

PROBLÈME GÉNÉRAL AUX LIMITES DE RIEMANN AVEC DÉPLACEMENT ET PROBLÈME DE HILBERT POUR L'EXTÉRIEUR DOMAIN DE L'UNITAIRE CIRCLE

Vu Van Khuong

Université de Communication et de transport

Résumé. Dans le livre "problème aux limites" de prof. Ph. D. Gakhov (voir [1]), on a résolu les trois problèmes suivants:

+ Problème aux limites de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t - \beta_j)^{p_j}} G_1(t) \Phi^-(t), \quad (1)$$

où α_k ($k = \overline{1, \mu}$), β_j ($j = \overline{1, \nu}$) sont des quelconques points sur la frontière L ; m_k, p_j des entiers positifs. $G_1(t)$ est la fonction différente de zéro pour tout $t \in L$, satisfaisante à condition de Holder.

+ Problème général aux limites de Riemann avec déplacement

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t) \Phi^-(t). \quad (2)$$

+ Problème de Hilbert pour la circonférence intérieure D^+ de l'unitaire circle.

Dans cet article nous considérons les trois problèmes généralisés (en correspondance) suivants.

+ Problème de Riemann satisfaisant à l'équation (1) et aux conditions de Cauchy

$$\frac{d^k \Phi(z_h)}{dz^k} = a_k^h, \quad k = \overline{1, m_h - 1}, \quad h = \overline{1, n}.$$

+ Problème général aux limites de Riemann avec déplacement

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t - \beta_j)^{p_j}} G(t) \Phi^-(t).$$

+ Problème de Hilbert pour la circonférence extérieure D^- de l'unitaire circle.

A. Résolution du problème de Riemann satisfaisant aux conditions de Cauchy

On doit chercher deux fonctions $\Phi^+(z)$ analytiques dans D^+ et $\Phi^-(z)$ dans D^- . On écrit la condition aux limites du problème de Riemann.

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t - \beta_j)^{p_j}} G_1(t) \Phi^-(t) + g(t),$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T_EX

où α_k ($k = \overline{1, \mu}$), β_j ($j = \overline{1, \nu}$) sont des quelconques points de la frontière L; m_k, p_j des entiers positifs. On désigne par

$$IndG_1(t) = \chi, \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p, \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m.$$

On cherchera les solutions en classe des fonctions bornées à la frontière et satisfaisantes aux conditions de Cauchy

$$\frac{d^k \Phi(z_h)}{dz^k} = a_k^h, \quad k = \overline{1, m_h - 1}, \quad h = \overline{1, n}$$

$$\sum_{h=1}^n m_k = m^*.$$

En supposant que $\chi - p \geq m^*$, où $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont les points donnés du D^+ ou du D^- . Nous avons déjà (voir [1], [2], [3]) les formules des solutions générales du problème de Riemann comme suite

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= Y^+(z) + X^+(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j} P_{\chi-p}(z) \\ \Phi^-(z) &= Y^-(z) + X^-(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j} P_{\chi-p}(z) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= X^+(z) \cdot \frac{\psi^+(z) - Q_p(z)}{\prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j}} \\ Y^-(z) &= X^-(z) \cdot \frac{\psi^-(z) - Q_p(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}}, \end{aligned}$$

sont la particulière solution du problème non homogène. D'où on obtient

$$P_{\chi-p}(z) = \frac{\Phi^+(z) - Y^+(z)}{X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} = A(z)$$

avec $z \in D^+$

$$P_{\chi-p}(z) = \frac{\Phi^-(z) - Y^-(z)}{X^-(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z - \alpha_k)^{m_k}} = B(z)$$

avec $z \in D^-$.

On a, alors

$$\frac{d^k P_{\chi-p}(z_h)}{dz^k} = [A(z)]_{z=z_h}^{(k)} = c_k^h - \text{connues, avec } z \in D^+$$

$$\frac{d^k P_{\chi-p}(z_h)}{dz^k} = [B(z)]_{z=z_h}^{(k)} = b_k^h - \text{connues, avec } z \in D^-$$

où c_k^h, b_k^h on peut les calculer sur la base des conditions données

$$\frac{d^k \Phi(z_h)}{dz^k} = a_k^h.$$

D'où, on peut calculer le polynôme de Hermitte $P_{\chi-p}(z)$. Le problème donné est réalisé avec la condition que $\chi - p \geq m^*$;

$$m^* = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$$

B. Problème général aux limites de Riemann avec déplacement

On donne une courbe close, simple séparante plane complexe en circonférence intérieure D^+ et extérieure D^- . La fonction est donnée sur la courbe, et est satisfaisante à la condition de Holder. La fonction $\alpha(t)$ est isomorphisme de L sur leur et différent de zéro. On écrire les conditions du problème homogène sous la forme

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t - \alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}} G(t) \Phi^-(t), \quad (2)$$

où α_k ($k = \overline{1, \mu}$), β_j ($j = \overline{1, \nu}$) - les points différents à la courbe L ; m_k, p_j - nombres entiers positifs.

On désigne par

$$\sum_{k=1}^{\mu} m_k = m$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} p_j = p, \quad \text{Ind} G(t) = \chi.$$

On cherchera les solutions dans la classe des fonctions bornées à la frontière L . On doit déterminer les fonctions $\Phi^+(z)$ analytiques dans D^+ , $\Phi^-(z)$ analytiques dans D^- , leurs valeurs aux limites satisfaisantes à (2) avec la condition complémentaire $\Phi^-(\infty) = 0$.

On réécrit la condition (2) comme suite

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{\prod_{k=1}^{\mu} [(\alpha(t) - \alpha_k)]^{m_k}} = \prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} \cdot G(t) \cdot \frac{\Phi^-(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}}, \quad (3)$$

en posant

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = \frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{\prod_{k=1}^{\mu} [(\alpha(t) - \alpha_k)]^{m_k}}$$

$$\Phi_1^-(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j}}.$$

On a alors

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = \prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} G(t) \cdot \Phi_1^-(t), \quad (3')$$

où $\alpha(t)$ est isomorphisme de L sur leur et conserve l'orientation, $\alpha'(t)$ satisfait à la condition de Holder, $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in L$.

C'est pourquoi, on a

$$Ind \Phi_1^+[\alpha(t)] = Ind \Phi^+[\alpha(t)] = Ind \Phi^+(t) = N^+$$

$$\chi = Ind G_1(t) = Ind \left[\prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} G(t) \right] = Ind G(t) = N^+ + N^-.$$

En cas de $\chi < 0$ le problème homogène a l'unique solution zéro, (voir [1], [2]).

En cas de $\chi \geq 0$ la solution du problème homogène a χ zéros.

On étudiera la cas de $\chi = 0$.

On recherchera la solution satisfaisante à $\Phi_1^-(\infty) = 1$.

De (3') on a alors

$$\ln \Phi_1^+[\alpha(t)] - \ln \Phi_1^-(t) = \ln G_1(t) = g(t).$$

En posant $\Gamma(z) = \ln \Phi_1(z)$ - la fonction analytique dans D^+ ou dans D^- , et satisfait à la condition aux limites

$$\begin{cases} \Gamma^+[\alpha(t)] - \Gamma^-(t) = g(t) \\ \Gamma^-(\infty) = \ln \Phi_1^-(\infty) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

En cas de $\chi = 0$ le problème a l'unique solution exprimée par la formule:

$$\Phi_1(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma^{\pm}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\Gamma^-(t) = g_1(t) + \int R(t, \zeta) g_1(\zeta) d\zeta$$

$$\Gamma^+(t) = \Gamma^+[\beta(t)] + \ln G_1(t),$$

où

$$g_1(t) = -\frac{1}{2} \ln G_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_1(\zeta) \alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(t)} d\zeta.$$

On obtient alors

$$G(t) \cdot \prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} = G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+[\alpha(t)]}}{e^{\Gamma^-(t)}}.$$

Cette présentation est unique avec $\Phi^-(\infty) = 1$. En cas de $\chi > 0$, on écrit la condition aux limites sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_1^+[\alpha(t)] &= t^\chi \{ [t^{-\chi} G(t)] \prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} \} \Phi_1^-(t) \\ \Phi_1^+[\alpha(t)] &= t^\chi \cdot G_2(t) \cdot \Phi_1^-(t), \end{aligned}$$

où

$$G_2(t) = t^{-\chi} G(t) \prod_{k=1}^{\mu} \left(\frac{t - \alpha_k}{\alpha(t) - \alpha_k} \right)^{m_k} = \frac{e^{\Gamma^+[\alpha(t)]}}{\Gamma^-(t)}$$

on pose

$$g_2(t) = -\frac{1}{2} \ln [t^{-\chi} G_1(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\zeta^{-\chi} G_1(\zeta)] \alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(t)} d\zeta$$

on a alors

$$\frac{\Phi_1^+[\alpha(t)]}{e^{\Gamma^+[\alpha(t)]}} = t^\chi \cdot \frac{\Phi_1^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}},$$

nous considérons les fonctions

$$\frac{\Phi_1^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}, \quad z^\chi \cdot \frac{\Phi_1^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}.$$

Comme les fonctions à chercher. En particulier, la fonction

$$z^\chi \cdot \frac{\Phi_1^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}} = \frac{z^\chi \cdot \Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)} \prod_{j=1}^{\nu} (z - \beta_j)^{p_j}}$$

a la degré

$$\chi - \prod_{j=1}^{\nu} p_j = \chi - p, \quad \text{en } z = \infty.$$

En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(t) &= g_2(t) + P_{\chi-p}(t) + \int_L R(t, \zeta) [g_2(\zeta) + P_{\chi-p}(\zeta)] d\zeta \\ \varphi^-(t) &= g_2(t) + \int_L R(t, \zeta) g_2(\zeta) d\zeta \\ \Phi_k^{*-}(t) &= t^k + \int_L R(t, \zeta) \zeta^k d\zeta, \quad k = \overline{0, \chi-p} \\ \Phi_1^-(t) &= \varphi^-(t) + \sum_{k=0}^{\chi-p} C_k \cdot \Phi_k^{*-}(t), \end{aligned}$$

où $\Phi_k^{*-}(t)$ est la solution de l'équation de Fredholm suivante

$$\Phi_1^*(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(t)} - \frac{1}{\zeta - t} \right] \Phi^{*-}(\zeta) d\zeta = t^k, \quad k = \overline{0, \chi - p}$$

$$\Phi_1^+(t) = \Phi_1^-[\beta(t)] + g[\beta(t)]; \quad (\beta[\alpha(t)] \equiv t)$$

Sur la base de la formule de Cauchy on obtient les fonctions analytiques $\Phi^+(z)$ et $\Phi^-(z)$.

On a maintenant:

Théorème:

Le problème de Riemann homogène avec $\chi \geq 0$ a $(\chi - p + 1)$ solutions linéairement indépendantes. La solution générale se donnera par la formule:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \sum_{k=0}^{\chi-p} C_k \cdot \Phi_k^{*-}(z)$$

$$\Phi^-(z) = z^{-\chi} \cdot e^{\Gamma^-(z)} \sum_{k=0}^{\chi-p} C_k \cdot \Phi_k^-(z),$$

où

$$\Gamma^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma^\pm(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\Gamma^-(t) = g_2(t) + \int_L R(t, \zeta) g_2(\zeta) d\zeta$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{2} \ln [t^{-\chi} G_1(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln [\zeta^{-\chi} G_1(\zeta)] \alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(t)} d\zeta$$

$$\Phi_k^{*-}(t) = t^k + \int_L R(t, \zeta) \zeta^k d\zeta, \quad k = \overline{0, \chi - p}$$

$$\Phi_k^{*+}(t) = \Phi_k^{*-}[\beta(t)] + g[\beta(t)]$$

$$\Phi^{*\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^{*\pm}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad k = \overline{0, \chi - p}.$$

C. Le problème de Hilbert pour la circonférence extérieure D^- de l'unitaire circle

Pour l'unitaire circle, l'opération de Schwartz est identique à l'intégral de Schwartz, (voir [1], [3])

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\arctg \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - \chi \sigma \right] \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma$$

$$\gamma(z) = w(x, y) + iw_1(x, y)$$

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{-\chi} (c_k z^{-k} - \bar{c}_k z^k).$$

On obtient la solution du problème de Hilbert

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s) ; 0(0,0) \in D, \text{ et } Ind [a(s) + ib(s)] = \chi.$$

On cherchera des réelles fonctions $p(s)$ telles que $p(s)[a(s) + ib(s)]$ soient la valeur aux limites des fonctions analytiques ayant zéro pour tout $z \in D^-$, excepté $z = \infty$, où elles ont la degré $(-\chi)$. En effet, on a

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^\chi e^{i\gamma(z)}$$

$$\gamma(z) = w(x, y) + iw_1(x, y) - \text{analytique pour tout } z \in D^-$$

maintenant, on a la formule

$$\gamma(z) = S[\arctg \frac{b}{a} - \chi \arctg t]$$

$$p(s) = \frac{|t|^\chi e^{-w_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}} = e^{-w_1(s)},$$

où S - opération de Schwartz pour D^- . On a maintenant le problème de Hilbert suivant

$$Re \left[\frac{F(t)}{a(s) + ib(s)} \right] = c(s)$$

$$Re \left[\frac{F(t)}{t^\chi e^{i\gamma(t)}} \right] = |t|^{-\chi} e^{w_1(s)} c(s) = e^{w_1(s)} c(s)$$

pour $\chi \leq 0$.

$F(t) = z^\chi e^{i\gamma} [S(|t|^{-\chi} e^{w_1(s)} c(s)) + Q(z)] = z^\chi e^{i\chi(z)} [S(e^{w_1(s)} c(s)) + Q(z)]$. u $Q(z)$ est la fonction analytique pour tout $z \in D^-$ excepté $z = \infty$. En $z = \infty$ $Q(z)$ a la degré $(-\chi)$ et $Re Q(z)|_{z \in L} = 0$, on voit facilement

$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{-\chi} (c_k z^{-k} - \bar{c}_k z^k)$ adaptée à la condition de l'extérieure circonstance de l'unitaire circle

$$F(z) = z^\chi e^{i\gamma(z)} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + Q(z) \right].$$

En particulaire, pour $\chi = 0$ on obtient

$$F(z) = z^\chi e^{i\gamma(z)} [S(e^{w_1(s)} c(s)) + Q(z)]; Q(z) \equiv 0.$$

En ce cas, $F(z)$ a la pol de la degré χ ; c'est pour quoi, le problème de Hilbert homogène n'est résonable.

$$F(z) = z^\chi e^{i\gamma(z)} i\beta_0$$

Le problème non homogène est seulement résonable à condition que: il satisfasse à toutes conditions suivantes

$$S(c(s)e^{w_1(s)}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma$$

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} = 1 + \frac{2z}{e^{i\sigma} - z} = 1 - \frac{2}{1 - \frac{e^{i\sigma}}{z}} = 1 - 2\left(1 + \frac{e^{i\sigma}}{z} + \frac{e^{i2\sigma}}{z^2} + \dots\right)$$

on doit obtenir les conditions à faire

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} d\sigma = 0 \rightarrow k = 0 \\ \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} e^{ik\sigma} d\sigma = 0 \rightarrow k = \overline{1, \chi - 1} \\ \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} \cos k\sigma d\sigma = 0 \rightarrow k = \overline{0, \chi - 1}. \\ \int_0^{2\pi} c(\sigma) e^{w_1(\sigma)} \sin k\sigma d\sigma = 0 \rightarrow k = \overline{1, \chi - 1} \end{cases}$$

on a totalement les $(2\chi - 1)$ conditions à résoudre le problème de Hilbert non homogène.

References

1. Ph. D. Gakhov, *Problèmes aux limites*, Moscou 1970 (en Russe).
2. G. S. Litvinchouk, *Problèmes aux limites et équations intégrales singulières avec déplacement*, Moscou 1977 (en Russe).
3. *Système des équations intégrales singulières*, Moscou 1970 (en Russe).