

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

CAO VĂN QUÝ

BÀI TOÁN NỘI SUY  
CỔ ĐIỂN TỔNG QUÁT  
VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2009

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
-----

CAO VĂN QUÝ

BÀI TOÁN NỘI SUY  
CỔ ĐIỂN TỔNG QUÁT  
VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:  
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

HÀ NỘI - 2009

# MỤC LỤC

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Mở đầu</b>                                                      | <b>3</b>  |
| <b>1 Một số bài toán nội suy cổ điển cơ bản trong giải tích</b>    | <b>5</b>  |
| 1.1 Một số kiến thức chuẩn bị . . . . .                            | 5         |
| 1.2 Một số bài toán nội suy cổ điển cơ bản trong giải tích . . . . | 6         |
| 1.2.1 Bài toán nội suy Taylor . . . . .                            | 6         |
| 1.2.2 Bài toán nội suy Lagrange . . . . .                          | 7         |
| 1.2.3 Bài toán nội suy Newton . . . . .                            | 9         |
| 1.2.4 Bài toán nội suy Hermite . . . . .                           | 11        |
| <b>2 Bài toán nội suy cổ điển tổng quát</b>                        | <b>14</b> |
| 2.1 Bài toán nội suy cổ điển tổng quát . . . . .                   | 14        |
| 2.2 Bài toán nội suy Taylor mở rộng . . . . .                      | 26        |
| 2.3 Bài toán nội suy Lagrange mở rộng . . . . .                    | 29        |
| 2.4 Bài toán nội suy Newton mở rộng . . . . .                      | 31        |
| 2.5 Bài toán nội suy Hermite mở rộng . . . . .                     | 33        |
| 2.6 Bài toán nội suy Lagrange - Newton . . . . .                   | 36        |
| 2.7 Bài toán nội suy Newton-Hermite . . . . .                      | 37        |
| <b>3 Một số ứng dụng của nội suy</b>                               | <b>41</b> |
| 3.1 Chứng minh đồng nhất thức . . . . .                            | 41        |
| 3.2 Ước lượng đa thức . . . . .                                    | 41        |
| 3.3 Một số bài toán nội suy cổ điển . . . . .                      | 42        |
| <b>Kết luận</b>                                                    | <b>54</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>                                          | <b>55</b> |

## MỞ ĐẦU

Các bài toán nội suy và những vấn đề liên quan đến nó là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Nó không những như là một đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số mà còn là một công cụ đắc lực của giải tích trong lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết nội suy, lý thuyết biểu diễn, lý thuyết điều khiển, tối ưu,... Ngoài ra, các đặc trưng cơ bản của nội suy còn được sử dụng trong nhiều toán cao cấp, toán ứng dụng, trong những mô hình thực tế và trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia, Olympic Toán khu vực và quốc tế.

Các bài toán nội suy là một chuyên đề chọn lọc cho giáo viên và học sinh hệ chuyên toán bậc trung học phổ thông và năm đầu đại học và cũng là chuyên đề cần nâng cao cho bậc sau đại học.

Các bài toán nội suy ra đời từ rất sớm, khởi đầu là công trình của Lagrange, Newton, Hermite,..., Tuy nhiên việc xây dựng bài toán nội suy tổng quát và các thuật toán tìm nghiệm của nó cũng như việc xây dựng lý thuyết nội suy cho đến nay vẫn đang được các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu. Có thể nói các bài toán nội suy cổ điển đóng một vai trò rất quan trọng trong việc thiết lập các đa thức thỏa mãn hệ các điều kiện ràng buộc đặc biệt. Việc nghiên cứu các bài toán nội suy là nhằm giải các bài toán liên quan đến đa thức và hàm số. Tuy nhiên, ở các trường trung học phổ thông thì lý thuyết các bài toán nội suy còn rất mới mẻ và bỏ ngỏ ngay cả đối với giáo viên giảng dạy môn toán học.

Là học viên cao học, công tác ở một trường trung học, nhằm đáp ứng cho nhu cầu giảng dạy và học tập tôi chọn đề tài " Bài toán nội suy cổ điển tổng quát và áp dụng". Đây là đề tài có ý nghĩa thực tiễn trong công tác giảng dạy, nó cho ta sự nhìn nhận nhất quán về các bài toán nội suy cổ điển cơ bản trong giải tích.

Đề tài đã sử dụng một phần nội dung về lý thuyết cũng như các bài tập mang tính minh họa đã được GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu thực hiện (xem[5]).

Đề tài gồm phần mở đầu và 3 chương.

Chương 1. Một số bài toán nội suy cổ điển cơ bản trong giải tích.

Chương 2. Bài toán nội suy cổ điển tổng quát.

Chương 3. Một số ứng dụng của nội suy.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới người thầy kính mến GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã tận tình hướng dẫn tôi hoàn thành đề tài này. Tôi cũng vô cùng biết ơn các thầy, cô giáo, đặc biệt các thầy cô giáo trong Tổ Giải tích, Khoa Toán - Cơ - Tin học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội đã dạy dỗ, đóng góp về nội dung cũng như về cách thức trình bày đề tài này.

Hà Nội, ngày 15 tháng 12 năm 2009

Cao Văn Quý

## CHƯƠNG 1

# MỘT SỐ BÀI TOÁN NỘI SUY CỔ ĐIỂN CƠ BẢN TRONG GIẢI TÍCH

### 1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

#### Định nghĩa và tính chất của đa thức

**Định nghĩa 1.1.** Một đa thức bậc  $n$  của ẩn  $x$  là biểu thức có dạng ( [6] )

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

trong đó các hệ số  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  là những số thực hoặc (phức) và  $a_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Ta ký hiệu

i, Bậc của đa thức  $P_n(x)$  là  $\deg P_n(x)$ . Do vậy  $\deg P_n(x) = n$ .

ii,  $a_n$  - hệ số cao nhất của đa thức.

iii,  $a_0$ - hệ số tự do của đa thức.

iv,  $a_n x^n$ - hạng tử cao nhất.

**Chú ý 1.1.** Sau đây ta thường chỉ xét đa thức  $P_n(x)$  với các hệ số của nó đều là thực và gọi tắt là đa thức thực.

**Định nghĩa 1.2.** Cho đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ với } a_n \neq 0,$$

$\alpha \in \mathbf{C}$ , được gọi là nghiệm của đa thức  $P_n(x)$  nếu  $P_n(\alpha) = 0$ .

Nếu tồn tại  $k \in \mathbf{N}$ ,  $k > 1$  sao cho  $P_n(x) : (x - \alpha)^k$  nhưng  $P_n(x)$  không chia hết cho  $(x - \alpha)^{k+1}$  thì  $\alpha$  được gọi là nghiệm bội  $k$  của đa thức  $P_n(x)$ .

Đặc biệt khi  $k = 1$  thì  $\alpha$  được gọi là nghiệm đơn,  $k = 2$  thì  $\alpha$  được gọi là

nghiệm kép.

**Định lý 1.1** (Gauss). Mọi đa thức bậc  $n \geq 1$  trên trường  $\mathbf{C}$  đều có đúng  $n$  nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.

**Định lý 1.2.** Mọi đa thức với hệ số thực đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{n_1} \dots (x - \alpha_r)^{n_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}$$

trong đó

$$\sum_{i=1}^r n_i + 2 \sum_{i=1}^s m_i = n, \quad p_i^2 - 4q_i < 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

và  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r; p_1, q_1, \dots, p_s, q_s \in \mathbf{R}$ .

**Định lý 1.3.** Mỗi đa thức thực bậc  $n$  đều có không quá  $n$  nghiệm thực.

**Hệ quả 1.1.** Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

**Hệ quả 1.2.** Nếu đa thức có bậc  $\leq n$  mà nhận cùng một giá trị tại  $n + 1$  điểm khác nhau của đối số thì đa thức đó là đa thức hằng.

**Hệ quả 1.3.** Hai đa thức bậc  $\leq n$  mà nhận  $n + 1$  giá trị bằng nhau tại  $n + 1$  giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.

## 1.2 Một số bài toán nội suy cổ điển cơ bản trong giải tích

### 1.2.1 Bài toán nội suy Taylor

**Bài toán 1.1.** Cho  $x_0 \in \mathbf{R}$ , và  $a_k \in \mathbf{R}$ , với  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Hãy xác định đa thức  $T(x)$  có bậc  $\deg T(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn các điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Nghiệm duy nhất của bài toán được biểu diễn bởi công thức

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Ví dụ 1.1.** Xác định đa thức bậc ba  $f(x)$  thỏa mãn các điều kiện

$$f^{(n)}(1) = n^3 - 3n^2 + n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow f(1) = 1, & n = 1 &\Rightarrow f^{(1)}(1) = 0, \\ n = 2 &\Rightarrow f^{(2)}(1) = -1, & n = 3 &\Rightarrow f^{(3)}(1) = 4. \end{aligned}$$

Theo công thức nội Suy Taylor, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + 0 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ f(x) &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

### 1.2.2 Bài toán nội suy Lagrange

**Bài toán 1.2.** Cho  $x_{0i}, a_{0i} \in \mathbf{R}$ , với  $x_{0i} \neq x_{0j} \quad \forall i \neq j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$ .

Hãy xác định đa thức  $L(x)$  có bậc  $\deg L(x) \leq N-1$  thỏa mãn điều kiện

$$L(x_{0i}) = a_{0i}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Nghiệm duy nhất của bài toán được biểu diễn bởi công thức

$$L(x) = \sum_{i=1}^N a_i L_i(x),$$

trong đó  $L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$

và ta đồng nhất  $x_{0i} \equiv x_i, a_{0i} \equiv a_i$ .

**Ví dụ 1.2.** Xác định đa thức bậc hai nhận giá trị bằng 3;1;7, tại  $x = -1 ; 0 ; 3$  tương ứng.

**Giải.** Ta có  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$  và  $f(x_1) = 3, f(x_2) = 1, f(x_3) = 7$ . Theo công thức nội suy Lagrange với  $n = 2$ , ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-1) \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} + f(0) \frac{(x-3)(x+1)}{(0-3)(0+1)} + \\ &\quad + f(3) \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = x^2 - x + 1. \\ f(x) &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.3.** Xác định tam thức bậc hai,  $f(x)$  thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(n) = (-1)^n(2n^2 - n - 1), \quad n = 4, 7, 16.$$

**Giải.** Đặt  $n_1 = 4, \quad n_2 = 7, \quad n_3 = 16$ . Ta có

$$f(n_1) = 27, f(n_2) = 90, f(n_3) = 256.$$

Sử dụng đồng nhất thức Lagrange ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(n_1) \frac{(x-7)(x-16)}{(4-7)(4-16)} + f(n_2) \frac{(x-4)(x-16)}{(7-4)(7-16)} + \\ &\quad + f(n_3) \frac{(x-4)(x-7)}{(16-4)(16-7)}. \\ f(x) &= 27 \cdot \frac{(x-7)(x-16)}{(4-7)(4-16)} + 90 \cdot \frac{(x-4)(x-16)}{(7-4)(7-16)} + \\ &\quad + 256 \cdot \frac{(x-4)(x-7)}{(16-4)(16-7)}. \\ f(x) &= 3 \cdot \frac{(x-7)(x-16)}{4} + 10 \cdot \frac{(x-4)(x-16)}{3} + 64 \cdot \frac{(x-4)(x-7)}{27}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.4.** Xác định tam thức bậc ba,  $f(x)$  thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(2n-1) = (-1)^n(2n^3 - 3n + 1), \quad n = 1, 4, 5, 12.$$

**Giải.**

Ta có  $n = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ ,  $n = 4 \Rightarrow f(7) = 117$ ,

$n = 5 \Rightarrow f(9) = -236$ ,  $n = 12 \Rightarrow f(23) = 1728$ .

Sử dụng đồng nhất thức Lagrange, ta có

$$f(x) = f(1) \frac{(x-7)(x-9)(x-23)}{(1-7)(1-9)(1-23)} + f(7) \frac{(x-1)(x-9)(x-23)}{(7-1)(7-9)(7-23)} +$$

$$+ f(9) \frac{(x-1)(x-7)(x-23)}{(9-1)(9-7)(9-23)} + f(23) \frac{(x-1)(x-7)(x-9)}{(23-1)(23-7)(23-9)}.$$

$$f(x) = f(7) \frac{(x-1)(x-9)(x-23)}{192} +$$

$$+ f(9) \frac{(x-1)(x-7)(x-23)}{256} + f(23) \frac{(x-1)(x-7)(x-9)}{4928}.$$

$$f(x) = 117 \frac{(x-1)(x-9)(x-23)}{192} +$$

$$+ 236 \frac{(x-1)(x-7)(x-23)}{256} + 1728 \frac{(x-1)(x-7)(x-9)}{4928}.$$

$$f(x) = 39 \frac{(x-1)(x-9)(x-23)}{64} +$$

$$+ 59 \frac{(x-1)(x-7)(x-23)}{64} + 27 \frac{(x-1)(x-7)(x-9)}{77}.$$

### 1.2.3 Bài toán nội suy Newton

**Bài toán 1.3.** Cho  $x_i, a_i \in \mathbf{R}$ , với  $i = 1, 2, \dots, N$ . Hãy xác định đa thức  $N(x)$  có bậc  $\deg N(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$N^{(i-1)}(x_i) = a_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Nghiệm duy nhất của bài toán được biểu diễn bởi công thức

$$N(x) = a_1 + a_2 R(x_1, x) + \dots + a_N R^{N-1}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x),$$

trong đó, ta ký hiệu

$$R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \int_{x_2}^{t_2} \dots \int_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_{i-1} \dots dt_1 dt, \quad i = 2, \dots, N.$$

**Ví dụ 1.5.** Xác định đa thức bậc hai  $f(x)$ , thỏa mãn các điều kiện sau

$$f^{(n)}(2n+1) = (-1)^n(2n^2 - n - 1), \quad n = 0, 1, 2.$$

**Giải.** Ta có

$$n = 0 \Rightarrow f(1) = -1, \quad n = 1 \Rightarrow f^{(1)}(3) = 0, \quad n = 2 \Rightarrow f^{(2)}(5) = 5.$$

Đặt  $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 5$  lần lượt ứng với  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$ , ta xác định được đa thức bậc hai  $f(x)$  sau đây

$$f(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3 \left[ \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \right]$$

$$f(x) = -1 + 0.(x - 1) + 5. \left[ \frac{(x - 3)^2}{2} - \frac{(1 - 3)^2}{2} \right]$$

$$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 15x + \frac{23}{2}.$$

**Ví dụ 1.6.** Xác định đa thức bậc ba  $f(x)$  ( $\deg f(x) = 3$ ) thỏa mãn các điều kiện

$$f^{(n)}(3n+1) = n^3 - 3n^2 + n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

**Giải.** Ta có

$$n = 0 \Rightarrow f(1) = 1, \text{ và đặt } a_1 = 1, x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = a_1,$$

$$n = 1 \Rightarrow f^{(1)}(4) = 0, \text{ và đặt } a_2 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow f^{(2)}(x_2) = a_2,$$

$$n = 2 \Rightarrow f^{(2)}(7) = -1, \text{ và đặt } a_3 = -1, x_3 = 7 \Rightarrow f^{(2)}(x_3) = a_3,$$

$$n = 3 \Rightarrow f^{(3)}(10) = 4, \text{ và đặt } a_4 = 4, x_4 = 10 \Rightarrow f^{(3)}(x_4) = a_4.$$

Theo công thức nội suy Newton (đối với  $N=4$ ) ta có

$$N(x) = a_1 + a_2 R^1(x_1, x) + a_3 R^2(x_1, x_2, x) + a_4 R^3(x_1, x_2, x_3, x),$$

trong đó ,

$$R^1(x_1, x) = \int_{x_1}^x dt = x - x_1,$$

$$R^2(x_1, x_2, x) = \int_{x_1}^x \int_{x_2}^{t_2} dt_2 dt = \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
R^3(x_1, x_2, x_3, x) &= \int_{x_1}^x \int_{x_2}^{t_2} \int_{x_3}^{t_3} dt_3 dt_2 dt = \\
&= \frac{(x - x_3)^3}{6} - \frac{(x_1 - x_3)^3}{6} - \frac{(x_2 - x_3)^2}{2}(x - x_1).
\end{aligned}$$

Ta xác định được đa thức

$$\begin{aligned}
N(x) &= 1 + 0 \cdot (x - 1) - 1 \left[ \frac{(x - 4)^2}{2} - \frac{(1 - 4)^2}{2} \right] + \\
&+ 4 \left[ \frac{(x - 7)^3}{6} - \frac{(1 - 7)^3}{6} - \frac{(4 - 7)^2}{2}(x - 1) \right].
\end{aligned}$$

Vậy

$$N(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{29}{2}x^2 + 84x - \frac{415}{6}.$$

#### 1.2.4 Bài toán nội suy Hermite

**Bài toán 1.4.** Cho  $x_i, a_{ki} \in \mathbf{R}$ , với  $i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1$  và  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , trong đó  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = N$ .

Hãy xác định đa thức  $H(x)$  có bậc  $\deg H(x) \leq N - 1$  thỏa mãn các điều kiện

$$H^{(k)}(x_i) = a_{ki}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1.$$

Nghiệm duy nhất của bài toán được biểu diễn bởi công thức

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} a_{ki} \frac{(x - x_i)^k}{k!} W_i(x) T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)},$$

trong đó

$$T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)} = \sum_{l=0}^{p_i-1-k} \left[ \frac{1}{W_i(x)} \right]_{(x=x_i)}^{(l)} \frac{(x - x_i)^l}{l!},$$

là đoạn triển khai Taylor đến cấp thứ  $(p_i - 1 - k)$  tại  $x = x_i$  của hàm số  $\frac{1}{W_i(x)}$ .

**Ví dụ 1.7.** Xác định đa thức  $f(x)$  ( $\deg f(x) \leq 3$ ) thỏa mãn các điều kiện

$$f^n(1) = n^3 - 3n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \quad f(2) = 0.$$

**Giải.** Kí hiệu  $x_i, a_{ki}$  với  $i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, p_i - 1$ , với  $p_1 = 3; p_2 = 1$ .  
Theo công thức nội suy Hermite ta có

$$f^{(0)}(1) = 1, \quad f^{(1)}(1) = 0, \quad f^{(2)}(1) = 1, \quad f(2) = 0.$$

trong đó,  $x_1 = 1, x_2 = 2, a_{01} = 1, a_{11} = 0, a_{21} = -1, a_{02} = 0$ .

Ta có

$$W_i(x) = \prod_{j=1; j \neq i}^2 (x - x_j)^{p_j},$$

với  $i = 1$

$$W_1(x) = (x - x_2)^1 = x - 2$$

với  $i = 2$

$$W_2(x) = (x - x_1)^3 = (x - 1)^3.$$

Vậy

$$H(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{p_i-1} a_{ki} \frac{(x - x_i)^k}{k!} W_i(x) T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)},$$

trong đó

$$T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)} = \sum_{l=0}^{p_i-1-k} \left[ \frac{1}{W_i(x)} \right]_{(x=x_i)}^{(l)} \frac{(x - x_i)^l}{l!}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=0}^{p_1-1} a_{k1} \frac{(x - x_1)^k}{k!} W_1(x) T \left\{ \frac{1}{W_1(x)} \right\}_{(x=x_1)}^{(p_1-1-k)} + \\ &+ \sum_{k=0}^{p_2-1} a_{k2} \frac{(x - x_2)^k}{k!} W_2(x) T \left\{ \frac{1}{W_2(x)} \right\}_{(x=x_2)}^{(p_2-1-k)} \\ &= a_{01} \frac{(x - x_1)^0}{0!} W_1(x) T \left\{ \frac{1}{W_1(x)} \right\}_{(x=x_1)}^{(p_1-1)} + \\ &+ a_{11} \frac{(x - x_1)^1}{1!} W_1(x) T \left\{ \frac{1}{W_1(x)} \right\}_{(x=x_1)}^{(p_1-1-1)} + \\ &+ a_{21} \frac{(x - x_1)^2}{2!} W_1(x) T \left\{ \frac{1}{W_1(x)} \right\}_{(x=x_1)}^{(p_1-1-2)} + \end{aligned}$$

$$+a_{02}\frac{(x-x_2)^0}{0!}W_2(x)T\left\{\frac{1}{W_2(x)}\right\}_{(x=x_2)}^{(p_1-1-0)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} H(x) &= (x-2)T\left\{\frac{1}{x-x_2}\right\}_{(x=x_1)}^{(2)} - \frac{(x-x_1)^2}{2!}(x-x_2)T\left\{\frac{1}{x-x_2}\right\}_{(x=x_1)}^{(0)} \\ &= (x-x_2)\left[\frac{1}{x_1-x_2} - \frac{x-x_1}{(x_1-x_2)^2} + \frac{2(x_1-x_2)(x-x_1)^2}{(x_1-x_2)^4}\right] - \\ &\quad - \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{2(x_1-x_2)} \\ &= (x-2)\left[-1 - (x-1) - 2(x-1)^2\right] + \frac{(x-1)^2(x-2)}{2} \end{aligned}$$

hay

$$H(x) = \frac{-3}{2}(x-2)(x-1)^2 - (x-2)(x-1) - (x-2) = \frac{-3}{2}x^3 + 5x^2 - \frac{11}{2}x + 3$$

$$H(x) = \frac{-3}{2}x^3 + 5x^2 - \frac{11}{2}x + 3.$$

## CHƯƠNG 2

# BÀI TOÁN NỘI SUY CỔ ĐIỂN TỔNG QUÁT

### 2.1 Bài toán nội suy cổ điển tổng quát

Bài toán nội suy cổ điển tổng quát phát biểu như sau.

**Bài toán 2.1.** Cho bộ số  $x_{ki}, a_{ki} \in \mathbf{R}$ ,  $x_{ki} \neq x_{kj}, \forall i \neq j; k = 0, 1, \dots, n-1; i, j = 1, 2, \dots, r_{k+1}$ ; trong đó  $r_0 = 0, r_1 + r_2 + \dots + r_n = N$  và cho

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1}.$$

Hãy xác định các đa thức  $P(x)$  có bậc  $\deg P(x) \leq N-1$  và thỏa mãn điều kiện

$$P^{(s_k)}(x_{ki}) = a_{ki}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r_{k+1}.$$

Trước hết, ta sử dụng ký hiệu  $g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1})$ . Để đánh lại chỉ số cho cặp bộ số  $x_{ki}$  và  $a_{ki}$ , ta định nghĩa

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k + i.$$

Khi đó  $m = 1, 2, \dots, N$  và ứng với  $m \simeq (k, i)$  ta viết  $x_{ki} = x_m, a_{ki} = a_m$  và

$$g_{Nm} = g_N^{(s_k)}(x_{ki}).$$

Tức là,  $m \simeq (ki)$ , ta có

$$g_{Nm} = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{s_k}, (s_k)!, \frac{(s_k+1)!}{1!} x_{ki}, \dots, \frac{(N-1)!}{(N-1-s_k)!} x_{ki}^{N-1-s_k} \right).$$

Ta sẽ đi chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1) có nghiệm duy nhất là ma trận

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix}$$

có định thức

$$V_N = \det G_N \neq 0.$$

Thật vậy, xét đa thức

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{N-1} x^{N-1},$$

$$(\alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})^T, \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T.$$

Khi đó,  $P(x)$  là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1) khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính

$$G_N \cdot (\alpha) = A$$

có nghiệm duy nhất. Trong trường hợp này, ta phải có

$$V_N = \det G_N \neq 0.$$

Bây giờ, ứng với mỗi  $m=1, 2, \dots, N$ , ta ký hiệu  $G_{Nm}(x)$  là ma trận thu được từ ma trận  $G_N$  bằng cách thay  $g_{Nm}$  bởi  $g_N(x)$  và  $V_{Nm}(x)$  là định thức tương ứng của nó, tức là

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ \vdots \\ g_{Nm-1} \\ g_N(x) \\ g_{Nm+1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad V_{Nm}(x) = \det G_{Nm}(x).$$

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  được xác định bởi công thức

$$P(x) = V_N^{-1} \sum_{m=1}^N a_m V_{Nm}(x) \quad (2.1)$$

là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1).

Thật vậy, ta có

$$P^{(s_k)}(x_{ki}) = V_N^{-1} \sum_{m=1}^N a_m V_{Nm}^{(s_k)}(x_{ki})$$

Mặt khác , ta có

$$V_{Nm}^{(s_k)}(x_{ki}) = \begin{vmatrix} g_{N1} \\ \vdots \\ g_{Nm-1}^{(s_k)}(x_{ki}) \\ g_{Nm+1}^{(s_k)}(x_{ki}) \\ \vdots \\ g_{NN} \end{vmatrix} = \begin{cases} V_N & \text{nếu } m = (k, i) \\ 0 & \text{nếu } m \neq (k, i). \end{cases}$$

Thật vậy, nếu  $m=(k,i)$  thì ta có  $g_N^{(s_k)}(x_{ki}) = g_{Nm}$  và do đó

$$V_{Nm}^{(s_k)}(x_{ki}) = V_N.$$

Ngược lại, nếu  $m \neq (k, i)$  thì khi đó tồn tại  $n \in \{1, 2, \dots, N\}, n \neq m$  sao cho  $n = (k, i)$ . Trong trường hợp này, định thức  $V_{Nm}^{(s_k)}(x_{ki})$  chứa hai dòng giống nhau (dòng thứ  $m$  và  $n$ ) và do đó

$$V_{Nm}^{(s_k)}(x_{ki}) = 0.$$

Vậy ta thu được điều phải chứng minh

$$P^{(s_k)}(x_{ki}) = V_N^{-1} a_{ki} V_N = a_{ki}$$

Trong phần tiếp theo, ta sẽ thiết lập các ma trận nghiệm của hệ ứng với các bài toán nội suy cổ điển.

## Bài toán nội suy Taylor

Ta nhắc lại bài toán nội suy Taylor.

**Bài toán 2.2.** Cho  $x_{01} \in \mathbf{R}$  và  $a_{k1} \in \mathbf{R}$  với  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Hãy xác định đa thức  $T(x)$  có bậc  $\deg T(x) \leq N-1$  và thỏa mãn điều kiện

$$T^{(k)}(x_{01}) = a_{k1}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

**Giải.** Xét ma trận nghiệm của bài toán. Với cách ký hiệu và định nghĩa như ở bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1), ta có

$$x_{01} \equiv x_1, \quad a_{k1} \equiv a_m, \quad (m = k+1, \quad k = 0, 1, \dots, N-1),$$

$$S_k = k \quad ; (r_0 = 0; r_{k+1} = 1; i = 1; m = r_0 + r_1 + \dots + r_k = k+1) \Rightarrow k = m-1$$

$$g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1}), \quad g_{Nm} = g_N^{(m-1)}(x_1), \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Khi đó, ma trận nghiệm của bài toán (6.2) có dạng tường minh như sau:

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)! \end{pmatrix}$$

$$G_{Nm}(x) = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{Nm-1} \\ g_N(x) \\ g_{Nm+1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x^2 & x^3 & \cdots & x^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)! \end{pmatrix}$$

Lúc này ta có thể biểu diễn  $V_{Nm}(x)$  qua  $V_N$  sau đó tìm lại công thức nghiệm tường minh của bài toán (2.2) như sau :

Với mỗi  $i=1,2,\dots,m-1$ , lần lượt nhân hàng  $i$  với  $-\frac{(x-x_1)^{i-1}}{(i-1)!}$  rồi cộng vào hàng thứ  $m$  của ma trận  $G_{Nm}(x)$  để đưa nó về dạng đường chéo, và từ đó ta tính được định thức  $V_{Nm}(x)$  của nó như sau

$$V_{Nm}(x) = \frac{V_N \cdot (x - x_1)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Cuối cùng, theo kết quả của bài toán (2.1), ta có kết quả của bài toán nội suy Taylor đã biết

$$T(x) = V_N^{-1} \sum_{m=1}^N a_m V_{Nm}(x) = \sum_{m=1}^N \frac{a_m (x - x_1)^{m-1}}{(m-1)!}$$

hay

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_{k+1}}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Ví dụ 2.1.** Xác định đa thức  $f(x)$  ( $\deg f(x) \leq 2$ ) thỏa mãn các điều kiện sau :

$$f(1) = 3, \quad f^{(1)}(1) = 0, \quad f^{(2)}(1) = 2.$$

**Giải.** Đây là bài toán nội suy Taylor cổ điển, ta đi thiết lập ma trận nghiệm ứng với bài toán nội suy Taylor .

Ta thấy  $N = 3, k = 0, 1, \dots, 2$ . Khi đó, ta có

$$x_i = 1, \quad \forall i = 1, a_{k1} \equiv a_m \quad (m = k + 1)$$

$$(a_{01} = 3, \quad a_{02} = 0, \quad a_{03} = 2)$$

$$\begin{aligned} g_3(x) &= (1, x, \dots, x^{N-1}) = (1, x, x^2) \\ &= g_3^{m-1}(x_1) \quad (m = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Do đó ma trận nghiệm của bài toán có dạng tường minh như sau

$$G_3 = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$V_3 = 2; V_3^{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$G_{31}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Rightarrow V_{31}(x) = V_3 \cdot \frac{(x-1)^0}{0!} = 2.$$

$$G_{32}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x & x^2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Rightarrow V_{32}(x) = V_3 \cdot \frac{(x-1)^1}{1!} = 2(x-1).$$

$$G_{33}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 \\ 1 & x & x^2 \end{pmatrix}; \Rightarrow V_{33}(x) = V_3 \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} = (x-1)^2.$$

Vậy

$$f(x) = V_3^{-1} \sum_1^3 a_m V_{3m}(x) = \sum_1^3 \frac{a_m (x-x_1)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$\text{hay } f(x) = \frac{1}{2}[3.2 + 0.2(x-1) + 2.(x-1)^2] = x^2 - 2x + 4.$$

## Bài toán nội suy Lagrange

Ta nhắc lại bài toán nội suy Lagrange.

**Bài toán 2.3.** Cho  $x_{0i}, a_{0i} \in \mathbf{R}$ , với  $x_{0i} \neq x_{0j} \quad \forall i \neq j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$ .  
Hãy xác định đa thức  $L(x)$  có bậc  $\deg L(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$L(x_{0i}) = a_{0i}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Xét ma trận nghiệm của bài toán.

Với cách ký hiệu và định nghĩa như ở bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1) ta có

$$x_{0i} \equiv x_i, \quad a_{0i} \equiv a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1}), \quad g_{Ni} = g_N(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Khi đó, ma trận nghiệm của bài toán(2.3) có dạng tường minh như sau:

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

$$G_{Ni}(x) = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ \vdots \\ g_{Ni-1} \\ g_N(x) \\ g_{Ni+1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \cdots & x_{i-1}^{N-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{N-1} \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

Lúc này ta có thể biểu diễn  $V_{Nm}(x)$  qua  $V_N$ , sau đó tìm lại công thức nghiệm tường minh của bài toán (2.3) như đã biết.

Vì  $V_N$  là định thức Vandermonde nên ta có

$$V_N = \prod_{N \geq m > n \geq 1} (x_m - x_n) = \prod_{m=2}^N \prod_{n=1}^{m-1} (x_m - x_n).$$

Với mỗi  $i=2,3,\dots,N-1$ , ta chứng minh rằng

$$V_N = (-1)^{i-1} \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=1, m \neq i}^N (x_m - x_i).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
V_N &= \prod_{m=2}^N \prod_{n=1}^{m-1} (x_m - x_n) = \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{n=1}^{i-1} (x_i - x_n) \\
&= \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=i+1}^N (x_m - x_i) \prod_{n=1}^{i-1} (x_i - x_n) \\
&= \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=i+1}^N (x_m - x_i) (-1)^{i-1} \prod_{m=1}^{i-1} (x_m - x_i) \\
&= (-1)^{i-1} \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=1, m \neq i}^N (x_m - x_i)
\end{aligned}$$

Công thức trên đúng khi  $i=1$  hoặc  $i=N$ , và từ đó ứng với mỗi  $i=1, 2, 3, \dots, N$ , ta có

$$V_{Ni}(x) = (-1)^{i-1} \prod_{m=2, m \neq i}^N \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=1, m \neq i}^N (x_m - x).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{V_{Ni}(x)}{V_N} = \prod_{m=1, m \neq i}^N \frac{x_m - x}{x_m - x_i} = L_i(x).$$

Cuối cùng, theo kết quả của bài toán (2.1) ta có kết quả của bài toán (2.3) như đã biết

$$L(x) = V_N^{-1} \sum_{i=1}^N a_i V_{Ni}(x) = \sum_{i=1}^N a_i L_i(x).$$

**Ví dụ 2.2.** Xác định đa thức  $L(x)$  ( $\deg L(x) \leq 2$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây

$$L(1) = 0, \quad L(2) = 1, \quad L(3) = -1.$$

**Giải.** Ta gọi  $N = 3, k = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1$ . Ta đi xác định ma trận nghiệm của bài toán nội suy Lagrange.

$$g_N(x) = g_3(x) = (1, x, x^2),$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$V_3 = 2; \quad V_3^{-1} = 2.$$

Ta có

$$V_{3i}(x) = (-1)^{i-1} \prod_{m=2, m \neq i}^3 \prod_{n=1, n \neq i}^{m-1} (x_m - x_n) \prod_{m=1, m \neq i}^3 (x_m - x),$$

và

$$L_i(x) = \prod_{m=1; m \neq i}^3 \frac{x_m - x}{x_m - x_i}.$$

Do đó

$$L_1(x) = \prod_{m=1; m \neq i}^3 \frac{x_m - x}{x_m - x_1} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} = \frac{1}{2}(2 - x)(3 - x),$$

$$L_2(x) = \prod_{m=1; m \neq 2}^3 \frac{x_m - x}{x_m - x_2} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} = (x - 1)(3 - x),$$

$$L_3(x) = \prod_{m=1; m \neq 3}^3 \frac{x_m - x}{x_m - x_3} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_3} = \frac{1}{2}(1 - x)(2 - x),$$

$$L(x) = V_3^{-1} \sum_1^3 a_i V_{3i}(x) = \sum_1^3 a_i L_i(x) = (x - 1)(3 - x) + \frac{1}{2}(x - 1)(2 - x).$$

Vậy

$$L(x) = \frac{-3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 4.$$

## Bài toán suy Newton

Xét bài toán nội suy Newton như đã biết

**Bài toán 2.4.** Cho  $x_i, a_i \in \mathbf{R}$ , với  $i = 1, 2, \dots, N$ . Hãy xác định đa thức  $N(x)$  có bậc  $\deg N(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$N^{(i-1)}(x_i) = a_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Ta xét ma trận nghiệm của bài toán.

Với ký hiệu và định nghĩa như bài toán (2.1), ta có

$$g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1}), \quad g_{Ni} = g_N^{(i-1)}(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, N.)$$

Khi đó, ma trận nghiệm của bài toán (2.4) có dạng tường minh như sau

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & (N-1)x_2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)! \end{pmatrix},$$

$$G_{Ni}(x) = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ g_{N2} \\ \vdots \\ g_{Ni-1} \\ g_N(x) \\ g_{Ni+1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & \cdots & (N-1)x_2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1)! \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có thể biểu diễn  $V_{Nm}(x)$  qua  $V_N$ , sau đó ta tìm lại được công thức nghiệm tường minh của bài toán (2.4) như sau:

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các ma trận  $G_{Ni}(x)$  để đưa nó về dạng đường chéo, và từ đó tính được các định thức  $V_{Ni}(x)$  như sau

$$V_{N1}(x) = V_N,$$

$$V_{N2}(x) = (x - x_1)V_N = V_N R(x_1, x),$$

$$V_{N3}(x) = \left[ \frac{(x - x_2)^2}{2} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \right] V_N = V_N R^2(x_1, x_2, x),$$

$$\dots$$

$$V_{Ni}(x) = V_N R^{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x).$$

Cuối cùng, theo bài toán (2.1), ta có kết quả quen thuộc của bài toán (2.4) đã biết

$$N(x) = V_N^{-1} \sum_{i=1}^N a_i V_{Ni}(x) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{V_{Ni}(x)}{V_N}$$

hay

$$N(x) = a_1 + a_2 R(x_1, x) + \cdots + a_N R^{N-1}(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x).$$

## Bài toán nội suy Hermite

Xét bài toán nội suy Hermite như đã biết:

**Bài toán 2.5.** Cho  $x_{1i}, a_{ki} \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1$  và  $x_{1i} \neq x_{1j}, \forall i \neq j$  trong đó  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = N$ .

Hãy xác định đa thức  $H(x)$  có bậc  $\deg H(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$H^{(k)}(x_i) = a_{ki}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1.$$

**Giải.**

Ta xét ma trận nghiệm của bài toán.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n,$$

vì nếu không ta có thể thay đổi thứ tự (đánh số lại) của dãy  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Khi đó, nếu gọi

$$X_k = \left\{ x_{1i} : H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki} \right\}$$

thì ta có

$$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_{p_1-1}.$$

Ký hiệu

$$r_{-1} = 0 \quad \text{và} \quad r_k = |X_k|, \quad \text{với } k = 0, 1, \dots, p_1 - 1, \quad i = 1, 2, \dots, r_k.$$

Để đánh lại chỉ số  $a_{ki}$ , ta định nghĩa

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} + i, \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Khi đó, với  $m \simeq (k, i)$  và  $H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}$  ta viết  $x_{1i} = x_m$  và  $a_{ki} = a_m$ , đồng thời sử dụng các ký hiệu  $g_N, g_{Nm}, V_N, V_{Nm}(x)$  như bài toán nội suy cổ điển (2.1) ta thu được ma trận của bài toán (2.5) dưới dạng tường minh như

sau:

$$G_N = \begin{pmatrix} g_{N1} \\ \vdots \\ g_{Nr_1} \\ g_{Nr_1+1} \\ \vdots \\ g_{Nr_1+r_2} \\ g_{Nr_1+r_2+1} \\ \vdots \\ g_{Nr_1+r_2+r_3} \\ \vdots \\ g_{Nr_1+r_2+r_3+\dots+r_{n-1}+1} \\ \vdots \\ g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_N(x_1) \\ \vdots \\ g_N(x_{r_1}) \\ g'_N(x_1) \\ \vdots \\ g'(x_{r_2}) \\ g''_N(x_1) \\ \vdots \\ g''_N(x_{r_3}) \\ \vdots \\ g_N^{(p_1-1)}(x_1) \\ \vdots \\ g_N^{(p_1-1)}(x_{r_{p_1}}) \end{pmatrix}.$$

Do tính duy nhất nghiệm của bài toán (2.5) nên từ đây ta cũng nhận được công thức đã biết

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} a_{ki} \frac{(x-x_i)^k}{k!} W_i(x) T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)}$$

trong đó

$$T \left\{ \frac{1}{W_i(x)} \right\}_{(x=x_i)}^{(p_i-1-k)} = \sum_{l=0}^{p_i-1-k} \left[ \frac{1}{W_i(x)} \right]_{(x=x_i)}^{(l)} \frac{(x-x_i)^l}{l!}.$$

**Ví dụ 2.3.** Xác định đa thức  $H(x)$  ( $\deg H(x) \leq 2$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$H(1) = 1, \quad H^{(1)}(1) = 0, \quad H(2) = 0.$$

**Giải.** Đặt  $x_{1i} = 1; 2$  và  $p_i = 2; 1$ , lần lượt tương ứng với  $\{i = 1, 2\}$ , với mỗi  $i$ , đặt  $k = \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$  và  $a_{ki} \in R$ , trong đó  $a_{01} = 1, a_{11} = 0, a_{02} = 0$ , ta có:  $p_1 > p_2$  và  $p_1 + p_2 = 3$ , ( $N = 3$ ). Ta sẽ đi xác định đa thức  $H(x)$  có bậc  $\deg H(x) \leq 2$  ( $2 = N - 1$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:  $H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}$ ;  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_i - 1$ . Đây là bài toán nội suy Hermite, ta đi xác định ma trận nghiệm của bài toán.

Gọi  $X_k = \{x_{1i} : H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}\}$  thì ta có:  $X_0 = \{x_{11}, x_{12}\}$ ,  $X_1 = \{x_{11}\}$ .

Với ký hiệu

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_k = |X_k|, \text{ với } k = 0, 1, \dots, p_1 - 1, \quad i = 1, 2, \dots, r_k,$$

ta có

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_0 = |X_0| = 2, \text{ với } k = 0, i = 1, 2,$$

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_1 = |X_1| = 1, \text{ với } k = 1, i = 1.$$

Ta đánh lại chỉ số  $a_{ki}$  như sau

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{k-1} + i, \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

với  $k=0$

$$i = 1, \quad m \simeq (0, 1) \Leftrightarrow m = r_{-1} + 1 = 1,$$

$$i = 2, \quad m \simeq (0, 2) \Leftrightarrow m = r_{-1} + 2 = 2,$$

với  $k = 1$

$$i = 1, \quad m \simeq (1, 1) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + 1 = 3.$$

Khi đó, với  $m \simeq (ki)$  và  $H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}$ , ta viết  $x_{1i} = x_m$  và  $a_{ki} = a_m$ , đồng thời sử dụng các ký hiệu  $g_N, g_{Nm}, V_N, V_{Nm}(x)$  như bài toán nội suy cổ điển tổng quát, ta có

với  $m = 1, k=0, i=1, a_1 = a_{01} = 1, x_{11} = 1$ , ta có

$$g_{31} = g_{31}^{(0)}(x = 1) = [(1, x, x^2)|x = 1] = (1, 1, 1),$$

với  $m = 2, k=0, i=2, a_2 = a_{02} = 0, x_{12} = 2$  ta có

$$g_{32} = g_{32}^{(0)}(x = 2) = [(1, x, x^2)|x = 2] = (1, 2, 4),$$

với  $m = 3, k=1, i=1, a_3 = a_{11} = 0, x_{11} = 1$  ta có

$$g_{33} = g_{33}^{(1)}(x = 1) = [(0, 1, 2x)|x = 1] = (0, 1, 2).$$

Ta có

$$G_3 = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{vmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow V_3^{-1} = -1.$$

Tương ứng với  $m = 1$

$$G_{31}(x) = \begin{pmatrix} g_3(x) \\ g_{32} \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2x + x^2$$

$$V_{31}(x) = -2x + x^2,$$

và với  $m = 2$

$$G_{32}(x) = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32}(x) \\ g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{32}(x) = |G_{32}(x)|,$$

với  $m = 3$

$$G_{33}(x) = \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{33}(x) = |G_{33}(x)|.$$

Ký hiệu  $|G_{3m}(x)| = V_{3m}(x)$ ,  $m = 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } H(x) &= V_3^{-1} \sum_{m=1}^3 a_m V_{3m}(x) \\ &= -1. [1.(-2x + x^2) + 0.V_{32}(x) + 0.V_{33}(x)] \\ H(x) &= -x^2 + 2x. \end{aligned}$$

## 2.2 Bài toán nội suy Taylor mở rộng

Ta xét bài toán sau đây.

**Bài toán 2.6.** Cho  $s \in \mathbf{N}$  và  $x_1, x_*, a_k, a_*$ , với  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Tìm điều kiện đối với  $s, x_*$  và  $a_*$  để tồn tại duy nhất đa thức  $\bar{T}(x)$  có bậc  $\deg \bar{T}(x) \leq \mathbf{N}$  và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \bar{T}^{(k)}(x_1) = a_k, & \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \bar{T}^{(s)}(x_*) = a_* \end{cases}$$

Trong trường hợp tồn tại duy nhất đa thức  $\bar{T}(x)$  thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Taylor mở rộng (2.6), ta nói bài toán nội suy Taylor xuất phát là mở rộng được. Ngược lại, ta nói bài toán nội suy Taylor là không mở rộng được.

**Giải.** Trước hết ta ký hiệu

$$a_N = a_*, \quad g(x) = (1, x, x^2, \dots, x^N),$$

$$G_{N+1} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g'(x_1) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(x_1) \\ g^{(s)}(x_*). \end{pmatrix}$$

Khi đó, theo kết quả của bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1), cho ta điều kiện cần và đủ để bài toán (2.6) mở rộng được là

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Tiếp theo, ta sẽ làm rõ điều kiện này trong một số bài toán ứng với các trường hợp cụ thể.

(i) Nếu  $s > N$  thì  $g^{(s)}(x_*) = (0, 0, \dots, 0)$  và do đó

$$V = \det G_{N+1} = 0$$

Trong trường hợp này tính duy nhất nghiệm của bài toán (2.1) bị phá vỡ và do đó bài toán xuất phát là không mở rộng được.

(ii) Nếu  $s = N$  thì đây là bài toán nội suy Taylor với  $N+1$  điều kiện, và do đó bài toán xuất phát là mở rộng được.

Khi đó, ta có nghiệm duy nhất của bài toán (2.6) trong trường hợp này là

$$\bar{T}(x) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{k!} (x - x_1)^k.$$

(iii) Nếu  $s < N$ , chẳng hạn  $s = n_0 \in 0, 1, \dots, N-1$ , khi đó ta xét các trường hợp sau.

Xét trường hợp  $x_* = x_1$ . Khi đó trong ma trận  $G_{N+1}$  của bài toán (2.6) có hai hàng giống nhau

$$g^{(n_0)}(x_1) = g^{(s)}(x_*),$$

và do đó

$$V = \det G_{N+1} = 0.$$

Trong trường hợp này bài toán (2.6) là không mở rộng được.

Xét trường hợp  $x_* \neq x_1$ .

Nếu xảy ra  $s = 0$  thì đây là bài toán nội suy Hermite với  $N+1$  điều kiện và

do đó bài toán đã cho là mở rộng được.

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Hermite, cho ta nghiệm duy nhất của bài toán (2.6) trong trường hợp này là

$$\bar{T}(x) = \sum_{k=0}^N a_k H_k(x),$$

trong đó, với mỗi  $k=0,1,\dots,N-1$ , ta có

$$H_k(x) = \frac{(x-x_1)^k}{k!} (x-x_*) \sum_{l=0}^{N-1-k} \left[ \frac{1}{x-x_*} \right]_{(x=x_1)}^{(l)} \frac{(x-x_1)^l}{l!}$$

và

$$H_N(x) = H_*(x) = \left( \frac{x-x_1}{x_*-x_1} \right)^N.$$

Nếu xảy ra  $s \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  thì rơi vào trường hợp bài toán (2.1), khi đó bài toán nội suy Taylor là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0,$$

điều này tương đương với

$$V_{-s} = \det G_{-s} \neq 0,$$

ở đây  $G_{-s}$  là ma trận thu được từ ma trận  $G_{N+1}$  bằng cách bỏ đi  $s$  hàng và  $s$  cột đầu tiên.

Trong trường hợp này, ta ký hiệu

$$V_m(x) = \det G_{(N+1)m}(x),$$

ở đây  $G_{(N+1)m}(x)$  là ma trận thu được từ ma trận  $G_{N+1}$  bằng cách thay hàng thứ  $m$  bởi  $g(x)$ , ( $m = 1, 2, \dots, N+1$ ).

Khi đó theo công thức nghiệm của bài toán (2.1), cho ta nghiệm duy nhất của bài toán (2.6) trong trường hợp này là

$$\bar{T}(x) = V^{-1} \sum_{k=0}^N a_k V_{k+1}(x).$$

## 2.3 Bài toán nội suy Lagrange mở rộng

**Bài toán 2.7.** Cho  $s \in \mathbf{N}$  và  $x_i, x_*, a_i, a_* \in \mathbf{R}$ ,  $(x_i \neq x_j \forall i \neq j; i, j = \overline{1, N})$ . Hãy tìm điều kiện đối với  $s, x_*$  và  $a_*$  để tồn tại duy nhất đa thức  $\overline{L}(x)$  có bậc  $\deg \overline{L}(x) \leq N$  và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \overline{L}(x_i) = a_i, & \forall i = 1, \dots, N, \\ \overline{L}^{(s)}(x_*) = a_* \end{cases}$$

Trong trường hợp tồn tại duy nhất đa thức  $\overline{L}(x)$  thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Lagrange mở rộng (2.7), ta gọi bài toán nội suy Lagrange ban đầu là mở rộng được. Trong trường hợp ngược lại, ta nói rằng bài toán nội suy Lagrange xuất phát (ban đầu) là không mở rộng được.

Ta ký hiệu

$$g(x) = (1, x, x^2, \dots, x^N),$$

$$G_{N+1} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \\ g^{(s)}(x_*). \end{pmatrix}$$

Khi đó, điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy Lagrange xuất phát là mở rộng được là

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Tương tự đối với bài toán nội suy Taylor mở rộng, ta sẽ làm rõ điều kiện này trong một số trường hợp cụ thể:

Nếu xảy ra  $s > N$  thì tính duy nhất nghiệm của bài toán (2.7) bị phá vỡ, và do đó bài toán nội suy Lagrange là không mở rộng được.

Nếu  $s = N$  thì đây là bài toán nội suy Lagrange-Newton (và cũng là bài toán nội suy Newton-Hermite) với  $N + 1$  điều kiện, và do đó bài toán Lagrange là mở rộng được.

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Lagrange-Newton, ta có nghiệm duy nhất của bài toán (2.7) trong trường hợp này là

$$\overline{L}(x) = \sum_{i=1}^N \left( a_i - a_* \frac{x_i^N}{N!} \right) L_i(x) + a_* \frac{x^N}{N!},$$

trong đó

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Nếu  $s < N$ , Khi đó ta xét các trường hợp sau:

Xét trường hợp tồn tại  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$  sao cho  $x_* = x_{i_0}$ . Nếu  $s=0$  thì khi đó trong ma trận  $G_{N+1}$  có hai hàng giống nhau  $g(x_{i_0}) = g(x_*)$ , và do đó  $V = \det G_{N+1} = 0$ .

Trường hợp này bài toán nội suy Lagrange là không mở rộng được.

Nếu  $s = 1$  thì đây là bài toán nội suy Hermite với  $N + 1$  điều kiện, và do đó bài toán nội suy Lagrange mở rộng được.

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Hermite, ta có nghiệm duy nhất của bài toán (2.7) trong trường hợp này là

$$\bar{L}(x) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^N a_i H_i(x) + \sum_{k=0}^1 a_{ki_0} H_{ki_0}(x),$$

trong đó

$$a_{0i_0} = a_{i_0} \text{ và } a_{1i_0} = a_*.$$

Với mỗi  $i=1, 2, \dots, N$  và  $i \neq i_0$ , ta có

$$H_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i_0, j \neq i}^N \frac{(x - x_j)(x - x_{i_0})^2}{(x_i - x_j)(x_i - x_{i_0})^2}.$$

$k = 0, 1$ , ta có

$$H_{ki_0}(x) = \frac{(x - x_{i_0})^k}{k!} W_{i_0}(x) \sum_{l=0}^{1-k} \left[ \frac{1}{W_{i_0}(x)} \right]_{(x=x_{i_0})}^{(l)} \frac{(x - x_{i_0})^l}{l!}.$$

Nếu  $s \in \{2, 3, \dots, N - 1\}$  thì ta thu được trường hợp bài toán (2.1), khi đó bài toán nội suy Lagrange là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Trong trường hợp này, ta ký hiệu

$$V_m(x) = \det G_{(N+1)m}(x),$$

ở đây  $G_{(N+1)m}(x)$  là ma trận thu được từ ma trận  $G_{N+1}$ , bằng cách thay hàng thứ  $m$  bởi  $g(x)$ , ( $m=1, 2, \dots, N+1$ ). Khi đó, theo công thức nghiệm của

bài toán (2.1) ta thu được nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Lagrange mở rộng trong trường hợp này là

$$\bar{L}(x) = V^{-1} \sum_{m=1}^{N+1} a_m V_m(x), \quad (\text{trong đó } a_{N+1} = a_*).$$

Xét trường hợp  $x_* \neq x_i \forall i = 1, 2, \dots, N$ . Nếu  $s=0$  thì đây là bài toán nội suy Lagrange với  $N+1$  điều kiện, và do đó bài toán đã cho là mở rộng được. Khi đó theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Lagrange, ta thu được nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Lagrange mở rộng trong trường hợp này là

$$\bar{L}(x) = \sum_{i=1}^{N+1} a_i \prod_{j=1, j \neq i}^{N+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (a_{N+1} = a_* \text{ và } x_{N+1} = x_*).$$

Nếu  $s \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  thì ta lại thu được trường hợp bài toán (2.1), khi đó bài toán nội suy Lagrange là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Tương tự như trường hợp thứ nhất, nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Lagrange mở rộng trong trường hợp này là

$$\bar{L}(x) = V^{-1} \sum_{m=1}^{N+1} a_m V_m(x), \quad (\text{trong đó } a_{N+1} = a_*).$$

## 2.4 Bài toán nội suy Newton mở rộng

**Bài toán 2.8.** Cho  $s \in N$  và  $x_i, x_*, a_i, a_* \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Hãy tìm điều kiện của  $s, x_*$  và  $a_*$  để tồn tại duy nhất đa thức  $\bar{N}(x)$  có bậc  $\deg \bar{N}(x) \leq N$  và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \bar{N}^{(i-1)}(x_i) = a_i, & \forall i = 1, \dots, N, \\ \bar{N}^{(s)}(x_*) = a_* \end{cases}$$

Trong trường hợp tồn tại duy nhất đa thức  $\bar{N}(x)$  thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Newton mở rộng (2.8) thì ta nói bài toán nội suy Newton xuất phát là mở rộng được. Ngược lại, ta nói bài toán nội suy Newton là

không mở rộng được.

**Giải.** Trước hết, ta ký hiệu

$$a_{N+1} = a_*,$$

$$g(x) = (1, x, x^2, \dots, x^N,$$

$$R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \int_{x_2}^{t_2} \dots \int_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_{i-1} \dots dt_1 dt, i = 2, \dots, N,$$

$$G_{N+1} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g^{(1)}(x_2) \\ g^{(2)}(x_3) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(x_N) \\ g^{(s)}(x_*). \end{pmatrix}$$

Khi đó theo kết quả của bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1) đã xét, ta thu được điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy Newton là mở rộng được là

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Tương tự như hai bài toán trên, chúng ta sẽ làm rõ điều kiện này trong một số trường hợp cụ thể:

Nếu  $s > N$  thì tính duy nhất nghiệm của bài toán nội suy Newton mở rộng bị phá vỡ, và do đó bài toán nội suy Newton đã cho là không mở rộng được. Nếu  $s = N$  thì đây là bài toán nội suy Newton với  $N+1$  điều kiện, và do đó bài toán nội suy Newton là mở rộng được.

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Newton, ta thu được nghiệm duy nhất của bài toán (2.8) trong trường hợp này là

$$\overline{N}(x) = a_1 + a_2 R(x_1, x) + \dots + a_{N+1} R^N(x_1, x_2, \dots, x_N, x).$$

Nếu  $s < N$ , khi đó ta xét các trường hợp sau:

Nếu tồn tại  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$  sao cho  $x_* = x_{i_0}$ .

Nếu  $s = i_0 - 1$  thì khi đó trong ma trận  $G_{N+1}$  có hai hàng giống nhau

$$g^{(i_0-1)}(x_{i_0}) = g^{(s)}(x_*),$$

và do đó

$$V = \det G_{N+1} = 0.$$

Trong trường hợp này bài toán nội suy Newton là không mở rộng được.

Nếu  $s < N$  và  $s \neq i_0 - 1$  thì ta lại thu được trường hợp bài toán (2.1), khi đó bài toán nội suy Newton là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Trong trường hợp này, ta ký hiệu

$$V_m(x) = \det G_{(N+1)m}(x),$$

ở đây  $G_{(N+1)}(x)$  là ma trận thu được từ ma trận  $G_{N+1}$  bằng cách thay hàng thứ  $m$  bởi  $g(x)$ , ( $m=1,2,\dots,N+1$ ).

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán (2.1), cho ta nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Newton mở rộng trong trường hợp này là

$$\overline{N}(x) = V^{-1} \sum_{m=1}^{N+1} a_m V_m(x), \quad (a_{N+1} = a_*).$$

Xét trường hợp  $x_* \neq x_i, \forall i = 1, 2, \dots, N$ . Lúc này ta thu được trường hợp bài toán (2.1), khi đó bài toán nội suy Newton là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Tương tự như đã trình bày ở phần trên, nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Newton mở rộng trong trường hợp này là

$$\overline{N}(x) = V^{-1} \sum_{m=1}^{N+1} a_m V_m(x), \quad a_{N+1} = a_*.$$

## 2.5 Bài toán nội suy Hermite mở rộng

**Bài toán 2.9.** Cho  $s \in N$  và  $x_i, x_*, a_{ki}, a_* \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n; k = 0, \dots, p_i - 1; x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ , , trong đó

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = N.$$

Hãy tìm điều kiện của  $s, x_*$  và  $a_*$  sao cho tồn tại duy nhất đa thức  $\overline{H}(x)$  có bậc  $\deg \overline{H}(x) \leq N$  và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \overline{H}^{(k)}(x_i) = a_{ki}, & \forall i = 1, \dots, n; \quad \forall k = 0, \dots, p_i - 1, \\ \overline{H}^{(s)}(x_*) = a_*. \end{cases}$$

Trong trường hợp tồn tại duy nhất đa thức  $\overline{H}(x)$  thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Hermite mở rộng (2.9), thì ta nói bài toán nội suy Hermite đã cho là mở rộng được. Ngược lại, ta nói bài toán nội suy Hermite là không mở rộng được.

Tương tự như các bài toán ở trên, nếu  $s > N$  thì tính duy nhất nghiệm của bài toán nội suy Hermite mở rộng bị phá vỡ, và do đó bài toán nội suy Hermite là không mở rộng được.

Nếu  $s = N$  thì đây là bài toán nội suy Newton-Hermite với  $N + 1$  điều kiện, do đó bài toán nội suy Hermite là mở rộng được.

Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Newton-Hermite, ta có nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Hermite mở rộng trong trường hợp này là

$$\overline{H}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} \left[ a_{ki} - a_* \frac{x_i^{N-k}}{(N-k)!} \right] H_{ki}(x) + a_* \frac{x^N}{N!},$$

trong đó, ứng với mỗi  $i=1,2,\dots,n$ , ta có

$$W_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j)^{p_j},$$

$$H_{ki} = \frac{(x - x_i)^k}{k!} W_i(x) \sum_{l=0}^{p_i-1-k} \left[ \frac{1}{W_i(x)} \right]_{(x=x_i)}^{(l)} \frac{(x - x_i)^l}{l!}$$

Nếu  $s < N$ , ta xét trường hợp sau:

Trường hợp tồn tại  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho  $x_* = x_{i_0}$ . Nếu  $s = p_{i_0}$  thì đây là bài toán nội suy Hermite với  $N + 1$  điều kiện, và do đó bài toán nội suy Hermite là mở rộng được. Khi đó, theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Hermite, cho ta nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Hermite mở rộng (2.9) trong trường hợp này là

$$\overline{H}(x) = \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} a_{ki} H_{ki}(x) + \sum_{k=0}^{p_{i_0}} a_{ki_0} H_{ki_0}(x),$$

trong đó

$$a_{p_{i_0} i_0} = a_*,$$

$$W_{i_0}(x) = \prod_{j=1, j \neq i_0}^n (x - x_j)^{p_j},$$

$$W_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i_0, j \neq i}^n (x - x_j)^{p_j} (x - x_{i_0})^{p_{i_0}+1}, (i \neq i_0),$$

$$H_{ki_0}(x) = \frac{(x - x_{i_0})^k}{k!} W_{i_0}(x) \sum_{l=0}^{p_{i_0}-k} \left[ \frac{1}{W_{i_0}(x)} \right]_{(x=x_{i_0})}^{(l)} \frac{(x - x_{i_0})^l}{l!}$$

$$H_{ki}(x) = \frac{(x - x_i)^k}{k!} W_i(x) \sum_{l=0}^{p_i-1-k} \left[ \frac{1}{W_i(x)} \right]_{(x=x_i)}^{(l)} \frac{(x - x_i)^l}{l!}, i \neq i_0.$$

Nếu  $s = p_* < p_{i_0}$ , thì khi đó trong ma trận  $G_{N+1}$  của bài toán nội suy Hermite mở rộng có hai hàng giống nhau

$$g^{(p_{i_0})}(x_0) = g^{(p_*)}(x_*),$$

và do đó

$$V = \det G_{N+1} = 0.$$

Trường hợp này bài toán nội suy Hermite là không mở rộng được.

Nếu  $s \in \{p_{i_0+1}, \dots, N-1\}$  thì rơi vào trường hợp bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1) khi đó bài toán nội suy Hermite mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

Xét trường hợp  $x_* \neq x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Nếu xảy ra  $s = 0$ , thì đây là bài toán nội suy Hermite với  $N+1$  điều kiện, và do đó bài toán nội suy Hermite là mở rộng được. Khi đó theo công thức nghiệm của bài toán nội suy Hermite, nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Hermite mở rộng trong trường hợp này là

$$\bar{H}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{p_i-1} a_{ki} H_{ki}(x) + \prod_{i=1}^n a_* \left( \frac{x - x_i}{x_* - x_i} \right)^{p_i},$$

trong đó  $H_{ki}$  được ký hiệu như trong bài toán nội suy Hermite.

Nếu  $s \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  thì rơi vào trường hợp bài toán (2.1) khi đó bài toán nội suy Hermite là mở rộng được khi và chỉ khi

$$V = \det G_{N+1} \neq 0.$$

## 2.6 Bài toán nội suy Lagrange - Newton

**Bài toán 2.10.** Cho  $x_{ki}, a_{ki} \in \mathbf{R}$  với  $x_{ki} \neq x_{kj}, \forall i \neq j; k = 0, 1, \dots, n - 1; i, j = 1, \dots, r_{k+1}$ ; trong đó

$$r_0 = 0, r_0 + r_1 + \dots + r_k = s_k, r_0 + r_1 + \dots + r_n = s_n = N.$$

Hãy xác định đa thức  $f(x)$  có bậc  $\deg f(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$f^{(s_k)}(x_{ki}) = a_{ki} \quad \forall k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad \forall i = 1, \dots, r_{k+1}. \quad (2.2)$$

Ký hiệu

$$L_{ki}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{r_{k+1}} \frac{x - x_{kj}}{x_{ki} - x_{kj}}, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

và phép lấy nguyên hàm  $R = \int_0^x$ . Khi đó dễ thấy rằng

$$\deg L_{ki}(x) \leq r_{k+1} - 1,$$

$$L_{ki}(x_{kj}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

hay  $L_{ki}(x_{kj}) = \delta_{ij}$ .

Tiếp theo, ta đặt  $y_n(x) \equiv 0$  và xây dựng hàm

$$y_k(x) = R^{s_k} \sum_{i=1}^{r_{k+1}} [a_{ki} - y_{k+1}^{(s_k)}(x_{ki})] L_{ki}(x), \quad (k = n - 1, \dots, 1, 0).$$

Dễ thấy rằng

$$\deg y_k(x) \leq N - 1, \quad \text{và} \quad \deg y_k(x) < s_{k+1}.$$

Đa thức

$$f(x) = y_0(x) + y_1(x) + \dots + y_{n-1}(x)$$

chính là nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Lagrange - Newton.

**Chú ý 2.1.** Nếu  $k = 0$ , tương ứng  $r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0$ , thì  $s_k = 0$ . Khi đó bài toán nội suy Lagrange-Newton chính là bài toán nội suy Lagrange ở trên. Nếu  $i = 1$ , tương ứng  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$ , thì  $s_k = k$ , khi đó bài toán nội suy Lagrange-Newton chính là bài toán nội suy Newton ở trên.

**Bài toán 2.11.** Hãy xác định đa thức  $f(x)$  ( $\deg f(x) \leq 2$ ), thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(1) = 1, \quad f^{(1)}(1) = 0, \quad f^{(2)}(2) = 2.$$

**Giải.** Ta có

$$\begin{aligned} L_{01}(x) &= \prod_{j=1; j \neq 1}^{r_1=1} 1 = 1, \\ L_{11}(x) &= \prod_{j=1; j \neq 1}^{r_2=2} \frac{x - x_{1j}}{x_{11} - x_{1j}} = \frac{x - x_{12}}{x_{11} - x_{12}} = \frac{x - 2}{1 - 2} = 2 - x, \\ L_{12}(x) &= \prod_{j=1; j \neq 2}^2 \frac{x - x_{1j}}{x_{12} - x_{1j}} = \frac{x - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} = \frac{x - 1}{2 - 1} = x - 1. \end{aligned}$$

Đặt  $y_n(x) \equiv 0$ , nghĩa là  $y_2(x) \equiv 0$  và xây dựng hàm như sau với  $k=1$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= R^{s_1} \sum_{i=1}^2 [a_{1i} - y_2^{s_1}(x_{1i})] L_{1i}(x) \\ &= R^1 \{ [a_{11} + y_2^{(1)}(x_{11})] L_{11}(x) + [a_{12} + y_2^{(1)}(x_{12})] L_{12}(x) \} \\ &= R^1 \{ (0 + 0)(2 - x) + (2 + 0)(x - 1) \} = R^1 \{ 2(x - 1) \} = \\ &= \int_0^x 2(x - 1) dx = (x - 1)^2 - 1, \end{aligned}$$

với  $k = 0$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= R^{s_0} \sum_{i=1}^{r_1=1} [a_{0i} - y_{0+1}^{s_0}(x_{0i})] L_{0i}(x) \\ &= R^0 \{ [1 - y_1^0(1)] \cdot 1 \} = R^0 \{ 2 \} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(x) = y_0(x) + y_1(x) = 2 + (x - 1)^2 - 1 = (x - 1)^2 + 1.$$

## 2.7 Bài toán nội suy Newton-Hermite

**Bài toán 2.12.** Cho bộ số  $x_{ki}, a_{hki} \in \mathbf{R}, k = 0, 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, r_{k+1}, h = 0, \dots, p_{ki} - 1, x_{ki} \neq x_{kj}, \forall i \neq j$ , trong đó

$$p_{k1} + \dots + p_{kr_{k+1}} = N_{k+1}, \quad N_0 + \dots + N_k = s_k, \quad N_0 + \dots + N_n = s_n = N, \quad N_0 = 0.$$

Hãy xác định đa thức  $f(x)$  có  $\deg f(x) \leq N - 1$  và thỏa mãn điều kiện

$$f^{(s_k+h)}(x_{ki}) = a_{hki}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, r_{k+1}, \quad h = 0, \dots, p_{ki} - 1. \quad (2.3)$$

Trước hết, ta sử dụng ký hiệu

$$(Rf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad W_{ki}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{r_{k+1}} (x - x_{kj})^{p_{kj}},$$

$$H_{hki}(x) = \frac{(x - x_{ki})^h}{h!} W_{ki}(x) \sum_{l=0}^{p_{ki}-1-h} \left[ \frac{1}{W_{ki}(x)} \right]_{(x=x_{ki})}^{(l)} \frac{(x - x_{ki})^l}{l!}.$$

$$\deg W_{ki}(x) \leq N_{k+1} - p_{ki}, \deg H_{hki}(x) \leq N_{k+1} - 1$$

Khi đó, dễ thấy rằng

$$\deg W_{ki}(x) \leq N_{k+1} - p_{ki}, \deg H_{hki}(x) \leq N_{k+1} - 1$$

và

$$H_{hki}^{(l)}(x_{kj}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } l = h \text{ và } i = j \\ 0 & \text{nếu } l \neq h \text{ hoặc } i \neq j \end{cases}$$

hay  $H_{hki}^{(l)}(x_{ki}) = \delta_{lh} \delta_{ij}$ .

Tiếp theo, ta đặt  $f_n(x) \equiv 0$  và xây dựng dãy hàm

$$y_k(x) = R^{s_k} \left( \sum_{i=1}^{r_{k+1}} \sum_{h=0}^{p_{ki}-1} [a_{hki} - f_{k+1}^{(s_k+h)}(x_{ki})] H_{hki} \right) (x),$$

$$f_k(x) = y_k(x) + f_{k+1}(x), k = n-1, \dots, 1, 0.$$

Khi đó ta dễ dàng thấy rằng

$$\deg y_k(x) \leq s_k + N_{k+1} - 1 = s_{k+1} - 1.$$

Suy ra  $\deg y_k(x) \leq N - 1$  và  $\deg y_k(x) < s_k + 1$ .

Đa thức

$$f(x) = f_0(x) = y_0(x) + y_1(x) + \dots + y_{n-1}(x)$$

là nghiệm duy nhất của bài toán nội suy Newton-Hermite .

**Bài toán 2.13.** Xác định đa thức  $f(x)$  ( $\deg f(x) \leq 3$ ) và thỏa mãn các điều kiện sau đây

$$f(0) = 1, \quad f^{(1)}(1) = 0, \quad f^{(1)}(2) = 2, \quad f^{(2)}(2) = 1.$$

**Giải.** Theo công thức nội suy Newton- Hermite, ta có  
với  $k=0$

$$W_{01} = \prod_{j=1; j \neq 1}^1 = 1,$$

với  $k=1$

$$W_{11} = \prod_{j=1; j \neq 1}^2 (x - x_{12})^2 = (x - 2)^2,$$

$$W_{12} = \prod_{j=1; j \neq 2}^2 = (x - x_{11})^1 = x - 1.$$

Ta đi tìm  $H_{hki}(x)$ ?

Với  $k=0$

$$\begin{aligned} H_{001}(x) &= \frac{(x - x_{01})^0}{0!} W_{01}(x) \sum_{l=0}^{1-1-0} \left[ \frac{1}{W_{01}(x)} \right]_{(x=x_{01})}^{(l)} \frac{(x - x_{01})^l}{l!} \\ &= \frac{(x - 0)^0}{0!} \cdot 1 \cdot \sum_{l=0}^0 \left[ \frac{1}{W_{01}(x)} \right]_{(x=0)}^{(l)} \frac{(x - 0)^l}{l!} = 1. \\ H_{011}(x) &= \frac{(x - 1)^0}{0!} W_{11}(x) \sum_{l=0}^{1-1-0} \left[ \frac{1}{W_{11}(x)} \right]_{(x=x_1)}^{(l)} \frac{(x - 1)^l}{l!} \\ &= (x - 2)^2 \sum_{l=0}^0 \left[ \frac{1}{(x - 2)^2} \right]_{(x=1)}^{(l)} \frac{(x - 1)^l}{l!} \\ &= (x - 2)^2 \frac{1}{(1 - 2)^2} \cdot \frac{(x - 1)^0}{0!}, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} H_{012}(x) &= \frac{(x - x_{12})^0}{0!} W_{12}(x) \sum_{l=0}^{2-1-0} \left[ \frac{1}{W_{12}(x)} \right]_{(x=x_{12})}^{(l)} \frac{(x - x_{12})^l}{l!} \\ &= \frac{(x - 2)^0}{0!} \cdot \sum_{l=0}^1 \left[ \frac{1}{(x - 1)} \right]_{(x=2)}^{(l)} \frac{(x - 2)^l}{l!} \\ &= (x - 1) \left[ \frac{1}{2 - 1} - \frac{1}{(2 - 1)^2} (x - 2) \right] = (x - 1)(3 - x), \\ H_{112}(x) &= \frac{(x - 1)^1}{1!} (x - 1) \cdot \sum_{l=0}^{2-1-1} \left[ \frac{1}{(x - 1)} \right]_{(x=2)}^{(l)} \frac{(x - 2)^l}{l!} \end{aligned}$$

$$= (x-2)(x-1)\frac{1}{2-1} = (x-2)(x-1).$$

Đặt  $y_n(x) \equiv 0$ , nghĩa là  $y_2(x) \equiv 0$  và xây dựng hàm như sau  
Với  $k=1$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= R^{s_1} \left\{ \sum_{h=0}^{p_{11}-1} [a_{h11} - f_{1+1}^{s_1+h}(x_{11})] H_{h11} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h=0}^{p_{12}-1} [a_{h12} - f_{1+1}^{s_1+h}(x_{12})] H_{h12} \right\}(x) \\ &= R^1 \{ [a_{011} + f_2^1(x_{11})] H_{011} + [a_{012} + f_2^1(x_{12})] H_{012} + \\ &\quad + [a_{112} - f_2^2(x_{12})] H_{112} \}(x) \\ &= R^1 \{ (0-0)(x-2)^2 + (2-0)(x-1)(3-x) + (1-0)(x-2)(x-1) \} \\ &= R^1 \{ 2(x-1)(3-x) + (x-2)(x-1) \}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} R^1 \{-x^2 + 5x - 4\} &= \int_0^x (-x^2 + 5x - 4) dx = \frac{-1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \\ y_1(x) &= \frac{-1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x. \end{aligned}$$

Do đó

$$f_1(x) = y_1(x) + f_2(x) = y_1(x) + 0 = y_1(x) = \frac{-1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x.$$

Với  $k=0$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= R^{s_0} \left\{ \sum_{h=0}^{p_{01}} [a_{h01} - f_1^{s_0+h}(x_{01})] H_{h01} \right\}(x) \\ &= R^0 \{ [a_{001} - f_1^{(0)}(x_{01})] H_{001} \}(x) \\ &= R^0 \{ [1 - (\frac{-1}{3}0^3 + \frac{5}{2}0^2 - 40)].1 \}(x) = 1. \end{aligned}$$

Ta có

$$f_0(x) = y_0(x) + f_1(x) = 1 + \frac{-1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x$$

Suy ra

$$f(x) = f_0(x) = y_0(x) + y_1(x) = 1 + \frac{-1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x.$$

## CHƯƠNG 3

# MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA NỘI SUY

### 3.1 Chứng minh đồng nhất thức

**Bài toán 3.1.** Giả sử  $f(x)$  là một đa thức nhỏ thua hoặc bằng  $m - 2$  và  $x_1, x_2, \dots, x_m$  là  $m$  giá trị đôi một khác nhau cho trước tùy ý. Khi đó ta có đồng nhất thức

$$0 \equiv \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m)} + \\ + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m)} + \dots + \frac{f(x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2) \dots (x_m - x_{m-1})}.$$

**Giải.** Theo công thức nội suy Lagrange, ta có

$$f(x) = f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_m)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_m)} + \\ + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_m)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_m)} + \dots + \\ + f(x_m) \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_1)(x_m - x_2) \dots (x_m - x_{m-1})}.$$

Vế trái của đẳng thức đã cho chính là hệ số của hạng tử ứng với bậc  $m - 1$  trong cách viết chính tắc của đa thức  $f(x)$ . Đồng nhất các hệ số đồng bậc ta có ngay điều phải chứng minh.

### 3.2 Ước lượng đa thức

**Bài toán 3.2.** Cho đa thức  $P(x)$  bậc nhỏ thua hoặc bằng  $2n$  thỏa mãn điều kiện

$$|P(k)| \leq 1, \quad k = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n.$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)| \leq 2^n \quad \forall x \in [-n, n].$$

**Giải.** Theo công thức nội suy Lagrange thì

$$P(x) = \sum_{k=-n}^n P(k) \prod_{j \neq k} \frac{x-j}{k-j}$$

Vì  $|P(k)| \leq 1$  với  $k \in \{-n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n\}$  nên

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^n |P(k)| \prod_{j \neq k} \frac{|x-j|}{|k-j|} \leq \sum_{k=-n}^n \prod_{j \neq k} \frac{|x-j|}{|k-j|}.$$

Nhận xét rằng với  $x \in [-n, n]$  thì

$$\prod_{j \neq k} |x-j| \leq (2n)!$$

và vì vậy

$$\prod_{j \neq k} \frac{x-j}{k-j} \leq \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!}.$$

Do đó

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^n \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = 2^n.$$

### 3.3 Một số bài toán nội suy cổ điển

**Bài toán 3.3.** Xác định đa thức  $H(x)$  ( $\deg H(x) \leq 3$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$H(1) = 1, \quad H^{(1)}(1) = 0, \quad H^{(2)}(1) = 1, \quad H(2) = 0.$$

**Giải.**

Đặt  $x_{1i} = 1; 2$  và  $p_i = 3; 1$ , lần lượt ứng với  $\{i = 1, 2\}$ , với mỗi  $i$ , đặt  $k = \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$  và  $a_{ki} \in R$ , trong đó  $a_{01} = 1, a_{11} = 0, a_{21} = 1, a_{02} = 0$ , ta có:  $p_1 > p_2$  và  $p_1 + p_2 = 4$ , ( $N = 4$ ). Ta sẽ đi xác định đa thức  $H(x)$  có bậc  $\deg H(x) \leq 3$  ( $3 = N - 1$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:  $H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}$ ;  $i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, p_i - 1$ . Đây là bài toán nội suy Hermite, ta đi xác định ma trận nghiệm của bài toán.

Gọi  $X_k = \{x_{1i} : H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}\}$  thì ta có:  $X_0 = \{x_{11}, x_{12}\}$ ;  $X_1 = \{x_{11}\}$ ;  $X_2 = \{x_{11}\}$ .

Với ký hiệu

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_k = |X_k|, \text{ với } k = 0, 1, \dots, p_1 - 1, \quad i = 1, 2, \dots, r_k,$$

ta có

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_0 = |X_0| = 2, \text{ với } k = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_1 = |X_1| = 1, \text{ với } k = 1, \quad i = 1,$$

$$r_{-1} = 0 \text{ và } r_2 = |X_2| = 1, \text{ với } k = 2, \quad i = 1.$$

Ta đánh lại chỉ số  $a_{ki}$  như sau

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} + i, \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Với k=0

$$i = 1, \quad m \simeq (0, 1) \Leftrightarrow m = r_{-1} + 1 = 1,$$

$$i = 2, \quad m \simeq (0, 2) \Leftrightarrow m = r_{-1} + 2 = 2.$$

Với k = 1

$$i = 1, \quad m \simeq (1, 1) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + 1 = 3.$$

Với k=2

$$i = 1, \quad m \simeq (2, 1) \Leftrightarrow m = r_{-1} + r_0 + r_1 + 1 = 4(= N).$$

Khi đó, với  $m \simeq (ki)$  và  $H^{(k)}(x_{1i}) = a_{ki}$ , ta viết  $x_{1i} = x_m$  và  $a_{ki} = a_m$ , đồng thời sử dụng các ký hiệu  $g_N, g_{Nm}, V_N, V_{Nm}(x)$  như bài toán nội suy cổ điển tổng quát, ta có

$$g_4(x) = (1, x, x^2, x^3).$$

Với m = 1; k=0 ; i=1;  $a_m = a_{01} = 1$ ,

$$g_{41}^{(0)}(x = 1) = [(1, x, x^2, x^3)|_{x=1}] = (1, 1, 1, 1).$$

Với  $m = 2; k=0 ; i=2 ; a_m = a_{02} = 0$ ,

$$g_{42}^{(0)}(x = 2) = [(1, x, x^2, x^3)|x = 2] = (1, 2, 4, 8).$$

Với  $m = 3 ; k=1; i=1 ; a_m = a_{11} = 0$ ,

$$g_{43}^{(1)}(x = 1) = [(0, 1, 2x, 3x^2)|x = 1] = (0, 1, 2, 3).$$

Với  $m = 4 ; k=2 ; i=1; a_m = a_{21} = 1$ ,

$$g_{44}^{(2)}(x = 1) = [(0, 0, 2, 6x)|x = 1] = (0, 0, 2, 6).$$

Ta có

$$\begin{aligned} G_4 &= \begin{pmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ V_4 &= \begin{vmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ V_4 &= \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow V_4^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Với  $m = 1$

$$\begin{aligned} G_{41}(x) &= \begin{pmatrix} g_4(x) \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ V_{41}(x) &= \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x-2 & x^2-4 & x^3-8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -1. \begin{vmatrix} x-2 & x^2-4 & x^3-8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$V_{41}(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 4,$$

với  $m=2$

$$G_{42}(x) = \begin{pmatrix} g_{41} \\ g_4(x) \\ g_{43} \\ g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{42}(x) = |G_{42}(x)|,$$

$m=3$

$$G_{43}(x) = \begin{pmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_4(x) \\ g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{43}(x) = |G_{43}(x)|,$$

với  $m=4$

$$G_{44}(x) = \begin{pmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

$$V_{44}(x) = \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & x-2 & x^2-4 & x^3-8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= -1. \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ x-2 & x^2-4 & x^3-8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$V_{44}(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$$

Ta có  $|G_{4m}(x)| = V_{4m}(x)$ , trong đó  $m = 1, 2, 3, 4$ .

$$\text{Do đó } H(x) = V_4^{-1} \sum_{m=1}^4 a_m V_{4m}(x)$$

$$= \frac{1}{2} [1.(-2x^3 + 6x^2 - 6x + 4) + 0 + 1.(-x^3 + 4x^2 - 5x + 2)]$$

$$H(x) = \frac{-3}{2}x^3 + 5x^2 - \frac{11}{2}x + 3.$$

**Bài toán 3.4.** Xác định đa thức  $\overline{T}(x)$  ( $\deg \overline{T}(x) \leq 4$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\overline{T}(0) = 0, \quad \overline{T}^{(1)}(0) = -1, \quad \overline{T}^{(2)}(0) = 1, \quad \overline{T}^{(3)}(0) = 0, \quad \overline{T}^{(2)}(1) = 1.$$

**Giải.** Đây là bài toán Taylor mở rộng (đối với  $N=4$ ), ta có

$$g(x) = (1, x, x^2, x^3, x^4),$$

$$G_{N+1} = G_5 = \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \\ \vdots \\ g^{(N-1)}(0) \\ g^{(2)}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix},$$

$$V_{N+1} = V_5 = |G_5| = 2. \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 \Rightarrow V_5^{-1} = \frac{1}{144}.$$

$$G_{51}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{51}(x) = 144.$$

$$G_{52}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{52}(x) = 144x.$$

$$G_{53}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{53}(x) = 12(6x^2 - x^4).$$

$$G_{54}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{54}(x) = 2(12x^3 - 6x^4).$$

$$G_{55}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{55}(x) = 12x^4$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}(x) &= V_5^{-1} \sum_{k=0}^4 a_k V_{k+1}(x) \\
&= \frac{1}{144} \left( 0.V_{51}(x) - 1.V_{52}(x) + V_{53}(x) + 0.V_{54}(x) + V_{55}(x) \right) \\
&= \frac{1}{144} \left( -1.V_{52}(x) + V_{53}(x) + V_{55}(x) \right) \\
&= \frac{1}{144} \left( -144x + 12(6x^2 - x^4) + 12x^4 \right) \\
\bar{T}(x) &= -x + \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

**Bài toán 3.5.** Xác định đa thức  $\bar{L}(x)$  ( $\deg \bar{L}(x) \leq 4$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned}
\bar{L}(0) &= 1, \quad \bar{L}(1) = 0, \quad \bar{L}(-1) = 1, \\
\bar{L}(2) &= 1, \quad \bar{L}^{(3)}(-1) = -1.
\end{aligned}$$

**Giải.** Đây là bài toán Lagrange mở rộng (đối với  $N=4$ ), ta có

$$g(x) = (1, x, x^2, x^3, x^4),$$

$$G_{N+1} = G_5 = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(-1) \\ g(2) \\ g^{(3)}(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
V_{N+1} = V_5 = |G_5| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & -24 \end{vmatrix} = -432, \\
\Rightarrow V_5^{-1} &= \frac{-1}{432}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{51}(x) &= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow V_{51}(x) &= 288x^2 - 432x - 288.
\end{aligned}$$

$$G_{52}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V_{51}(x) = 36x^4 + 144x^3 - 252x^2 - 360x.$$

$$G_{53}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V_{53}(x) = 12x^4 + 48x^3 - 288x^2 + 168x.$$

$$G_{54}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V_{54}(x) = -12x^4 - 48x^3 + 12x^2 + 48x.$$

$$G_{55}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{55}(x) = 12x^4 - 24x^3 - 12x^2 + 24x.$$

$$\bar{L}(x) = \frac{-1}{432} [1.V_{51}(x) + 0.V_{52}(x) + 1.V_{53}(x) + 1.V_{54}(x) - 1.V_{55}(x)]$$

$$\bar{L}(x) = \frac{-1}{432} [1.V_{51}(x) + 1.V_{53}(x) + 1.V_{54}(x) - 1.V_{55}(x)]$$

$$\bar{L}(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{5}{18}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{7}{9}x + 1.$$

**Bài toán 3.6.** Xác định đa thức  $\bar{N}(x)$  ( $\deg \bar{N}(x) \leq 4$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\bar{N}(1) = 2, \quad \bar{N}^{(1)}(-1) = 0, \quad \bar{N}^{(2)}(2) = 0, \quad \bar{N}^{(3)}(0) = 1, \quad \bar{N}^{(3)}(2) = -1.$$

**Giải.** Đây là bài toán Newton mở rộng (đối với  $N=4$ ), ta có

$$g(x) = (1, x, x^2, x^3, x^4),$$

$$G_{N+1} = G_5 = \begin{pmatrix} g(1) \\ g^{(1)}(-1) \\ g^{(2)}(2) \\ g^{(3)}(0) \\ g^{(3)}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix},$$

$$V_{N+1} = V_5 = |G_5| = 576 \neq 0.$$

$$G_{51}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{51}(x) = 576.$$

$$G_{52}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{52}(x) = 576(x - 1).$$

$$G_{53}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{53}(x) = 288(x^2 + 2x - 3).$$

$$G_{54}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow V_{54}(x) = -12x^4 + 96x^3 - 288x^2 - 912x + 1116.$$

$$G_{55}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{55}(x) = 12x^4 - 288x^2 - 528x + 804.$$

$$\begin{aligned} \overline{N}(x) &= \frac{1}{576} [2.V_{51}(x) + 1.V_{54}(x) - 1.V_{55}(x)] \\ &= \frac{1}{576} [2.576 - 12x^4 + 96x^3 - 288x^2 - 912x + 1116] + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{576} [-12x^4 + 288x^2 + 528x - 804] .$$

$$\overline{N}(x) = \frac{1}{576} [1464 - 24x^4 + 96x^3 - 384x] ,$$

hay

$$\overline{N}(x) = \frac{-1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + \frac{61}{24}.$$

**Bài toán 3.7.** Xác định đa thức  $\overline{H}(x)$  ( $\deg \overline{H}(x) \leq 4$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned} \overline{H}(-1) &= 0, \quad \overline{H}^{(1)}(0) = 1, \\ \overline{H}^{(1)}(1) &= 0, \quad \overline{H}^{(3)}(2) = 0, \quad \overline{H}^{(3)}(-2) = 2. \end{aligned}$$

**Giải.** Đây là bài toán Hermite mở rộng, cũng đồng thời là bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1).

Ta đi xác định ma trận nghiệm của bài toán này.

Ký hiệu  $x_{ki}$ ,  $k=0,1,2$  ( $n=3$ ),  $i = 1, \dots, r_{k+1}$ ,

ta có

$$\begin{aligned} k = 0, r_{k+1} = r_1 = 1, \quad k = 1, r_{k+1} = r_2 = 2, \quad k = 2, r_{k+1} = r_3 = 2, \\ r_0 = 0, r_1 + r_2 + r_3 = 1 + 2 + 2 = 5, (N = 5). \end{aligned}$$

Gọi  $s_0 = 0 < s_1 = 1 < s_2 = 3$ , và đặt

$$\begin{aligned} x_{01} = -1, a_{01} = 0, \quad x_{11} = 0, a_{11} = 1, \quad x_{12} = 1, a_{12} = 0, \\ x_{21} = 2, a_{21} = 0, \quad x_{22} = -2, a_{22} = 2, \end{aligned}$$

thì điều kiện của bài toán tương đương với điều kiện

$$\overline{H}^{(s_k)}(x_{ki}) = a_{ki}, \text{ với } k = 0, 1, 2 \text{ và } i = 1, \dots, r_{k+1}.$$

Trước hết, ta sử dụng ký hiệu  $g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1})$ .

Để đánh lại chỉ số cho cặp bộ số  $x_{ki}$  và  $a_{ki}$ , ta định nghĩa

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k + i,$$

$$m \simeq (0, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + 1 = 0 + 1 = 1,$$

$$m \simeq (1, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

$$m \simeq (1, 2) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$m \simeq (2, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4,$$

$$m \simeq (2, 2) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + 2 = 0 + 1 + 2 + 2 = 5.$$

Ta có

$$G_{N+1} = G_5 = \begin{pmatrix} g_{51} \\ g_{52} \\ g_{53} \\ g_{54} \\ g_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_5^{(0)}(-1) \\ g_5^{(1)}(0) \\ g_5^{(1)}(1) \\ g_5^{(3)}(2) \\ g_5^{(3)}(-2) \end{pmatrix},$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -48 \end{pmatrix} \Rightarrow V_5 = -1152 \neq 0.$$

$$G_{51}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -48 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{51}(x) = -1152.$$

$$G_{52}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -48 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{52}(x) = -576(3 - x^2 + 2x).$$

$$G_{55}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 48 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{55}(x) = 12x^4 - 96x^3 + 120x^2 - 228.$$

Vậy

$$\overline{H}(x) = V_5^{-1} \sum_{m=1}^5 a_m V_{5m}(x)$$

$$\overline{H}(x) = \frac{-1}{1152} [1.V_{52}(x) + 2.V_{55}(x)]$$

$$\overline{H}(x) = \frac{-1}{1152} [-576(3 - x^2 + 2x) + 2(12x^4 - 96x^3 + 120x^2 - 228)]$$

hay

$$\overline{H}(x) = \frac{-1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{17}{24}x^2 + x + \frac{91}{48}.$$

**Bài toán 3.8.** Xác định đa thức  $P(x)$  ( $\deg P(x) \leq 3$ ) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$P(0) = 1, \quad P^{(2)}(0) = \alpha, \quad P^{(2)}(1) = -1, \quad P^{(3)}(2) = 0.$$

**Giải.** Đây là bài toán nội suy cổ điển tổng quát (2.1).

Ta đi xác định ma trận nghiệm của bài toán này.

Ký hiệu  $x_{ki}$ ,  $k=0,1,2$  ( $n=3$ ),  $i = 1, \dots, r_{k+1}$ .

Ta có

$$k = 0, r_{k+1} = r_1 = 1, \quad k = 1, r_{k+1} = r_2 = 2, \quad k = 2, r_{k+1} = r_3 = 1, \\ r_0 = 0, r_1 + r_2 + r_3 = 1 + 2 + 1 = 4, (N = 4).$$

Gọi  $s_0 = 0 < s_1 = 2 < s_2 = 3$ , và đặt

$$x_{01} = 0, a_{01} = 1, \quad x_{11} = 0, a_{11} = \alpha, \quad x_{12} = 1, a_{12} = -1$$

$$x_{21} = 2, a_{21} = 0,$$

thì điều kiện của bài toán tương đương với điều kiện

$$H^{(s_k)}(x_{ki}) = a_{ki}, \text{ với } k = 0, 1, 2 \text{ và } i = 1, \dots, r_{k+1}.$$

Trước hết, ta sử dụng ký hiệu  $g_N(x) = (1, x, \dots, x^{N-1})$ .

Để đánh lại chỉ số cho cặp bộ số  $x_{ki}$  và  $a_{ki}$ , ta định nghĩa

$$m \simeq (k, i) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k + i,$$

$$m \simeq (0, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + 1 = 0 + 1 = 1,$$

$$m \simeq (1, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

$$m \simeq (1, 2) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$m \simeq (2, 1) \Leftrightarrow m = r_0 + r_1 + r_2 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Ta có

$$G_{N+1} = G_4 = \begin{pmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_4^{(0)}(0) \\ g_4^{(2)}(0) \\ g_4^{(2)}(1) \\ g_4^{(3)}(2) \end{pmatrix}.$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = 0.$$

Bài toán không có nghiệm duy nhất. Xét đa thức

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

$$(\alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T, \quad A = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T.$$

Khi đó nghiệm của bài toán là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau

$$G_4.(\alpha) = A.$$

Ta xét hệ tuyến tính (\*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ 2\alpha_2 = \alpha \\ 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = -1 \\ 6\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_2 = \frac{-1}{2} \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Nếu  $\alpha = -1$  thì hệ (\*) vô số nghiệm, do đó bài toán có vô số nghiệm dạng

$$P(x) = 1 + \alpha_1 x - \frac{1}{2}x^2,$$

với  $\alpha_1$  tùy ý.

Nếu  $\alpha \neq -1$  thì hệ (\*) vô nghiệm, do đó bài toán vô nghiệm.

## KẾT LUẬN

Đề tài luận văn này đã trình bày một số ví dụ và các bài tập vận dụng nhằm minh họa cho phần lý thuyết về các bài toán nội suy cổ điển trong giải tích, đặc biệt là bài toán nội suy cổ điển tổng quát, cho phép ta hiểu sâu sắc hơn về cơ sở và cấu trúc của lý thuyết các bài toán nội suy nói trên.

Luận văn cũng đề cập tới việc sáng tác hệ thống các bài tập mới phù hợp với trình độ của từng đối tượng học sinh, giúp ích trong việc bồi dưỡng học sinh năng khiếu toán học.

Trong khuôn khổ thời gian có hạn và trình độ của bản thân còn hạn chế nên đề tài không tránh khỏi thiếu sót. Tôi rất mong được sự thông cảm, sự đóng góp ý kiến quý báu của các thầy, cô và đồng nghiệp để tôi tiếp tục bổ sung hoàn thiện đề tài.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1993. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2002. *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*. NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, 2005. *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2005. *Algebraic Elements and boundary value problems in linear spaces*, NXB ĐHQGHN.
- [5] Nguyễn Văn Mậu, 2007. *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [6] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên)-Trịnh Đào Chiến-Trần Nam Dũng-Nguyễn Đăng Phát, 2008. *Chuyên đề chọn lọc về đa thức và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [7] Phạm Phú Triêm-Nguyễn Bường, 2000. *Giải tích số*, NXB ĐHQGHN.