§¸nh gi¸ sai sè vÒ vÞ trÝ trong c¸c hÖ täa ®é kh¸c nhau

TrÇn Quèc B×nh, Nguyễn Cao HuÇn

Khoa Địa lý, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội

1. Më ®Çu

Ngày nay, cùng với sự phát triển của khoa học công nghệ, đã xuất hiện nhiều phương pháp thu thập và xử lý dữ liệu không gian mới. Do đặc thù của từng phương pháp và do yêu cầu kỹ thuật của nguồn cung cấp mà dữ liệu thu được sẽ nằm trong các hệ tọa độ và hệ quy chiếu khác nhau. Các phần mềm Hệ thông tin địa lý (GIS) phổ biến hiện nay đều có khả năng làm việc đồng thời với dữ liệu không gian trong nhiều hệ tọa độ. Tuy nhiên, chúng chỉ cho phép chuyển đổi tọa độ mà không có khả năng chuyển đổi sai số của các tọa độ đó. Bài báo này đề xuất các công thức tính chuyển đổi sai số về vị trí giữa hệ tọa độ vuông góc không gian, hệ tọa độ trắc địa (địa lý) và hệ tọa độ phẳng bản đồ.

2. C¸c c«ng thøc c¬ b¶n

Giả sử tọa độ (x_1, x_2, x_3) của điểm P được xác định với ma trận hiệp phương sai sau:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{1}$$

Theo Lý thuyết sai số, sai số trung phương về vị trí của điểm P chính là căn bậc 2 của các phần tử chéo của ma trận Σ:

$$m_i = \sqrt{\delta_{ii}}, \qquad i = 1,2,3 \tag{2}$$

Từ công thức (2) có thể nhận thấy việc chuyển đổi sai số về vị trí có thể được thực hiện thông qua chuyển đổi ma trận hiệp phương sai Σ.

Giả sử phép chuyển đổi tọa độ giữa 2 hệ $X = (x_1, x_2, x_3)$ và $U = (u_1, u_2, u_3)$ được biểu diễn bởi phương trình sau:

$$X = F(U) \tag{3}$$

Trong trường hợp tổng quát, hàm vectơ F có dạng phi tuyến tính. Phân tích vế phải của (3) thành dãy Taylor với điểm khởi đầu U_0 và loại bỏ các phần tử bậc cao sẽ được phương trình tuyến tính sau:

$$X = F(U_0) + \frac{dF}{dU} dU = F(U_0) + DdU \tag{4}$$

với $$D = \frac{dF}{dU} = \frac{dX}{dU} \tag{5}$$

Mối quan hệ giữa các ma trận hiệp phương sai Σ_U, Σ_X trong các hệ tọa độ U và X được suy ra từ công thức (4) và quy tắc chuyển đổi hiệp phương sai [2, 7]:

$$\Sigma_X = D\Sigma_U D^T \tag{6}$$

Từ công thức trên suy ra:

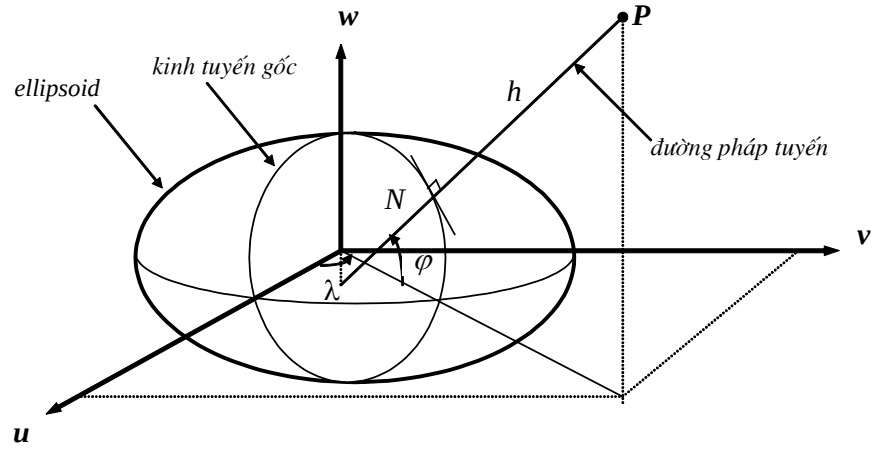
$$\Sigma_U = \overline{D}\Sigma_X \overline{D}^T \qquad (7)$$

với $\overline{D} = \dfrac{dU}{dX} = D^{-1}$

Các phần tiếp theo của bài báo này sẽ tính toán ma trận D cho bài toán chuyển đổi giữa các hệ tọa độ khác nhau.

3. Chuyển đổi giữa hệ tọa độ trắc địa và hệ tọa độ vuông góc không gian

Các yếu tố của hệ tọa độ trắc địa (φ, λ, h) và hệ tọa độ vuông góc không gian (u, v, w) được thể hiện trên hình 1.



Hình 1: Hệ tọa độ trắc địa (φ, λ, h) và hệ tọa độ địa tâm (u, v, w).

Với 1 ellipsoid xác định, mối quan hệ giữa tọa độ vuông góc không gian (u, v, w) và tọa độ trắc địa (φ, λ, h) được biểu diễn qua các công thức sau [4, 6]:

$$\begin{aligned} u &= (N+h)\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ v &= (N+h)\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ w &= [N(1-e^2)+h]\sin(\varphi) \end{aligned} \qquad (8)$$

trong đó:

a : bán trục lớn của ellipsoid,

f : độ dẹt của ellipsoid,

$e^2 = 2f - f^2$: bình phương của độ lệch tâm thứ nhất,

$N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi)}}$: bán kính cong của vòng thẳng đứng thứ nhất,

φ, λ, h : vĩ độ, kinh độ và độ cao trắc địa.

Để ý rằng:

$$\frac{dN}{d\varphi} = \frac{ae^2\sin\varphi\cos\varphi}{[1-e^2\sin^2(\varphi)]^{3/2}},$$

lấy vi phân các phương trình (8) ta được:

$$D_{\varphi,\lambda,h\to u,v,w} = \frac{d(u,v,w)}{d(\varphi,\lambda,h)} = \begin{bmatrix} -(M+h)\cos\lambda\sin\varphi & -(N+h)\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -(M+h)\sin\lambda\sin\varphi & (N+h)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad (9)$$

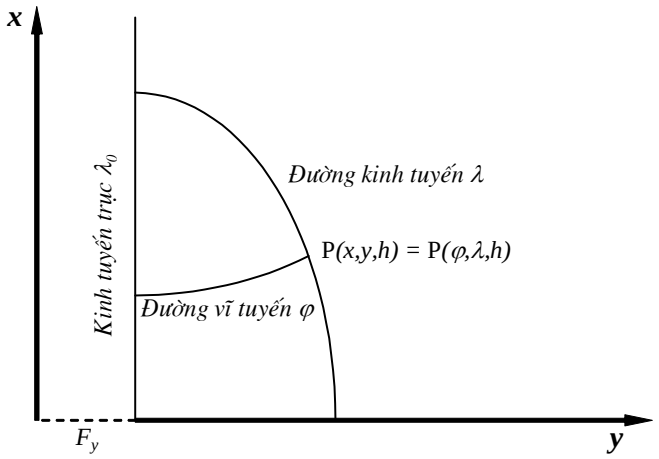
với $M = \dfrac{a(1-e^2)}{[1-e^2\sin^2(\varphi)]^{3/2}}$ - bán kính cong của cung kinh tuyến.

Ma trận $D_{\varphi,\lambda,h\to u,v,w}$ được sử dụng để chuyển đổi sai số về vị trí từ hệ tọa độ trắc địa sang hệ tọa độ vuông góc không gian. Ma trận $D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h}$ để chuyển đổi từ hệ tọa độ vuông góc không gian sang tọa độ trắc địa thu được bằng cách lấy nghịch đảo của $D_{\varphi,\lambda,h\to u,v,w}$:

$$D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h} = \frac{d(\varphi,\lambda,h)}{d(u,v,w)} = D^{-1}_{\varphi,\lambda,h\to u,v,w} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\cos\lambda\sin\varphi}{M+h} & -\dfrac{\sin\lambda\sin\varphi}{M+h} & \dfrac{\cos\varphi}{M+h} \\ -\dfrac{\sin\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & \dfrac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ \cos\lambda\cos\varphi & \sin\lambda\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \qquad (10)$$

4. Chuyển đổi giữa hệ tọa độ trắc địa và hệ tọa độ vuông góc phẳng

Phần này chỉ xét trường hợp sử dụng các lưới chiếu bản đồ thuộc loại Transverse Mercator như Gauss-Krugger, UTM...



Hình 2. Hệ tọa độ vuông góc phẳng.

Phương trình chuyển đổi từ tọa độ trắc địa sang tọa độ vuông góc phẳng như sau [3]:

$$\begin{aligned} \frac{x-F_x}{k_0N} &= \frac{S}{N} + \frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ &+ \frac{(\lambda-\lambda_0)^4}{24}\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)\left(5-t^2\eta^2+4\eta^4\right)+ \\ &+ \frac{(\lambda-\lambda_0)^6}{720}\sin(\varphi)\cos^5(\varphi)\left(61-58t^2+t^4+270\eta^2-330t^2\eta^4\right) \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{y-F_y}{k_0N} &= (\lambda-\lambda_0)\cos(\varphi) + \frac{(\lambda-\lambda_0)^3\cos^3(\varphi)}{6}\left(1-t^2+\eta^2\right)+ \\ &+ \frac{(\lambda-\lambda_0)^5\cos^5(\varphi)}{120}\left(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

trong đó:

k_0 - Hệ số biến dạng chiều dài theo kinh tuyến trục;

λ_0 - Kinh độ của kinh tuyến trục;

F_x, F_y - Khoảng dịch chuyển tâm tọa độ theo các trục *x* và *y*. Ở Việt Nam, $F_x = 0$ và $F_y = 500000m$.

$t = \text{tg}(\varphi)$, $\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2(\varphi)$;

S - Chiều dài cung kinh tuyến từ xích đạo đến vĩ độ φ:

$$S = \frac{a}{1+n}\left(a_0\varphi - a_2\sin(2\varphi) + a_4\sin(4\varphi) - a_6\sin(6\varphi) + a_8\sin(8\varphi)\right) \qquad (13)$$

với: $a_0 = 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}$ $\qquad a_2 = \frac{3}{2}\left(n - \frac{n^3}{8}\right)$

$a_4 = \frac{15}{16}\left(n^2 - \frac{n^4}{4}\right)$ $\qquad a_6 = \frac{35}{48}n^3$

$a_8 = \frac{315}{512}n^4$ $\qquad n = \frac{f}{2-f}$

Với mục đích tính toán ma trận hiệp phương sai, các phần tử bậc cao đối với (λ-λ_0) có thể được bỏ qua và các công thức (11) và (12) được rút gọn thành:

$$x = \frac{ak_0}{1+n}(a_0\varphi - a_2\sin 2\varphi + a_4\sin 4\varphi - a_6\sin 6\varphi + a_8\sin 8\varphi) + \frac{ak_0}{2}(\lambda-\lambda_0)^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + F_x \qquad (14)$$

$$y = ak_0\frac{(\lambda-\lambda_0)\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + F_y \qquad (15)$$

Giả thiết rằng hệ tọa độ vuông góc phẳng cũng sử dụng độ cao trắc địa *h*, ma trận $D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h}$ để chuyển đổi sai số từ hệ tọa trắc địa sang hệ tọa độ vuông góc phẳng được suy ra từ các công thức (5), (14) và (15):

$$D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

với các phần tử sau:

$$d_{11} = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{ak_0}{1+n}\left[a_0 - 2a_2\cos 2\varphi + 4a_4\cos 4\varphi - 6a_6\cos 6\varphi + 8a_8\cos 8\varphi\right] + ak_0(\lambda-\lambda_0)^2\frac{[\cos^2\varphi - C^2\sin^2\varphi]}{2C^3}$$

$$d_{12} = \frac{dx}{d\lambda} = ak_0(\lambda-\lambda_0)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{C}$$

$$d_{21} = \frac{dy}{d\varphi} = ak_0(e^2-1)(\lambda-\lambda_0)\frac{\sin\varphi}{C^3}$$

$$d_{22} = \frac{dy}{d\lambda} = ak_0\frac{\cos\varphi}{C}$$

$$C = \sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi)}$$

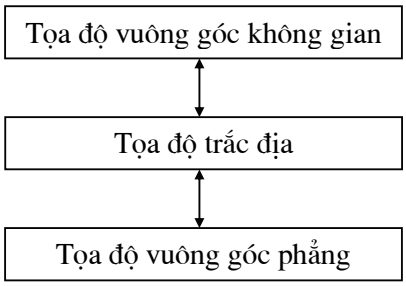
Ma trận $D_{x,y,h\to\varphi,\lambda,h}$ để chuyển đổi ngược lại từ tọa độ vuông góc phẳng sang tọa độ trắc địa chính là ma trận nghịch đảo của $D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h}$:

$$D_{x,y,h\to\varphi,\lambda,h} = D^{-1}_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h} = \begin{bmatrix} d_{22}/r & -d_{12}/r & 0 \\ -d_{21}/r & d_{11}/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

với $r = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$

5. Chuyển đổi giữa hệ tọa độ vuông góc không gian và hệ tọa độ vuông góc phẳng

Phép chuyển đổi này có thể được thực hiện qua trung gian là tọa độ trắc địa theo sơ đồ trên hình 3:



Hình 3. Sơ đồ chuyển đổi giữa hệ tọa độ vuông góc không gian và hệ tọa độ vuông góc phẳng.

Có thể nhận thấy các ma trận chuyển đổi $D_{u,v,w\to x,y,h}$ và $D_{x,y,h\to u,v,w}$ được tính từ (6), (9), (10), (16) và (17) như sau:

$$D_{u,v,w\to x,y,h} = D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h} \times D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h} \quad (18)$$

$$D_{x,y,h\to u,v,w} = D_{\varphi,\lambda,h\to u,v,w} \times D_{x,y,h\to\varphi,\lambda,h}$$

6. Kết quả thử nghiệm

Tọa độ vuông góc không gian của điểm P32 được xác định bằng phương pháp đo GPS với kết quả như sau:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1567135.18 \\ 5697755.49 \\ 2392128.44 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{uvw} = \begin{bmatrix} 0.009853 & -0.001239 & -0.001467 \\ -0.001239 & 0.006252 & 0.005539 \\ -0.001467 & 0.005539 & 0.008670 \end{bmatrix}$$

Sai số về vị trí của điểm P32 trong hệ tọa độ vuông góc không gian được xác định theo công thức (2):

$$m_u = \sqrt{(\Sigma_{uvw})_{11}} = \sqrt{0.009853} = 0.099m$$

$$m_v = \sqrt{(\Sigma_{uvw})_{22}} = \sqrt{0.006252} = 0.079m$$

$$m_w = \sqrt{(\Sigma_{uvw})_{33}} = \sqrt{0.008670} = 0.093m$$

Tọa độ trắc địa của P32 được tính bằng cách giải phương trình (8)[1]:

$$\begin{bmatrix}\varphi\\ \lambda\\ h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22^0 10'21.0''\\ 105^0 22'43.0''\\ 42.504m\end{bmatrix}$$

Ma trận $D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h}$ được tính từ công thức (10):

$$D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h}=\begin{bmatrix}1.5775\times10^{-8} & -5.7354\times10^{-8} & 1.4596\times10^{-7}\\ -1.6316\times10^{-7} & -4.4877\times10^{-8} & 0\\ -0.24558542 & 0.89289405 & 0.37739636\end{bmatrix}$$

Ma trận hiệp phương sai $\Sigma_{\varphi,\lambda,h}$ của tọa độ trắc địa bằng:

$$\Sigma_{\varphi,\lambda,h}=D_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h}\Sigma_{u,v,w}D^T_{u,v,w\to\varphi,\lambda,h}$$
$$=\begin{bmatrix}1.10479\times10^{-16} & -2.1333\times10^{-17} & 7.30123\times10^{-10}\\ -2.1333\times10^{-17} & 2.56765\times10^{-16} & 3.0765\times10^{-10}\\ 7.30123\times10^{-10} & 3.0765\times10^{-10} & 0.011362\end{bmatrix}$$

Suy ra sai số trung phương của tọa độ điểm P32 trong hệ tọa độ trắc địa bằng:

$$m_\varphi=\sqrt{1.10479\times10^{-16}}=1.05109\times10^{-8}rad=0.00217''$$
$$m_\lambda=\sqrt{2.56765\times10^{-16}}=1.60239\times10^{-8}rad=0.00331''$$
$$m_h=\sqrt{0.011362}=0.107m$$

Tọa độ vuông góc phẳng của P32 được tính theo công thức (11) và (12):

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2451969.162m\\ 539033.323m\\ 42.504m\end{bmatrix}$$

Ma trận chuyển đổi $D_{\varphi,\lambda,h\to x_E,x_N,h}$ suy ra từ (17):

$$D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h}=\begin{bmatrix}6342016.75 & 14730.95 & 0\\ -15815.86 & 5906939.55 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ma trận hiệp phương sai $\Sigma_{x,y,h}$ bằng:

$$\Sigma_{x,y,h}=D_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h}\Sigma_{\varphi,\lambda,h}D^T_{\varphi,\lambda,h\to x,y,h}$$
$$=\begin{bmatrix}0.004440 & -0.000788 & 0.004635\\ -0.000788 & 0.008963 & 0.001806\\ 0.004635 & 0.001806 & 0.011362\end{bmatrix}$$

Suy ra sai số trung phương của tọa độ điểm P32 trong hệ tọa độ vuông góc phẳng bằng:

$$m_x=\sqrt{0.004440}=0.067m$$
$$m_y=\sqrt{0.008963}=0.095m$$
$$m_h=\sqrt{0.011362}=0.107m$$

[1] Phương pháp giải phương trình (8) đối với các ẩn số φ, λ, h được trình bày trong nhiều tài liệu [3].