{aligned}$$

Vậy

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|x_0\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \le \gamma$$

với $c_0 = \dfrac{\|P(0)\|}{\gamma} > 0$ vì $\|P(0)\| > \beta_1 > 0$, supremum lấy trên $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và hàm nhiễu chấp nhận được $\omega \in L_2([0,\infty), \mathbb{R}^r)$. Do đó theo định lý 1.4.1, bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (2.1) có lời giải. □

Ví dụ 2.1.2: Cho $\gamma > 0$. Xét hệ (2.1) trong đó

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-\cos^2 t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\gamma}}{8}e^{-\sin^2 t - 4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\gamma}}{8}e^{-\cos^2 t - 5} \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{11}}{4}\sin t & \frac{\sqrt{11}}{4}\cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $D^T(t)C(t) = 0,\ D^T(t)D(t) = I$ và ma trận $U(t,s)$ được cho bởi

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} e^{\cos^2 s - \cos^2 t} & 0 \\ 0 & e^{s-t} \end{pmatrix}.$$

Với $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ta có

$$\int_t^{t+N} \|B^T(s)U^T(N,s)x\|^2 ds = e^{-2\cos^2 N} x_1^2 N + e^{-2N} x_2^2 N.$$

Vì

$$e^{-2\cos^2 N} \geq e^{-2N},\ e^{-2\cos^2 N} \leq 1,\ \forall N \geq 1$$

nên chọn $N = 1$ ta có

$$e^{-2}\|x\| \leq \int_t^{t+N} \|B^T(s)U^T(N,s)x\|^2 ds \leq \|x\|$$

thoả mãn điều kiện (i) của Định nghĩa 1.2.7 với $c_1 = e^{-2}, c_2 = 1$.

Mặt khác

$$\|U(t,s)\|^2 = e^{2(\cos^2 s - \cos^2 t)} + e^{2(s-t)} \leq e^2 + 1$$

với $s < t$ nên điều kiên (ii) của Định nghĩa 1.2.7 thoả mãn. Khi đó ta có hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được đều hoàn toàn.

Vậy bài toán điều khiển H_∞ (2.1) có lời giải với $u(t)$ được xác định bởi

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$$

trong đó nghiệm

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & 0 \\ 0 & p_2(t) \end{pmatrix}$$

của RDE (2.3) được định nghĩa bởi phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) + 2\sin 2t p_1(t) - \Big(e^{-2\cos^2 t} - \dfrac{e^{-2\sin^2 t - 8}}{64}\Big)p_1^2(t) + \dfrac{11}{4}\sin^2 t = -1 \\ \dot{p}_2(t) + 2p_2(t) - \big(e^{-2t} - \dfrac{1}{64}e^{-2\cos^2 t - 10}\big)p_2^2(t) + \dfrac{1}{4}\cos^2 t + 1 = 0. \end{cases}$$

2.2 Mối liên hệ giữa điều khiển H_∞ và tính điều khiển được của hệ tuyến tính không ôtônôm

Xét hệ (2.1) với giả thiết

$$D^T(t)[C(t), D(t)] = [0, I],\ \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.2.1: *Bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (2.1) có lời giải nếu tồn tại ma trận $X \in BMU^+(0,\infty), R \in BMU^+(0,\infty)$ sao cho phương trình vi phân Riccati sau thoả mãn*

$$\dot{X} + A^T X + XA - X[BB^T - \frac{1}{\gamma}B_1 B_1^T]X + C^T C + R = 0,\ t \geq 0. \quad (2.5)$$

Hàm điều khiển ngược là

$$u(t) = -B^T(t)X(t)x(t), \quad t \geq 0.$$

Chứng minh. Với hàm điều khiển ngược $u(t) = -B^T(t)X(t)x(t)$ và hệ đóng với $\omega(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B^T(t)X(t)]x(t), \quad (2.6)$$

xét hàm Lyapunov dạng:

$$V(t,x) = \langle X(t)x, x\rangle.$$

Do $X \in BMU^+(0,\infty)$ nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho

$$\lambda_1\|x\|^2 \ \leq \ V(t,x) \ \leq \ \lambda_2\|x\|^2,\ \forall t \geq 0$$

Đạo hàm $\dot{V}(.)$ dọc theo nghiệm của hệ đóng ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,x) &= \langle \dot{X}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle X(t)x(t), \dot{x}(t)\rangle \\
&= \langle (\dot{X}(t) + A^T(t)X(t) + X(t)A(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad -2\langle X(t)B(t)B^T(t)X(t)x(t), x(t)\rangle \\
&= -\langle X(t)B(t)B^T(t)X(t)x(t), x(t)\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle X(t)B_1(t)B_1^T(t)X(t)x(t), x(t)\rangle - \langle R(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\leq -\langle R(t)x(t), x(t)\rangle
\end{aligned}$$

bởi vì

$$\langle XBB^TXx(t), x(t)\rangle \geq 0,$$
$$\langle XB_1B_1^TX(t), x(t)\rangle \geq 0,$$
$$\langle C^TCx(t), x(t)\rangle \geq 0.$$

Mặt khác $R \in BMU^+(0,\infty)$ nên tồn tại $\lambda_3 > 0$ sao cho

$$\langle Rx(t), x(t)\rangle \geq \lambda_3\|x\|^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &\leq -\lambda_3\|x\|^2\\ &\leq -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}V(t,x).\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$V(t,x(t)) \leq V(0,x_0)e^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}t},\ \forall t \geq 0$$

mà

$$\lambda_1\|x(t)\|^2 \leq V(t,x(t))$$

nên

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,x_0)}{\lambda_1}}e^{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2}t},\ \forall t \geq 0.$$

Vậy hệ đóng (2.6) ổn định mũ nên ổn định tiệm cận.

Để hoàn thành chứng minh, chúng ta chứng minh điều kiện (1.8) với mọi giá trị ban đầu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và hàm nhiễu chấp nhận được $\omega(t)$.

Với $u(t) = -B^T(t)X(t)x(t)$ và điều kiện (2.4) ta có

$$\|z\|^2 = \langle C^TCx, x\rangle + \langle X(t)B(t)B^T(t)X(t)x, x\rangle.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2\big]dt \\
&= \int_0^t \big[\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2 + \dot{V}(s,x(s))\big]dt - \int_0^t \dot{V}(s,x(s))ds\rangle \\
&\leq \int_0^t \Big[-\frac{1}{\gamma}\langle X(s)B_1(s)B_1^T(s)X(s)x(s),x(s)\rangle - \langle R(s)x(s),x(s)\rangle \\
&\qquad +2\langle X(s)B_1(s)\omega(s),x(s)\rangle - \gamma\|\omega(s)\|^2\Big]dt + V(0,x_0) \\
&\leq \int_0^t \Big[2\langle X(s)B_1(s)\omega(s),x(s)\rangle - \frac{1}{\gamma}\langle X(s)B_1(s)B_1^T(s)X(s)x(s),x(s)\rangle \\
&\qquad -\gamma\|\omega(s)\|^2 - \langle R(s)x(s),x(s)\rangle\Big]ds + \langle X(0)x_0,x_0\rangle.
\end{aligned}$$

Sử dụng bổ đề (1.5.1) ta có

$$2\langle X(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2 \ \leq \frac{1}{\gamma}\langle X(t)B_1(t)B_1^T(t)X(t)x(t),x(t)\rangle$$

và

$$-\langle R(t)x(t),x(t)\rangle \leq -\lambda_3\|x(t)\|^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2\big]dt \\
&\leq -\lambda_3\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + \langle X(0)x_0,x_0\rangle \\
&\leq \langle X(0)x_0,x_0\rangle.
\end{aligned}$$

Cho $t \to \infty$ ta có

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|x_0\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leq \gamma$$

với supremum xác định trên $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và hàm nhiễu chấp nhận được $\omega \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^r)$, $c_0 = \dfrac{\|X(0)\|}{\gamma} > 0$ vì $X \gg 0$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý sau đây cho kết quả giải bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (2.1) với yêu cầu giả thiết nhẹ hơn.

Giả sử $A(t), B(t), B_1(t)$ là các hàm liên tục, bị chặn trên $\mathbb{R}^+$. Cho $\gamma > 0$, đặt

$$A_\gamma(t) = A(t) + \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t) - B(t)B^T(t),$$
$$B_\gamma(t) = [B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)]^{\frac{1}{2}}.$$

Định lý 2.2.2: *Giả sử* $B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t) \geq 0,\ t \geq 0,$ *và hệ điều khiển* $[A_\gamma(t), B_\gamma(t)]$ *là điều khiển được đều hoàn toàn. Khi đó bài toán điều khiển* H_∞ *cho hệ (2.1) có lời giải. Hơn nữa, hàm điều khiển là*

$$u(t) = -B^T(t)[P(t) + I]x(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

trong đó $P \in BM^+(0,\infty)$ *là nghiệm của phương trình vi phân Riccati*

$$\dot{P} + A_\gamma^T P + PA_\gamma - PB_\gamma B_\gamma^T P + A + A^T + C^T C + \varepsilon I = 0 \qquad (2.7)$$

với $\varepsilon > 0$.

Chứng minh. Chọn $\varepsilon > 0$, bởi Bổ đề 1.5.4, sao cho

$$Q(t) = A(t) + A^T(t) + C^T(t)C(t) + \varepsilon I \geq 0.$$

Kết hợp với (2.7) có

$$\dot{P} + A_\gamma^T P + PA_\gamma - PB_\gamma B_\gamma^T P + Q(t) = 0, \qquad (2.8)$$

áp dụng Bổ đề 1.5.5 với điều kiện điều khiển được đều hoàn toàn của hệ $[A_\gamma(t), B_\gamma(t)]$; $A_\gamma(t), B_\gamma(t)$ bị chặn, $Q \in BM^+(0,\infty)$, phương trình (2.8) có nghệm $P \in BM^+(0,\infty)$.

Do đó

$$\dot{P} + (A^T + \frac{1}{\gamma}B_1^T B_1 - BB^T)P + P(A + \frac{1}{\gamma}B_1^T B_1 - BB^T)$$
$$-P(B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t))P + A + A^T + C^T C + \varepsilon I = 0$$

suy ra

$$\dot{P} + A^T(P+I) + (P+I)A - (P+I)[B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)](P+I)$$
$$+C^TC + B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t) + \varepsilon I = 0.$$

Đặt

$$X(t) = P(t) + I, \quad R(t) = \big[B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)\big] + \varepsilon I.$$

Ta có

$$P \in BM^+(0,\infty), \quad B(t)B^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t) \geq 0$$

nên

$$X(t) \gg 0, \quad R(t) \gg 0.$$

Hơn nữa

$$\dot{X} + A^TX + XA - X[BB^T - \frac{1}{\gamma}B_1B_1^T]X + C^TC + R = 0, \ t \geq 0.$$

Vậy áp dụng Bổ đề 2.2.1, bài toán điều khiển H_∞ cho hệ (2.1) có lời giải với hàm điều khiển ngược

$$u(t) = -B^T(t)X(t)x(t) = -B^T(t)[P(t)+I]x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 2.2.3: Xét hệ (2.1) trong đó

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-e^{-2t}) & -1 \\ 1 & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad B_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}e^{-t} \end{pmatrix},$$
$$C(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad D(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ta có $D^T(t)C(t) = 0, D^T(t)D(t) = I$. Với $\gamma = \frac{3}{2}$ thì

$$B(t)B^T(t) - \frac{2}{3}B_t(t)B_1^T(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}e^{-2t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9}e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$B_\gamma(t) = \sqrt{B(t)B^T(t) - \frac{2}{3}B_t(t)B_1^T(t)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$A_\gamma t = A(t) - B(t)B^T(t) + \frac{2}{3}B_t(t)B_1^T(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{11}{18}e^{-2t} & -1 \\ 1 & -\frac{11}{18}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Ma trận $A_\gamma(t), B_\gamma(t)$ giải tích và xét

$$M_0(t) = B_\gamma(t),\ M_1(t) = -A_\gamma(t)B_\gamma(t) + \frac{d}{dt}M_1(t),$$

tồn tại $t_0 > 0$ thoả mãn $rank[M_0(t_0), M_1(t_0)] = 2$. Theo Định lý 1.2.5, hệ $[A_\gamma(t), B_\gamma(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0 và bài toán điều khiển H_∞ có lời giải.

Chọn $\varepsilon = 2$ và

$$\begin{aligned} Q(t) &= A(t) + A^T(t) + C^T(t)C(t) + \varepsilon I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} & 2 \end{pmatrix} \geq 0, \end{aligned}$$

theo Bổ đề 1.5.4, phương trình vi phân Riccati

$$\dot{P} + A_\gamma^T P + PA_\gamma - PB_\gamma B_\gamma^T P + Q = 0$$

có nghiệm $P \in BM^+(0,\infty)$ và hàm điều khiển ngược bền vững là

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ \forall t \geq 0.$$

2.3 Bài toán ổn định trong L_2 và điều khiển H_∞ bền vững cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ

Xét hệ điều khiển tuyến tính không ôtônôm có trễ hằng trên biến trạng thái

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0,\\ &z(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ t \geq 0, \\ &x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0],\ h \geq 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là biến nhiễu, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm quan sát, $A(t), A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}, B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}, C(t) \in \mathbb{R}^{l\times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$.

Xét hệ (2.9) với các hàm ma trận $A_1(t),\ B_1(t)$ liên tục bị chặn trên $[0, \infty)$ và giả thiết

$$D^T(t)C(t) = 0, \quad D^T(t)C(t) = I, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.10}$$

Kí hiệu

$$a_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A_1(t)\|, \quad b_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|B_1(t)\|.$$

Xét phương trình vi phân Riccati

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0. \tag{2.11}$$

Định lý sau cho ta lời giải bài toán điều khiển H_∞ bền vững với giả thiết điều khiển được về 0 của hệ $[A(t), B(t)]$.

Định lý 2.3.1: *Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0. Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (2.9) có lời giải nếu tồn tại $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ sao cho*

$$\varepsilon - p^2(\varepsilon_1^{-1}a_1^2 + \frac{1}{\gamma}b_1^2) \geq 0, \tag{2.12}$$

trong đó $p = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|P(t)\|,\ P \in BM^+(0,\infty)$ *là nghiệm của phương trình vi phân Riccati (2.11) với* $Q(t) = C^T(t)C(t) + (\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2 h)I$. *Hơn nữa hàm điều khiển ngược là*

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Chứng minh. Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn. Theo bổ đề 1.5.4, phương trình Riccati (2.11) với

$$Q(t) = C^T(t)C(t) + (\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2 h)I$$

có nghiệm $P \in BM^+([0,\infty), X)$.

Với hàm điều khiển ngược $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ \forall t \geq 0$ và hệ đóng với $\omega = 0$

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B^T(t)P(t)]x(t) + A_1(t)x(t-h), \qquad (2.13)$$

xét hàm Lyapunov dạng :

$$V(t,x_t) = V_1(t,x_t) + V_2(t,x_t) + V_3(t,x_t),$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1(t,x_t) &= \langle P(t)x(t), x(t)\rangle, \\ V_2(t,x_t) &= \varepsilon_1 \int_{t-h}^{t} \|x(s)\|^2 ds, \\ V_3(t,x_t) &= \varepsilon_2 \int_{-h}^{0}\int_{t+\tau}^{t} \|x(s)\|^2 ds d\tau. \end{aligned}$$

Đạo hàm của $V(.)$ dọc theo nghiệm $x(t)$ của hệ đóng, ta có

$$\begin{aligned} &\dot{V}_1(t,x_t) = \langle \dot{P}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)\dot{x}(t), x(t)\rangle \\ &= \langle (\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - 2P(t)B(t)B^T(t)P(t))x(t), x(t)\rangle \\ &\quad +2\langle P(t)A_1(t)x(t-h), x(t)\rangle + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle \\ &\dot{V}_2(t,x_t) = \varepsilon_1\|x(t)\|^2 - \varepsilon_1\|x(t-h)\|^2 \\ &\dot{V}_3(t,x_t) = \varepsilon_2 h\|x(t)\|^2 - \varepsilon_2\int_{t-h}^{t}\|x(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\dot V(t,x_t) &= \langle[\dot P(t)+A^T(t)P(t)+P9t)A(t)-2P(t)B(t)B^T(t)P(t)\\&\quad+(\varepsilon_1+\varepsilon_2 h)I]x(t),x(t)\rangle+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle\\&\quad+2\langle P(t)A_1(t)x(t-h),x(t)\rangle-\varepsilon_1\|x(t-h)\|^2-\varepsilon_2\int_{t-h}^t\|x(s)\|^2ds.\end{aligned}$$

Vì

$$\varepsilon_2\int_{t-h}^t\|x(s)\|^2ds\ge 0,\ t\ge 0,$$

và sử dụng Bổ đề 1.5.1 có

$$\begin{aligned}&2\langle P(t)A_1(t)x(t-h),x(t)\rangle-\varepsilon_1\|x(t-h)\|^2\\&\le\varepsilon_1^{-1}\langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)x(t),x(t)\rangle\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}&\dot V(t,x_t)\\&=\langle[\dot P(t)+A^T(t)P(t)+P(t)A(t)-2P(t)B(t)B^T(t)P(t)\\&\quad+(\varepsilon_1+\varepsilon_2 h)I]x(t),x(t)\rangle+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle\\&\quad+\varepsilon_1^{-1}\langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)x(t),x(t)\rangle\\&\le-\varepsilon\|x(t)\|^2-\langle[C^T(t)C(t)+\varepsilon_1^{-1}P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)]x(t),x(t)\rangle\\&\quad-\langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t).x(t)\rangle+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle\\&\le-(\varepsilon-\varepsilon_1^{-1}p^2a_1^2)\|x(t)\|^2+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle\\&\le-\eta\|x(t)\|^2+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle,\end{aligned}\tag{2.14}$$

trong đó $\eta=\varepsilon-\varepsilon_1^{-1}p^2a_1^2>0$ do điều kiện (2.12). Tích phân hai vế của (2.14) từ 0 đến t ta có

$$V(t,x_t)-V(0,x_0)\le-\eta\int_0^t\|x(s)\|^2ds+2\int_0^t\langle P(s)B_1(s)\omega(s),x(s)\rangle ds$$

mà $V(t,x_t) > 0$ nên

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \\
&\le \eta^{-1}\Big[\langle P(0)\phi(0),\phi(0)\rangle + \varepsilon_1\int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds + \varepsilon_2\int_{-h}^0\int_{\tau}^0 \|\phi(s)\|^2 ds\Big] \\
&\ +2\eta^{-1}pb_1\Big\{\int_0^t \|\omega(s)\|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le \eta^{-1}\big[\|P(0)\| + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 h^2\big]\|\phi\|^2 + 2\eta^{-1}pb_1\omega\Big\{\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\omega = \Big\{\int_0^t \|\omega(s)\|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Đặt $\alpha = \eta^{-1}\big[\|P(0)\| + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 h^2\big]\|\phi\|^2,\ \beta = \eta^{-1}pb_1\omega$, ta có

$$\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \le \alpha + 2\beta\Big\{\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

do đó

$$\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \le \beta + \sqrt{\beta^2+\alpha}, \quad \forall t \ge 0.$$

Cho $t \to \infty$, ta có $x(t) \in L_2([0,\infty), X)$.

Để hoàn thành chứng minh của định lý, ta cần chứng minh điều kiện (1.8). Xét biểu thức

$$\begin{aligned}
&\int_0^t [\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2] ds \\
&= \int_0^t [\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2 + \dot V(s,x_s)] ds - \int_0^t \dot V(s,x_s) ds.
\end{aligned}$$

Vì $V(t,x_t) \ge 0, t \ge 0$ nên

$$-\int_0^t \dot V(s,x_s) ds = V(0,x_0) - V(t,x_t) \le V(0,x_0),\ \forall t \ge 0$$

Hơn nữa với hàm điều khiển ngược và điều kiện (2.10) ta có

$$\|z(t)\|^2 = \langle [C^T(t)C(t) + P(t)B(t)B^T(t)P(t)]x(t), x(t)\rangle.$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t [\|z(s)\|^2 - \gamma\|\omega(s)\|^2]ds \\
&\le \int_0^t [-\varepsilon\|x(s)\|^2 + \varepsilon_1^2 p^2 a_1^2 \|x(s)\|^2 + 2\langle P(s)B_1(s)\omega(s), x(s)\rangle \\
&\quad -\gamma\|\omega(s)\|^2]ds + V(0, x_0) \\
&\le \int_0^t (-\varepsilon + \varepsilon_1^2 p^2 a_1^2 + \frac{1}{\gamma} p^2 b^2)\|x(s)\|^2 ds + V(0, x_0) \\
&\le V(0, x_0) \le \eta^{-1}(\|P(0)\| + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 h^2)\|\phi\|^2
\end{aligned}
$$

bởi vì

$$
\begin{aligned}
2\langle P(s)B_1(s)\omega(s), x(s)\rangle - \gamma\|\omega(s)\|^2 &\le \frac{1}{\gamma}\langle P(s)B_1(s)B_1^T(s)P(s)x(s), x(s) \\
&\le \frac{1}{\gamma} p^2 b_1^2 \|x(s)\|^2.
\end{aligned}
$$

Cho $t \to \infty$, và đặt

$$
c_0 = \frac{\eta^{-1}(\|P(0)\| + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 h^2)\|\phi\|^2}{\gamma},
$$

ta có

$$
\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\phi\|^2 + \int_t^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \le \gamma,
$$

với mọi hàm không âm $\omega \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^r), \phi(t) \in C$. Định lý được chứng minh. $\square$

Bằng cách chứng minh tương tự, Định lý 2.3.1 có thể mở rộng cho hệ điều khiển với nhiều trễ dạng

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i(t)x(t - h_i) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \ge 0, \\
&z(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ t \ge 0, \qquad\qquad (2.15) \\
&x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0],\ h \ge 0.
\end{aligned}
$$

với $h = \max\{h_1, h_2, ..., h_N\}$, ta có định lý sau

Định lý 2.3.2: *Giả sử hệ điều khiển $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0. Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (2.15) có lời giải nếu tồn tại $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ thoả mãn*

$$\varepsilon - p^2\Big(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_1^{-1} a_i^2 + \frac{1}{\gamma} b_1^2\Big) \geq 0,$$

trong đó $a_i = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A_i(t)\|, P \in BM^+(0,\infty)$ là nghiệm của phương trình vi phân Riccati (2.11) với $Q(t) = C^T(t)C(t) + (\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 h)I$. Hơn nữa, hàm điều khiển ngược là

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ \forall t \geq 0.$$

Ví dụ 2.3.3: Xét trong $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với chuẩn

$$\|x\| = \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-3) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0,\\ &z(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),\ t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

với

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2t & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & -1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & -1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t+1} & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & e^{-t} & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & e^{-t} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{2\sin^2 t}}{(1+t)^2} - 1.5 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(t) = B_1(t) = aI,$$

trong đó $a > 0$ xác định bởi

$$9a^2 \sup_{t \geq 0} \|P(t)\|^2 \leq 1,$$

với $P(t)$ là nghiệm của RDE (2.15) với $\varepsilon = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.125$,

$$Q(t) = C^T(t)C(t) + 1.5I.$$

Ta có

$$D^T(t)C(t) = 0, \ D^T(t)D(t) = I.$$

Hơn nữa, để kiểm tra điều kiện điều khiển, chúng ta tìm ma trận $U(t, s)$ bằng cách giải phương trình ma trận hữu hạn chiều

$$\frac{d}{dt}U(t, s) = A(t)U(t, s), \quad U(t, t) = I.$$

Ta có

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} e^{\sin^2 s - \sin^2 t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{s-t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{s-t} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{s-t} \end{pmatrix},$$

Khi đó, với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $T > 0$

$$\|U^T(T,0)x^T\|^2 = e^{-2\sin^2 T} x_1^2 + e^{-2T} \sum_{i=2}^n x_i^2$$

và

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|B^T(s)U^T(T,s)x^T\|^2 ds \\ &= e^{-2\sin^2 T} x_1^2 \int_0^T \frac{1}{(s+1)^2} e^{2\sin^2 s} ds + e^{-2T} \sum_{i=2}^n x_i^2 \int_0^T e^{2s} ds \\ &\geq e^{-2\sin^2 T} x_1^2 \int_0^T \frac{1}{(s+1)^2} ds + e^{-2T} \sum_{i=2}^n x_i^2 \int_0^T ds \\ &= (1 - \frac{1}{T+1}) e^{-2\sin^2 T} x_1^2 + T e^{-2T} \sum_{i=2}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Do đó, với $T = 1$, điều kiện điều khiển hoàn toàn về 0 trong khoảng thời gian hữu hạn $T > 0$

$$\int_0^T \|B^T(s)U^T(T,s)x^T\|^2 ds \geq c\|U^T(T,0)\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

thoả mãn với $c = \frac{1}{2}$, và hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0. Cho $\gamma = 1$. Từ chứng minh của Định lý 2.3.1, ta có thể thay việc giải RDE (2.11) bằng cách giải bất phương trình Riccati

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)B^T(t)P(t) + Q(t) \leq 0,$$

nghiệm của RDE (2.11) được định nghĩa bởi

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin^2 t} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $p = e$, chọn a thoả mãn $3ae \leq 1$, điều kiện (2.12) thoả mãn, do đó bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (2.16) có lời giải.

Chương 3

Bài toán điều khiển H_∞ cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ

Trong chương này, luận văn trình bày nghiên cứu phát triển các kết quả trong chương 2 về điều kiện giải được của bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ PTVP tuyến tính không ôtônôm có trễ hằng trên cả biến trạng thái và biến quan sát dựa trên sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân Riccati và tính điều khiển được hoàn toàn về 0 của hệ điều khiển.

Cuối chương luận văn nghiên cứu mở rộng hơn kết quả giải được của bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có trễ biến thiên trên biến trạng thái và biến quan sát không cần giả thiết điều khiển được về 0.

3.1 Điều khiển H_∞ bền vững cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ hằng

Xét hệ điều khiển tuyến tính không ôtônôm với trễ hằng trên biến trạng thái và biến quan sát

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0,\\
&z(t) = C(t)x(t) + C_1(t)x(t-h) + D(t)u(t),\ t \geq 0, \qquad (3.1)\\
&x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0],\ h \geq 0,
\end{aligned}
$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là hàm nhiễu, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm quan sát; $A(t),\ A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r};\ C(t),\ C_1(t) \in \mathbb{R}^{l\times n},\ D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n),\ h \geq 0$ là hàm ban đầu với chuẩn

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[-h,0]} \|\phi(t)\|.$$

Giả sử các hàm $A_1(t), B_1(t), C(t), C_1(t)$ liên tục và bị chặn. Như thường lệ ta vẫn giả thiết điều kiện

$$D^T(t)[C(t), C_1(t), D(t)] = [0, 0, I],\ \forall t \geq 0. \qquad (3.2)$$

Đặt

$$
a_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|A_1(t)\|, \qquad b_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|B_1(t)\|,
$$
$$
c_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|C_1(t)\|, \qquad c = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|C(t)\|, \qquad p = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|P(t)\|.
$$

Định lý 3.1: *Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0. Khi đó bài toán điều khiển H_∞ bền vững (3.1) có lời giải nếu*

$$1 > 2pa_1,\ 1 > 2c_1^2, \qquad (3.3)$$

$$(1 - 2c_1^2)(1 - \frac{2p^2b_1^2}{\gamma}) > 2c^2 + 4p^2a_1^2 + 8pa_1cc_1. \qquad (3.4)$$

Hơn nữa hàm điều khiển ngược là

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$$

trong đó $P(t)$ là nghiệm của RDE

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)B^T(t)P(t) + I = 0. \tag{3.5}$$

Chứng minh. Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0 thì RDE (3.5) có nghiệm $P \in BM(\mathbb{R}^n_+)$.

Xét hàm Lyapunov cho hệ đóng

$$V(t, x_t) = \langle P(t)x(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} \|x(s)\|^2 ds.$$

Với hàm ngược $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ thì

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B^T(t)P(t)]x(t) + A_1(t)x(t-h) + B_1(t)\omega(t).$$

Lấy đạo hàm của $V(.)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ đóng ta có

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t, x_t)\\
=\ & \langle \dot{P}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)\dot{x}(t), x(t)\rangle + \frac{1}{2}\|x(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(t-h)\|^2\\
=\ & -\langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle\\
& +2\langle P(t)A_1(t)x(t-h), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\|x(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(t-h)\|^2 && (3.6)\\
\leq\ & -\frac{1}{2}\|x(t)\|^2 + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle\\
& +2\langle P(t)A_1(t)x(t-h), x(t)\rangle - \frac{1}{2}\|x(t-h)\|^2. && (3.7)
\end{aligned}$$

Tích phân hai vế của (3.7) từ 0 đến t được:

$$\begin{aligned}
&V(t, x_t) - V(0, x_0)\\
&\leq -\frac{1}{2}\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2\int_0^t \langle P(s)B_1(s)\omega(s), x(s)\rangle ds\\
&\quad +2\int_0^t \langle P(s)A_1(s)x(s-h), x(s)\rangle ds - \frac{1}{2}\int_0^t \|x(s-h)\|^2 ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\frac{1}{2}\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2pb_1 \int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\|ds \\
&\quad +2pa_1 \int_0^t \|x(s)\|\|x(s-h)\|ds - \frac{1}{2}\int_0^t \|x(s-h)\|^2 ds
\end{aligned}
$$

với $p = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|P(t)\|$. Ta có

$$V(t, x_t) \geq 0,$$

$$2pa_1 \int_0^t \|x(s)\|\|x(s-h)\|ds - \frac{1}{2}\int_0^t \|x(s-h)\|^2 ds \leq 2p^2a_1^2 \int_0^t \|x(s)\|^2 ds,$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\|ds &\leq \Big(\int_0^t \|\omega(s)|^2 ds \int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

trong đó $\omega^2 = \int_0^t \|\omega(s)\|^2 ds$ (vì $\omega \in L_2([0,\infty)), \mathbb{R}^r)$).

Nên

$$-V(0, x_0) \leq -(\frac{1}{2} - 2p^2a_1^2)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2pb_1\omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}$$

mà

$$
\begin{aligned}
V(0, x_0) &= \langle P(0)x(0), x(0)\rangle + \frac{1}{2}\int_{-h}^0 \|\phi(s)\|^2 ds \\
&\leq (\|P(0)\| + \frac{1}{2}h)\|\phi\|^2 = \alpha,
\end{aligned}
$$

với $\alpha = \|P(0)\| + \dfrac{1}{2}h$, do đó

$$(\frac{1}{2} - 2p^2a_1^2)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds - 2pb_1\omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} - \alpha \leq 0,$$

áp dụng giải bất phương trình bậc hai với $\dfrac{1}{2} - 2p^2a_1^2 > 0$ (theo (3.3)) có

$$\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leq \Big(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \eta\alpha}}{\eta}\Big)^2$$

trong đó $\beta = pb_1\omega,\ \eta = \dfrac{1}{2} - 2p^2a_1^2$. Cho $t \to \infty$ ta có $x(t) \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo chúng ta chứng minh điều kiện (1.10) với mọi hàm ban đầu $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ và hàm không chắc chắn khác không chấp nhận được $\omega(t)$.

Với $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ và điều kiện (3.2) ta có

$$\begin{aligned}
&\|z(t)\|^2\\
&= \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + \langle P(t)B^T(t)B(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\ +2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h)\rangle + \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h), x(t-h)\rangle
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt\\
&= \int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 + \dot V(t,x(t))\big]dt - \int_0^\infty \dot V(t,x(t))dt\\
&\le \int_0^\infty \Big[\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h)\rangle\\
&\ +\langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h), x(t-h)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|x(t)\|^2\\
&\ +2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)A_1(t)x(t-h), x(t)\rangle\\
&\ -\frac{1}{2}\|x(t-h)\|^2\Big]dt + V(0,x_0)\\
&\le (c^2 - \frac{1}{2})\int_0^\infty \|x(t)\|^2dt + 2(pa_1 + cc_1)\int_0^\infty \|x(t)\|\|x(t-h)\|dt\\
&\ -(\frac{1}{2} - c_1^2)\int_0^\infty \|x(t-h)\|^2dt + 2pb_1\int_0^\infty \|x(t)\|\|\omega(t)\|dt\\
&\ -\gamma\int_0^\infty \|\omega(t)\|^2dt + \alpha\\
&\le \big(c^2 - \frac{1}{2} + \frac{2(pa_1+cc_1)^2}{1-2c_1^2} + \frac{p^2b_1^2}{\gamma}\big)\int_0^\infty \|x(t)\|^2dt + \alpha \le \alpha
\end{aligned}$$

vì từ điều kiện (3.4) có $c^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{p^2b_1^2}{\gamma} + \dfrac{2(pa_1+cc_1)^2}{1-2c_1^2} < 0$. Do đó

$$\int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt \le \alpha$$

nên

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\phi\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leq \gamma$$

với supremum xác định trên $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm khác không $\omega \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$, $c_0 = \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{2\|P(0)\| + h}{2\gamma} \geq 0$.

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.2: Cho $\gamma = 1$. Xét hệ điều khiển (3.1) với

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad A_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4e}\sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{4e}\cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & e^{-\cos t} \end{pmatrix}, \qquad C_1(t) = 0,$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(\sin^2 t + 1) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{8e}\cos^2 t + 3) \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2}\sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0 (theo ví dụ 1.2.8), khi đó phương trình vi phân Riccati có nghiệm

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} & 0 \\ 0 & e^{\cos t} \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa $D^T(t)C(t) = 0,\ D^T(t)C_1(t) = 0,\ D^T(t)D(t) = I,\ a_1 = \frac{1}{4e},\ b_1 = \frac{\sqrt{2}}{8e},\ c_1 = 0,\ c = \frac{1}{2},\ p = e$ thoả mãn

$$1 > 2pa_1,\ 1 > 2c_1^2,$$
$$(1 - 2c_1^2)(1 - 2p^2b_1^2) > 2c^2 + 4p^2a_1^2 + 8pa_1cc_1.$$

Vậy bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.1) có lời giải với hàm điều khiển ngược được xác định bởi

$$u(t) = \begin{pmatrix} -e^{-\sin^2 t} & 0 \\ 0 & -e^{-\cos^2 t} \end{pmatrix} x(t).$$

Từ định lý 3.1, cho $A_1(t) = C_1(t) = 0,\ x(0) = x_0$, chúng ta có ngay điều kiện giải được của hệ phương trình vi phân không ôtônôm không có trễ (2.1) với giả thiết $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn. Ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.3: *Giả sử hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được hoàn toàn về 0. Khi đó bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (2.1) có lời giải nếu*

$$1 \ > \ 2c^2 + \frac{2p^2 b_1^2}{\gamma}.$$

Hơn nữa hàm điều khiển ngược được xác định bởi $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ trong đó $P(t)$ là nghiệm của phương trình RDE (3.5).

3.2 Điều khiển H_∞ bền vững cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ biến thiên

Xét hệ điều khiển tuyến tính không ôtônôm có trễ biến thiên rời rạc

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h(t)) + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t), t \geq 0, \\ &z(t) = C(t)x(t) + C_1(t)x(t-h(t)) + D(t)u(t),\ t \geq 0, \qquad (3.8) \\ &x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0],\ h \geq 0, \end{aligned}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là hàm vào không chắc chắn, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm ra bị quan sát, $A(t),\ A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r},\ C(t),\ C_1(t) \in \mathbb{R}^{l\times n},\ D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn $\|\phi\| = \sup_{t\in[-h,0]} \|\phi(t)\|$. Hàm trễ biến thiên thoả mãn điệu kiện

$$0 \le h(t) \le h, \quad \dot{h}(t) \le \delta < 1.$$

Xét hệ (3.8) với hàm $B_1(t),\ C_1(t)$ liên tục bị chặn và giả thiết

$$D^T(t)[C(t), C_1(t), D(t)] = [0, 0, I],\ \forall t \ge 0, \tag{3.9}$$

$$c_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|C_1^T(t)C_1(t)\|. \tag{3.10}$$

và chọn $\varepsilon > \dfrac{1+2c_1}{1-\delta}$.

Định lý 3.4: *Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.8) có lời giải nếu tồn tại ma trận $P \in BM^+(0,\infty)$ thoả mãn phương trình Riccati sau*

$$\begin{aligned} &\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)\big[B(t)B^T(t) - A_1(t)A_1^T(t) - \\ &-\frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)\big]P(t) + 2C^T(t)C(t) + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hàm điều khiển ngược được xác định bởi:

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ t \ge 0.$$

Chứng minh. Với hàm ngược $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ thì hệ đóng là

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)B^T(t)P(t)]x(t) + A_1(t)x(t-h(t)) + B_1(t)\omega(t).$$

Xét hàm Lyapunov:

$$V(t, x_t) = V_1(t, x_t) + V_2(t, x_t)$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1(t, x_t) &= \langle P(t)x(t), x(t)\rangle \\ V_2(t, x_t) &= \frac{1+2c_1}{1-\delta}\int_{t-h(t)}^{t} \|x(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của $V_1(.)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ đóng ta có

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_1(t, x_t)\\
&= \langle \dot{P}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)\dot{x}(t), x(t)\rangle\\
&= -\epsilon\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - 2\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad -\langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)A_1(t)x(t-h(t)), x(t)\rangle\\
&\quad +2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle\\
&\le -\epsilon\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - 2\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad +\|x(t-h(t))\|^2 + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle
\end{aligned}$$

vì áp dụng bổ đề 1.5.1 có

$$\begin{aligned}
&2\langle P(t)A_1(t)x(t-h(t)), x(t)\rangle\\
&\qquad \le \langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle + \|x(t-h(t))\|^2.
\end{aligned}$$

Tương tự lấy đạo hàm của $V_2(.)$ ta có

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t, x_t) &= \frac{1+2c_1}{1-\delta}\big[\|x(t)\|^2 - (1-\dot{h}(t))\|x(t-h(t))\|^2\big]\\
&\le \frac{1+2c_1}{1-\delta}\big[\|x(t)\|^2 - (1-\delta)\|x(t-h(t))\|^2\big]\\
&\le \frac{1+2c_1}{1-\delta}\|x(t)\|^2 - (1+2c_1)\|x(t-h(t))\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t, x_t)\\
&\le \Big(\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon\Big)\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - 2\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad +2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle - 2c_1\|x(t-h(t))\|^2 \qquad (3.12)\\
&\le \Big(\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon\Big)\|x(t)\|^2 + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

bởi vì

$$\begin{aligned}
\langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \ &\geq \ 0,\\
\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \ &\geq \ 0,\\
\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \ &\geq \ 0.
\end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế của (3.13) từ 0 đến t được:

$$\begin{aligned}
&V(t,x_t) - V(0,x_0)\\
&\leq \ (\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2\int_0^t \langle P(s)B_1(s)\omega(s), x(s)\rangle ds\\
&\leq \ (\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2\|P\|\|B_1\|\int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\| ds
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&V(t,x_t) \geq 0,\\
&\int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\| ds \leq \Big(\int_0^t \|\omega(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Do đó với $\omega^2 = \int_0^\infty \|\omega(s)\|^2 ds$ (vì $\omega(t) \in L_2([0,\infty)), \mathbb{R}^r)$) thì

$$-V(0,x_0) \leq (\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds + 2\|P\|\|B_1\|\omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}$$

mà

$$\begin{aligned}
V(0,x_0) \ &\leq \ \langle P(0)x(0), x(0)\rangle + \frac{1+2c_1}{1-\delta}\int_{-h(0)}^0 \|\phi(s)\|^2 ds\\
&\leq \ (\|P(0)\| + \frac{(1+2c_1)h}{1-\delta})\|\phi\|^2 \ = \ \alpha
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha = (\|P(0)\| + \frac{(1+2c_1)h}{1-\delta})\|\phi\|^2$, nên

$$(\varepsilon - \frac{1+2c_1}{1-\delta})\int_0^t \|x(s)\|^2 ds - 2\|P\|\|B_1\|\omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} - \alpha \leq 0,$$

áp dụng giải bất phương trình bậc hai với $\varepsilon - \dfrac{1+2c_1}{1-\delta} > 0$ suy ra

$$\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leq \Big(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \eta\alpha}}{\eta}\Big)^2$$

trong đó

$$\beta = \|P\|\|B_1\|\omega, \quad \eta = \varepsilon - \frac{1+2c_1}{1-\delta}.$$

Cho $t \to \infty$ ta có $x(t) \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^n)$. Điều kiện (1.9) được thỏa mãn.

Tiếp theo chúng ta chứng minh điều kiện (1.10) với mọi hàm ban đầu $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu chấp nhận được $\omega(t)$.

Với $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ và điều kiện (3.9) ta có

$$\begin{aligned}
&\|z(t)\|^2 \\
&= \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + \langle P(t)B^T(t)B(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad +2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle + \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle.
\end{aligned}$$

Kết hợp với (3.12) ta được

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt \\
&= \int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 + \dot V(t,x_t)\big]dt - \int_0^\infty \dot V(t,x_t)dt \\
&\le \int_0^\infty \Big[- \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle \\
&\qquad + \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2 \\
&\qquad - \frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle \\
&\qquad +(\frac{1+2c_1}{1-\delta} - \varepsilon)\|x(t)\|^2 - 2c_1\|x(t-h(t))\|^2\Big]dt + \alpha.
\end{aligned}$$

Sử dụng bổ đề 1.5.1 với

$$\begin{aligned}
&2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad \le \ \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle \\
&\quad \le \ c_1\|x(t-h(t))\|^2, \\
&2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2 \\
&\quad \le \ \frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle,
\end{aligned}$$

nên

$$\int_0^{\infty} \left[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\right] dt \ \leq \ \alpha.$$

Đặt

$$c_0 = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{(\|P(0)\| + \dfrac{(1+2c_1)h}{1-\delta})\|\phi\|^2}{\gamma}$$

ta có

$$\sup \frac{\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\phi\|^2 + \int_0^{\infty} \|\omega(t)\|^2 dt} \leq \gamma$$

với supremum lấy trên $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu khác không $\omega \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$. Định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ 3.5: Với $\gamma > 0$ cho trước. Xét hệ tuyến tính không ôtônôm (3.8) với hàm trễ biến thiên $h(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t$ và

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & 2\cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 t + 2 \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3\gamma}\cos(t - \frac{1}{2}\sin^2 t) & 0 \\ 0 & \sqrt{8\gamma}\sin(t - \frac{1}{2}\sin^2 t) \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}, \quad C_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t}\cos^4 t + 1) - 4e^t, \\ b(t) &= \frac{1}{2}e^{-t}\sin^4 t - 4e^t. \end{aligned}$$

Ta có $h = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{2}, c_1 = 1$ và $\varepsilon = 8$ thoả mãn $\varepsilon > \dfrac{1 + 2c_1}{1 - \delta}$. Nghiệm của RDE (3.11) được cho bởi

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Khi đó bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.8) có lời giải. Hàm điều khiển ngược được xác định bởi

$$u(t) = \begin{pmatrix} -(\cos^2 t + 1)e^{-t} & 0 \\ 0 & -(\sin^2 t + 2)e^{-t} \end{pmatrix} x(t).$$

Hơn nữa ta có một điều kiện khác để hệ điều khiển (2.1) không có trễ giải được khi cho $A_1(t) = C_1(t) = 0$ mà không cần điều kiện hệ $[A(t), B(t)]$ là điều khiển được đều hoàn toàn hoặc điều khiển được hoàn toàn về 0.

Hệ quả 3.6: *Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.8) với $A_1(t) = C_1(t) = 0$ (hay hệ (2.1)) có lời giải nếu tồn tại ma trận $P \in BM^+(0, \infty)$ thoả mãn phương trình Riccati*

$$\begin{aligned} &\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)\big[B(t)B^T(t) - \\ &-\frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)\big]P(t) + 2C^T(t)C(t) + \varepsilon I = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

với $\varepsilon > 1$. Hơn nữa hàm điều khiển ngược được xác định bởi:

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ t \geq 0.$$

3.3 Điều khiển H_∞ cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ hỗn hợp

Xét hệ điều khiển tuyến tính không ôtônôm có trễ rời rạc và tích phân

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h(t)) + A_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds \\
&\quad + B(t)u(t) + B_1(t)\omega(t),\ t \geq 0 \\
z(t) &= C(t)x(t) + C_1(t)x(t-h(t)) + C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds \\
&\quad + D(t)u(t),\ t \geq 0, \\
x(t) &= \phi(t), t \in [-max(h,k), 0], h \geq 0, k \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là vectơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là hàm điều khiển, $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là hàm vào không chắc chắn, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ là hàm ra bị quan sát, $A(t),\ A_1(t),\ A_2(t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}, C(t),\ C_1(t), C_2(t) \in \mathbb{R}^{l\times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ là các hàm ma trận liên tục cho trước trên $\mathbb{R}^+$, $\phi \in C([-\max(h,k),0],\mathbb{R}^n)$ là hàm ban đầu với chuẩn

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[-\max(h,k),0]} \|\phi(t)\|.$$

Các hàm trễ biến thiên thoả mãn điệu kiện

$$0 \leq h(t) \leq h, \quad \dot{h}(t) \leq \delta < 1, \quad 0 \leq k(t) \leq k, \quad \dot{k}(t) \leq \theta < 1.$$

Giả sử $B_1(t),\ C_1(t),\ C_2(t)$ liên tục bị chặn và

$$D^T(t)[C(t), C_1(t), C_2(t), D(t)] = [0,0,0,I],\ \forall t \geq 0, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
&c_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|C_1^T(t)C_1(t)\|,\ c_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|C_2^T(t)C_2(t)\|, \\
&\varepsilon > \frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ta có kết quả sau:

Định lý 3.7: *Bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.15) có lời giải nếu tồn tại ma trận $P \in BM^+(0,\infty)$ thoả mãn phương trình*

$$\begin{aligned}&\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)\big[B(t)B^T(t) - A_1(t)A_1^T(t)\\ &-A_2(t)A_2^T(t) - \frac{1}{\gamma}B_1(t)B_1^T(t)\big]P(t) + 3C^T(t)C(t) + \varepsilon I = 0 \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Hơn nữa hàm điều khiển ổn định bền vững được xác định bởi:

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t), \quad t \geq 0.$$

Chứng minh. Với hàm điều khiển ngược $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ thì hệ đóng là

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A(t) - B(t)B^T(t)P(t)]x(t) + A_1(t)x(t-h(t))\\ &\quad +A_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds + B_1(t)\omega(t).\end{aligned}$$

Xét hàm Lyapunov dạng

$$V(t,x_t) = V_1(t,x_t) + V_2(t,x_t) + V_3(t,x_t)$$

trong đó

$$\begin{aligned}V_1(t,x_t) &= \langle P(t)x(t), x(t)\rangle\\ V_2(t,x_t) &= \frac{1+3c_1}{1-\delta}\int_{t-h(t)}^{t}\|x(s)\|^2ds\\ V_3(t,x_t) &= \frac{(1+3c_2)k}{1-\theta}\int_{t-k(t)}^{t}\int_{s}^{t}\|x(\xi)\|^2d\xi ds\end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của $V_1(.)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ đóng ta có

$$\begin{aligned}&\dot{V}_1(t,x_t)\\ &= \langle \dot{P}(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)\dot{x}(t), x(t)\rangle\\ &= -\epsilon\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\ &\ -\langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - \langle P(t)A_2(t)A_2^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - 3\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle$$
$$+2\langle P(t)A_1(t)x(t-h(t)), x(t)\rangle + 2\langle P(t)A_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds, x(t)\rangle$$
$$+2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle$$

Từ bổ đề 1.5.1 và 1.5.2 ta có

$$\begin{aligned}
&2\langle P(t)A_1(t)x(t-h(t)), x(t)\rangle - \langle P(t)A_1(t)A_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\qquad \le \ \|x(t-h(t))\|^2, \\
&2\langle P(t)A_2(t)\int_{t-k}^{t} x(s)ds, x(t)\rangle - \langle P(t)A_2(t)A_2^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\qquad \le \ \langle \int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds, \int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle \\
&\qquad \le \ k(t)\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2 ds \ \le \ k\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2 ds,
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_1(t, x_t) \\
&\le -\varepsilon\|x(t)\|^2 - \langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle - 3\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\quad +\|x(t-h(t))\|^2 + k\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2 ds + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle
\end{aligned}$$

Tương tự lấy đạo hàm $\dot{V}_2(.), \dot{V}_3(.)$ dọc theo quỹ đạo nghiệm của hệ đóng, ta được

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t, x_t) &= \frac{1+3c_1}{1-\delta}\big[\|x(t)\|^2 - (1-\dot{h}(t))\|x(t-h(t))\|^2\big] \\
&\le \frac{1+3c_1}{1-\delta}\big[\|x(t)\|^2 - (1-\delta)\|x(t-h(t))\|^2\big] \\
&\le \frac{1+3c_1}{1-\delta}\|x(t)\|^2 - (1+3c_1)\|x(t-h(t))\|^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3(t,x_t) &= \frac{(1+3c_2)k}{1-\theta}\big[k(t)\|x(t)\|^2 - (1-\dot{k}(t))\int_{t-k(t)}^{t}\|x(s)\|^2 ds\big] \\
&\le \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta}\|x(t)\|^2 - (1+3c_2)k\int_{t-k(t)}^{t}\|x(s)\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Kết hợp $\dot{V}_1(.), \dot{V}_2(.), \dot{V}_3(.)$ ta có

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) \\
&\le \big(\frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\gamma} - \varepsilon\big)\|x(t)\|^2 \\
&\quad -\langle P(t)B(t)B^T(t)P(t)x(t),x(t)\rangle - \langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t),x(t)\rangle \\
&\quad -3\langle C^T(t)C(t)x(t),x(t)\rangle + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle \\
&\quad -3c_1\|x(t-h(t))\|^2 - 3c_2k\int_{t-k(t)}^{t}\|x(s)\|^2 ds \qquad (3.19) \\
&\le \big(\frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta} - \varepsilon\big)\|x(t)\|^2 + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t),x(t)\rangle. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Lấy tích phân hai vế của (3.19) từ 0 đến t được:

$$
\begin{aligned}
& V(t,x_t) - V(0,x_0) \\
&\le \big(\frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta} - \varepsilon\big)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \\
&\quad +2\int_0^t \langle P(s)B_1(s)\omega(s),x(s)\rangle ds \\
&\le \big(\frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta} - \varepsilon\big)\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \\
&\quad +2\|P\|\|B_1\|\int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\| ds.
\end{aligned}
$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
V(t,x_t) &\ge 0, \\
V(0,x_0) &= \langle P(0)x(0),x(0)\rangle + \frac{1+3c_1}{1-\delta}\int_{-h(0)}^{0}\|\phi(s)\|^2 ds \\
&\quad + \frac{(1+3c_2)k}{1-\theta}\int_{-k(0)}^{0}\int_s^0 \|\phi(\xi)\|^2 d\xi ds \\
&\le [\|P(0)\| + \frac{(1+3c_1)h}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{2(1-\theta)}]\|\phi\|^2 = \alpha,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\omega(s)\|\|x(s)\|ds &\le \Big(\int_0^t \|\omega(s)\|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \omega\Big(\int_0^t \|x(s)\|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

trong đó

$$\alpha = [\|P(0)\| + \frac{(1+3c_1)h}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{2(1-\theta)}]\|\phi\|^2 > 0$$
$$\omega^2 = \int_0^\infty \|\omega(s)\|^2ds.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\big(\varepsilon - \frac{1+3c_1}{1-\delta} - \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta}\big)\int_0^t \|x(s)\|^2ds\\ &-2\|P\|\|B_1\|\omega\big(\int_0^t \|x(s)\|^2ds\big)^{\frac{1}{2}} - \alpha \le 0,\end{aligned}$$

áp dụng giải bất phương trình bậc hai với $\varepsilon - \dfrac{1+3c_1}{1-\delta} - \dfrac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta} > 0$ ta có

$$\int_0^t \|x(s)\|^2ds \le \Big(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2+\eta\alpha}}{\eta}\Big)^2,$$

trong đó $\beta = \|P\|\|B_1\|\omega,\ \eta = \varepsilon - \dfrac{1+3c_1}{1-\delta} - \dfrac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta}$. Cho $t\to\infty$ ta có $x(t) \in L_2([0,\infty),\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo chúng ta chứng minh điều kiện (1.10) với mọi hàm ban đầu $\phi \in C([-\max(h,k),0],\mathbb{R}^n)$ và hàm nhiễu khác không chấp nhận được $\omega(t)$.

Với $u(t) = -B^T(t)P(t)x(t)$ và (3.16) ta có

$$\begin{aligned}&\|z(t)\|^2\\ &= \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle + \langle P(t)B^T(t)B(t)P(t)x(t), x(t)\rangle\\ &\quad+\langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle\\ &\quad+\langle C_2^T(t)C_2(t)\int_{t-k(t)}^t x(s)ds, \int_{t-k(t)}^t x(s)ds\rangle\end{aligned}$$

$$+2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle + 2\langle C(t)x(t), C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle$$
$$+2\langle C_1(t)x(t-h(t)), C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle$$

Kết hợp với (3.18) ta được

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt\\
&= \int_0^\infty \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 + \dot{V}(t,x_t)\big]dt - \int_0^\infty \dot{V}(t,x_t)dt\\
&\le \int_0^\infty \Big[-2\langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\quad +\langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle\\
&\quad +\langle C_2^T(t)C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds, \int_{t-k}^{t} x(s)ds\rangle\\
&\quad +2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle\\
&\quad +2\langle C(t)x(t), C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle\\
&\quad +2\langle C_1(t)x(t-h(t)), C_2(t)\int_{t-k}^{t} x(s)ds\rangle\\
&\quad -\frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle + 2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle\\
&\quad -\gamma\|\omega(t)\|^2 - 3c_1\|x(t-h(t))\|^2 - 3c_2k\int_{t-k(t)}^{t}\|x(s)\|^2ds\\
&\quad +\Big(\frac{1+3c_1}{1-\delta} + \frac{(1+3c_2)k^2}{1-\theta} - \varepsilon\Big)\|x(t)\|^2\Big]dt + \alpha.
\end{aligned}$$

Lại áp dụng Bổ đề 1.5.1 và 1.5.2 có

$$\begin{aligned}
2\langle C(t)x(t), C_1(t)x(t-h(t))\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle\\
&\le \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle\\
&\le c_1\|x(t-h(t))\|^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2\langle C(t)x(t), C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle - \langle C^T(t)C(t)x(t), x(t)\rangle \\
&\qquad \le\ \langle C_2^T(t)C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds, \int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle \\
&\qquad \le\ c_2k\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2ds, \\
&2\langle C_1(t)x(t-h(t)), C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle \\
&\qquad \le\ \langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle \\
&\qquad +\langle C_2^T(t)C_2(t)\int_{t-k}^{t} x(s)ds, \int_{t-k}^{t} x(s)ds\rangle \\
&\qquad \le\ c_1\|x(t-h(t))\|^2 + c_2k\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2ds \\
&2\langle P(t)B_1(t)\omega(t), x(t)\rangle - \gamma\|\omega(t)\|^2\ \le\ \frac{1}{\gamma}\langle P(t)B_1(t)B_1^T(t)P(t)x(t), x(t)\rangle, \\
&\langle C_1^T(t)C_1(t)x(t-h(t)), x(t-h(t))\rangle\ \le\ c_1\|x(t-h(t))\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\langle C_2^T(t)C_2(t)\int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds, \int_{t-k(t)}^{t} x(s)ds\rangle\ \le\ c_2k\int_{t-k(t)}^{t} \|x(s)\|^2ds,
$$

Do đó

$$
\int_0^\infty \left[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\right]dt\ \le\ \alpha.
$$

Vậy

$$
\sup\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2dt}{c_0\|\phi\|^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2dt} \le \gamma
$$

với supremum xác định trên $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ và hàm khác không $\omega(t) \in L_2([0, \infty), \mathbb{R}^r),\ c_0 = \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.8: Xét hệ tuyến tính không ôtônôm (3.17) với hàm giá trị ban đầu $\phi(t) \in C([-1, 0], \mathbb{R}^n)$, hàm trễ biến thiên $h(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t, k(t) = \sin^2\frac{t}{2}$ và

$$
A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix}, \qquad A_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(\cos t + 1) \end{pmatrix},
$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + 1) & 0 \\ 0 & 2\sin t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos^2 t + 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma}(\sin^2 t + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma}\cos t \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}\sin t} \end{pmatrix}, \qquad C_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad D(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{-1}{2}e^{\cos t}(\sin^4 t - \frac{5}{2}\sin^2 t + \sin t + \frac{15}{4}) + \frac{1}{2}\sin t - 6e^{-\cos t} \\ b(t) &= \frac{1}{2}e^{\sin t}(\cos^4 t + 3\cos^2 t - 4\cos t - 5) - \frac{1}{2}\cos t - 1 - 6e^{-\sin t}. \end{aligned}$$

Ta có $h = \delta = k = \theta = \frac{1}{2}, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{3}$ và điều kiện (3.16) đạt được. Cho $\varepsilon = 10$ thoả mãn $\varepsilon > \dfrac{1 + 3c_1}{1 - \delta} + \dfrac{(1 + 3c_2)k^2}{1 - \gamma}$. Nghiệm của RDE (3.18) được cho bởi

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{\cos t} & 0 \\ 0 & e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

Khi đó bài toán điều khiển H_∞ bền vững cho hệ (3.17) có lời giải. Hàm điều khiển ổn định bền vững được định nghĩa bởi

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\sin t.e^{\cos t} & 0 \\ 0 & -(\cos^2 t + 1)e^{\sin t} \end{pmatrix} x(t).$$

Tương tự như phần 3.2, chúng ta có hệ quả đối với hệ điều khiển không ôtônôm có trễ cố định và hệ ôtônôm.

Hệ quả 3.9: *Giả sử* $h(t) = h, k(t) = k$. *Bài toán điều khiển* H_∞ *bền vững cho hệ (3.17) có lời giải nếu tồn tại ma trận* $P \geq 0$ *thoả mãn phương trình ma trận*

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)\big[B(t)B^T(t) - A_1(t)A_1^T(t)$$
$$-A_2(t)A_2^T(t) - B_1(t)B_1^T(t)\big]P(t) + 3C^T(t)C(t) + \varepsilon I = 0.$$

với $\varepsilon > 1 + 3c_1 + (1 + 3c_2)k^2$. *Hơn nữa hàm điều khiển ổn định bền vững được xác định bởi:*

$$u(t) = -B^T(t)P(t)x(t),\ t \geq 0.$$

Trường hợp hệ (3.19) là hệ ôtônôm, bài toán điều khiển H_∞ (3.19) có lời giải mà không cần điều kiện đạo hàm của các hàm trễ bị chặn bởi 1,

$$\dot{h}(t) \leq \delta < 1,\ \dot{k}(t) \leq \gamma < 1.$$

Với ε xác định như trong Định lý 3.7, ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.10: *Xét hệ (3.17) là hệ ôtônôm. Khi đó bài toán điều khiển* H_∞ *cho hệ (3.17) có lời giải nếu tồn tại ma trận* $P \geq 0$ *thoả mãn phương trình Riccati đại số*

$$PA + A^TP - P(BB^T - A_1A_1^T - A_2A_2^T - \frac{1}{\gamma}B_1B_1^T)P + 3C^TC + \varepsilon I = 0.$$

Hàm điều khiển ổn định bền vững được xác định bởi $u(t) = -B^TPx(t)$.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày bài toán điều khiển H_∞ cho một lớp hệ phương trình vi phân không ôtônôm có trễ. Ngoài phần giới thiệu nghiên cứu và kết quả của bài toán điều khiển H_∞ cho các hệ tuyến tính có trễ, luận văn đã phát triển và mở rộng các kết quả của [9, 10] cho hệ tuyến tính không ôtônôm có trễ hỗn hợp. Các kết quả đạt được của luận văn là mới và mở rộng trường hợp cho hệ tuyến tính:

∘ Không ôtônôm.

∘ Có nhiễu.

∘ Có trễ xuất hiện trong cả biến trạng thái và biến quan sát, trễ biến thiên theo thời gian và trễ hỗn hợp.

Trong hai trường hợp sau các kết quả không cần giả thiết điều khiển được của hệ, bài toán điều khiển H - vô cùng có lời giải đều dựa vào giả thiết sự tồn tại của phương trình vi phân Riccati. Luận văn đã đưa ra nhiều ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết. Phương pháp nghiên cứu chính sử dụng trong luận văn là các phương pháp của Đại số tuyến tính, Giải tích và Giải tích hàm, Lý thuyết ổn định và Lý thuyết điều khiển. Công cụ chủ đạo là phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii và nghiệm của các phương trình vi phân Riccati liên quan đến hàm Lyapunov. Tuy nhiên, do khả năng còn hạn chế và thời gian không cho phép nên một số kết quả còn chưa đạt được như mong muốn (ví dụ như trong Định lý 3.4, Định lý 3.7, các hàm trễ biến thiên phải thoả mãn điều kiện đạo hàm bị chặn bởi 1, $\dot{h}(t) \le \delta < 1,\ \dot{k}(t) \le \gamma < 1$). Chúng tôi hi vọng có thể giải quyết triệt để các vấn đề này trong một thời gian không xa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Nguyễn T. Hoàn, Phạm Phu (2003), *Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định*, NXB Giáo dục.

[2] Vũ N. Phát (2001), *Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học,* NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] B.A. Francis (1987), *A course in H_∞ control theory*, Springer-Verlag, Berlin.

[4] B.A.Francis and J.C.Doyle, *Linear control theory with an H_∞ potimality criterion*, SIAM J. Control Optim, Vol. 25, 815-832.

[5] Ikeda M., H. Maeda and S. Komada (1972), *Stabilization of linear systems*, SIAM J. Control, 10, pp. 716-729.

[6] B. van Keulen (1993), *H_∞ control for distributed parameter systems: A statespace approach*. Birkhauser, Boston.

[7] P.NIAMSUP and VN Phat (2009), "H_∞ optimal control of linear time-varying systems via controllability approach", ScienceAsia, Vol.35, 231-242.

[8] VN Phat and Q.P.Ha (2009), "H_∞ control and exponential stability for a class of nonlinear non-autonomous with time-varying delay", J.Optim. Theory Appl., Vol. 142, 603-6018.

[9] Vu N. Phat and Do Q. Vinh, (2007) "Controllability and H_∞ Control for linear Continuous Time-Varying Uncertain Systems", *Differential Equations and Applications*, Vol.4, 105-111.

[10] Vu N. Phat, Do Q. Vinh and Nguyen S. Bay (2008), "L_2-stabilization and H_∞ control for Linear Non-autonomous Time-delay Systems in Hilbert Spaces

via Riccati Equations", *Advances in Nonlinear Variational Inequalities*, Vol. 11, Number 2, 75-86.