

Mục lục

1	Kiến thức chuẩn bị	1
1.1	Một số định nghĩa và tính chất cơ bản về time scale . . .	1
1.2	Kiến thức cơ bản về hàm siêu bội	1
1.3	Kiến thức về quan hệ truy hồi và các liên phân số	1
1.4	Toán tử cực vi	1
1.5	Thời gian địa phương	1
1.6	Tính thuận nghịch của quá trình Markov	1
2	Chuyển động Brown trên một thang thời gian	2
2.1	Sự tồn tại	2
2.2	Tính duy nhất	4
2.3	Tính thuận nghịch	4
2.4	Thời điểm chạm đầu tiên của quá trình sinh và chết hai phía	5
2.5	Thời điểm chạm trên một tập con rời rạc của $\mathbb{T}$	6
3	Một số tính chất của chuyển động Brown trên thang thời gian rời rạc $\mathbb{T}_q$	8
3.1	Giới thiệu quá trình trên $\mathbb{T}_q$	8
3.2	Phân phối thời điểm chạm cho $\mathbb{T}_q$	9
	Kết luận	11
	Tài liệu tham khảo	12

Lời nói đầu

Mục đích của luận văn này là xây dựng quá trình chuyển động Brown với không gian trạng thái là một thang thời gian. Chúng tôi cũng nghiên cứu vài tính chất của quá trình chuyển động Brown trên một thang thời gian cụ thể $\mathbb{T}_q$. Nhờ định lý nổi tiếng của Levy chúng ta biết rằng chuyển động Brown trên $\mathbb{R}$ được đặc trưng bởi các tính chất sau: một quá trình ngẫu nhiên $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ là chuyển động Brown khi và chỉ khi:

- (I.) ξ có quỹ đạo mẫu liên tục,
- (II.) ξ là một martingale,
- (III.) $(\xi_t^2 - t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ là một martingale.

Trong luận văn này chúng tôi chỉ muốn thống nhất cách nhìn định lý Levy và định lý Wantanabe bằng cách chỉ ra rằng, trên một thang thời gian $\mathbb{T}$ tùy ý không bị chặn trên và dưới, luôn tồn tại duy nhất (theo phân phối) một quá trình ξ thỏa mãn điều kiện (II) và (III) cộng với một giả thiết tương tự của (I) hoặc tính chất "trượt tự do" của bước nhảy ngẫu nhiên. Cụ thể

- (I'.) Với $x < y < z$ trên $\mathbb{T}$ và các thời điểm $0 \leq r < t < \infty$ nếu $\xi_r = x$ và $\xi_t = z$ hoặc $\xi_r = z$ và $\xi_t = x$ thì $\xi_s = y$ với s nào đó thỏa mãn $r < s < t$.

Việc nghiên cứu những tính chất xa hơn của chuyển động Brown trên $\mathbb{T}$ là một yêu cầu tự nhiên. Trong luận văn, chúng tôi nghiên cứu vấn đề này cho trường hợp đặc biệt khi $\mathbb{T} = \mathbb{T}_q := \{(\pm q)^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ với $q > 1$. Trong trường hợp này, quá trình ξ bắt đầu tại x có cùng phân bố như quá trình $(\frac{1}{q^k} \xi_{q^{2k}t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ khi ξ được bắt đầu tại $q^k x$ với $k \in \mathbb{Z}$. Tính

chất "chia thang" như chuyển động Brown này cho phép ta tính toán hiển những biến đổi Laplace của thời điểm chạm và giải thức của ξ dưới dạng các số hạng của các liên phân số. Ta có thể đánh giá những liên phân số này dưới dạng các hàm siêu bội cơ bản

Nội dung của khóa luận gồm ba chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi liệt kê các khái niệm cơ bản về quá trình ngẫu nhiên; định nghĩa và một số tính chất của chuyển động Brown; định nghĩa về time scale; các tính chất cơ bản nhất về Δ -đạo hàm, tích phân trên time scale; khái niệm toán tử cực vi của quá trình Markov; khái niệm toán tử đặc trưng; khái niệm về thời gian địa phương; quá trình Feller-Dynkin; công thức Dynkin; các kiến thức cơ bản về hàm siêu bội; kiến thức về các quan hệ truy hồi và các liên phân số.

Chương 2: Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất của chuyển động Brown trên một thang thời gian cho trước. Để chứng minh sự tồn tại, chúng tôi áp dụng một phép chuyển đổi thời gian thích hợp vào chuyển động Brown trên đường thẳng thực để xây dựng được một quá trình Markov Feller-Dynkin thỏa mãn những đặc trưng Levy của chuyển động Brown trên thang thời gian. Tính duy nhất suy ra từ việc so sánh phân phối của thời điểm chạm và dựa vào một kết quả rằng nếu một quá trình có cùng phân phối thời điểm chạm với một quá trình Markov mạnh, quá trình đó sẽ là ảnh của quá trình Markov qua một phép chuyển đổi thời gian.

Chương 3: Nghiên cứu một số tính chất của chuyển động Brown trên thang thời gian rời rạc $\mathbb{T}_q$. Bằng việc ước lượng những liên phân số dưới dạng các hàm siêu hình học, chúng tôi đưa ra công thức hiển cho biến đổi Laplace của thời điểm chạm cũng như giải của chuyển động Brown trên $\mathbb{T}_q$. Ngoài ra, sử dụng tính thuận nghịch của quá trình đối với độ đo tự nhiên trên không gian trạng thái, chúng tôi tìm ra "phân phối của thời điểm chạm" của độ đo Itô tương ứng và số mũ Laplace của nghịch đảo của thời gian địa phương.

Hà Nội, năm 2011

Học viên

Trịnh Thị Bích Hiền

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

- 1.1 Một số định nghĩa và tính chất cơ bản về time scale
- 1.2 Kiến thức cơ bản về hàm siêu bội
- 1.3 Kiến thức về quan hệ truy hồi và các liên phân số
- 1.4 Toán tử cực vi
- 1.5 Thời gian địa phương
- 1.6 Tính thuận nghịch của quá trình Markov

Chương 2

Chuyển động Brown trên một thang thời gian

2.1 Sự tồn tại

Cho $\mathbb{T}$ là một thang thời gian không bị chặn cả trên và dưới. Chúng ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của quá trình Markov Feller- Dynkin thỏa mãn các điều kiện (I'), (II) và (III) lấy giá trị trên $\mathbb{T}$. Ý tưởng chính là chúng ta xây dựng hiển một quá trình chuyển động Brown trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$, sau đó nhờ một phép chuyển đổi thời gian ta sẽ nhận được quá trình mong muốn. Quá trình như vậy có tính chất tương tự như một chuyển động Brown nên người ta gọi chúng là một chuyển động Brown trên thang thời gian.

Ta định nghĩa độ đo Randon μ trên $\mathbb{R}$ bởi:

$$\mu(\cdot) := \mathbf{1}_{\mathbb{T}}.mes(\cdot) + \sum_{x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_{dd}} \frac{\sigma(x) - \rho(x)}{2} \delta_x(\cdot),$$

trong đó mes là độ đo Lebesgue. Định nghĩa phép cộng tính liên tục

$$A_u^\mu := \int_{\mathbb{R}} l_u^a \mu(da)$$

và kí hiệu θ_t^μ là nghịch đảo liên tục bên phải của nó, nghĩa là,

$$\theta_t^\mu := \inf\{u : A_u^\mu > t\}.$$

Xét quá trình

$$\xi_t := B_{\theta_t^\mu}. \quad (2.1)$$

Quá trình này được gọi là sự chuyển đổi thời gian của B_t đối với độ đo μ .

Để dàng thấy rằng ξ nhận $\mathbb{T}$ là không gian trạng thái và nếu $B_0 = x \in \mathbb{T}$ thì $\xi_0 = x$. Hơn nữa, do các phép biến đổi trên là liên tục nên có thể chỉ ra rằng ξ là một quá trình Markov Feller- Dynkin nhận giá trị trên $\mathbb{T}$. Với mỗi $x \in \mathbb{T}$, ký hiệu $y_{x,r} := \rho(x - r)$ và $z_{x,r} := \sigma(x + r)$. Ta định nghĩa toán tử tuyến tính $\mathcal{G}$ trên không gian Banach $C_0(\mathbb{T})$ như sau:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}f)(x) &:= \lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{z_{x,r} - x}{z_{x,r} - y_{x,r}} f(y_{x,r}) + \frac{x - y_{x,r}}{z_{x,r} - y_{x,r}} f(z_{x,r}) - f(x) \right) / (x - y_{x,r})(z_{x,r} - x) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{f(y_{x,r})}{(x - y_{x,r})(z_{x,r} - y_{x,r})} - \frac{f(x)}{(x - y_{x,r})(z_{x,r} - x)} + \frac{f(z_{x,r})}{(z_{x,r} - x)(z_{x,r} - y_{x,r})} \right) \\ &= \lim_{r \downarrow 0} \left(\frac{f(y_{x,r}) - f(x)}{(x - y_{x,r})(z_{x,r} - y_{x,r})} + \frac{f(z_{x,r}) - f(x)}{(z_{x,r} - x)(z_{x,r} - y_{x,r})} \right). \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\mathcal{G}$ có ý nghĩa tương tự như toán tử sinh của quá trình Brown chuẩn tắc $f \rightarrow \frac{1}{2}f''$ và trùng với toán tử sau này khi $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Cũng chú ý rằng nếu f là hạn chế trên $\mathbb{T}$ của một hàm trong $C_0^2(\mathbb{R})$ thì $f \in \text{Dom}(\mathcal{G})$ và

$$(\mathcal{G}f)(x) = \begin{cases} \frac{f(\rho(x))}{(x-\rho(x))(\sigma(x)-\rho(x))} - \frac{f(x)}{(x-\rho(x))(\sigma(x)-x)} + \frac{f(\sigma(x))}{(\sigma(x)-x)(\sigma(x)-\rho(x))}, & x \in \mathbb{T}_{ss}, \\ \frac{f(\rho(x))-f(x)}{(x-\rho(x))^2} + \frac{f'(x)}{x-\rho(x)}, & x \in \mathbb{T}_{sd}, \\ -\frac{f'(x)}{\sigma(x)-x} + \frac{f(\sigma(x))-f(x)}{(\sigma(x)-x)^2}, & x \in \mathbb{T}_{ds}, \\ \frac{1}{2}f''(x), & x \in \mathbb{T}_{dd}. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1.1. *Chuyển đổi thời gian ξ của chuyển động Brown B_t đối với độ đo μ , cho bởi công thức (2.1), là một quá trình Markov Feller- Dynkin trên $\mathbb{T}$ thỏa mãn các điều kiện (I'), (II) và (III). Toán tử sinh của ξ là $(\mathcal{G}, \text{Dom}(\mathcal{G}))$.*

2.2 Tính duy nhất

Định lý 2.2.1. Cho $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ là một quá trình Borel phải với không gian trạng thái Lusin E . Giả sử rằng các quỹ đạo mẫu của X là càdlàg và X không có điểm hút hoặc điểm lưu giữ. Cho Y là một quá trình càdlàg với không gian trạng thái E được định nghĩa trên không gian xác suất đầy đủ $(\Sigma, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ được trang bị một bộ lọc $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ thoả mãn các điều kiện thông thường. Giả sử $Y_0 = x_0$ với $x_0 \in E$ nào đó và các quỹ đạo mẫu của Y không phải là hằng số trên bất kỳ một khoảng thời gian nào với xác suất 1. Cho một tập Borel $B \subseteq E$, đặt $S_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ và định nghĩa hạt nhân "chạm" tương ứng bởi $\pi_B(x, A) = \mathbb{P}^x\{X_{S_B} \in A\}$ với $x \in E$ và $A \subset E$ Borel. Cho trước một $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ - thời điểm dừng bị chặn T . Đặt $\tau = \inf\{t \geq T : Y_t \in B\}$. Giả sử rằng

$$Q\{Y_\tau \in A | \mathcal{G}_T\} = \pi_B(Y_T, A)$$

với mọi thời điểm dừng T $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ - phù hợp và với tất cả các tập Borel A và B . Thì tồn tại phép cộng tính với nghịch đảo liên tục $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sao cho $(Y_{T_t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ có cùng phân bố như $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dưới họ độ đo xác suất $\mathbb{P}^x$.

Mệnh đề 2.2.2. Cho ζ là một quá trình càdlàg nhận giá trị trên $\mathbb{T}$ sao cho $\zeta_0 = z \in \mathbb{T}$. Giả sử ζ thoả mãn các tính chất (I'), (II) và (III) (được phát biểu cho ζ thay cho ξ). Khi đó ζ có cùng một phân phối như quá trình Feller- Dykin được giới thiệu trong mệnh đề 2.1.1 dưới họ độ đo xác suất $\mathbb{P}^x$.

2.3 Tính thuận nghịch

Sự mở rộng của kết quả sau đây sẽ đúng với trường hợp tổng quát hơn: với các giả thiết thích hợp, nếu ta có một quá trình Markov có tính thuận nghịch dưới một độ đo nào đó thì mọi chuyển đổi thời gian của nó sẽ thuận nghịch dưới một độ đo mới thích hợp. Tuy thế để hướng tới mục tiêu chính của luận văn, chúng ta đưa ra một chứng minh trực tiếp cho quá trình Markov là một chuyển động Brown.

Bổ đề 2.3.1. Quá trình ξ của mệnh đề 2.1.1 là thuận nghịch đối với độ đo μ . Đặc biệt, μ là một độ đo dừng cho ξ .

2.4 Thời điểm chạm đầu tiên của quá trình sinh và chết hai phía

Thời điểm chạm đầu tiên (hitting times) của quá trình ξ_t đối với tập B được định nghĩa là $\eta := \inf\{t : \xi_t \in B\}$ còn phân phối chạm được định nghĩa là phân phối của ξ_η . Để tính toán phân phối của thời điểm chạm cho ξ , chúng ta nhắc lại và phát triển một số mối liên hệ giữa biến đổi Laplace của thời điểm chạm cho quá trình sinh và chết và các liên phân số. Giả sử rằng Z là một quá trình sinh và chết hai phía. Nghĩa là, Z là một xích Markov với thời gian liên tục lấy giá trị trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ với các bước nhảy chỉ là ± 1 . Để định ý ta giả sử rằng Z bị tiêu vong nếu nó đạt $\pm\infty$ sau một khoảng thời gian hữu hạn. Đặt β_n (t.ư δ_n) là cường độ nhảy tới trạng thái $n+1$ (t.ư $n-1$) từ trạng thái n . Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ký hiệu $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t = n\}$ là thời điểm chạm vào ngưỡng n của Z (tức là thời điểm chạm vào tập $\{n\}$). Ta quy ước $\inf \emptyset = +\infty$. Ký hiệu $\mathbb{E}^x$ là kỳ vọng lấy theo độ đo $\mathbb{P}^x$. Xét các phép biến đổi Laplace

$$H_n^\downarrow(\lambda) := \mathbb{E}^n[e^{-\lambda\tau_{n-1}}]$$

$$H_n^\uparrow(\lambda) := \mathbb{E}^n[e^{-\lambda\tau_{n+1}}]$$

$$H_{n,m}(\lambda) := \mathbb{E}^n[e^{-\lambda\tau_m}],$$

với $\lambda > 0$. Nếu chúng ta định nghĩa

$$s_n(z) := \frac{-\rho_n}{1 + \rho_n + \frac{\lambda}{\beta_n} + z} \text{ và } \widehat{s}_n(z) := \frac{-\rho_n^{-1}}{1 + \rho_n^{-1} + \frac{\lambda}{\delta_n} + z},$$

thì chúng ta có thể viết kết quả 4 liên phân số truy hồi như sau:

$$-H_n^\downarrow(\lambda) = s_n \circ s_{n+1} \circ \dots \circ s_{n+m-1}(-H_{n+m}^\downarrow(\lambda)) \quad (2.2)$$

$$-\frac{1}{H_n^\downarrow(\lambda)} = \widehat{s}_{n-1} \circ \widehat{s}_{n-2} \circ \dots \circ \widehat{s}_{n-m}(-\frac{1}{H_{n-m}^\downarrow(\lambda)}) \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{H_n^\uparrow(\lambda)} = \widehat{s}_{n-1} \circ \widehat{s}_{n-2} \circ \dots \circ \widehat{s}_{n-m}(-\frac{1}{H_{n+m}^\uparrow(\lambda)}) \quad (2.4)$$

$$-H_n^\uparrow(\lambda) = s_n \circ s_{n+1} \circ \dots \circ s_{n+m-1}(-H_{n+m}^\uparrow(\lambda)). \quad (2.5)$$

2.5 Thời điểm chạm trên một tập con rời rạc của $\mathbb{T}$

Trong phần này, ta giả sử với một số $a \in \mathbb{T}$ nào đó, tập vô hạn $\mathbb{T} \cap (a, +\infty)$ là rời rạc nhận a là điểm tụ. Do tập $\mathbb{T} \cap (a, +\infty)$ là đếm được và rời rạc nên ta có thể sắp nó thành dãy tăng dần: $\mathbb{T} \cap (a, +\infty) = \{t_n : n \in \mathbb{Z}, t_n < t_{n+1}\}$. Ta định nghĩa quá trình $Z : \mathbb{T} \cap (a, b) \rightarrow \mathbb{Z}$ bởi $Z(t_n) := n$. Nếu ξ đi ra khỏi tập $(a, +\infty)$ thì ta đặt $Z(\xi) = -\infty$. Khi đó, ảnh của ξ qua Z là một quá trình sinh và chết hai phía và có thể tiến đến $-\infty$ trong thời gian hữu hạn và bị tiêu vong ở đó. Từ Mệnh đề 2.2.2, cường độ nhảy của Z là

$$\delta_n = \frac{1}{(t_n - t_{n-1})(t_{n+1} - t_{n-1})} \text{ và } \beta_n = \frac{1}{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} - t_{n-1})}, \quad (2.6)$$

và vì vậy

$$\rho_n = \frac{(t_{n+1} - t_n)}{(t_n - t_{n-1})}. \quad (2.7)$$

$$H_n^\uparrow = - \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{s}_n \circ \dots \circ \widehat{s}_{n-m}(0) = \frac{\widetilde{U}_n}{\widetilde{U}_{n+1}},$$

trong đó $\{\widetilde{U}_k\}$ là nghiệm tối thiểu trong hướng âm của phương trình

$$U_{k-1} = (1 + \rho_k^{-1} + \frac{\lambda}{\delta_k})U_k - \rho_k^{-1}U_{k+1}. \quad (2.8)$$

Đặc biệt điều này nói rằng biến đổi Laplace của thời điểm chạm trên cho quá trình bị tiêu vong tại a được đưa ra bởi một công thức đơn giản dưới dạng các số hạng của $\{U_m\}$,

$$H_{n,n+m}(\lambda) = \prod_{k=0}^{m-1} H_{n+k}^\uparrow(\lambda) = \frac{U_{n+m+1}}{U_{n+1}}, m > 0.$$

Bây giờ giả sử rằng β_n và δ_n hội tụ tới 0 khi $n \rightarrow \infty$ và $\rho_n \rightarrow \rho \in (1, \infty)$.

Một biến đổi tương đương của liên phân số liên quan đến các liên phân số suy ra bởi truy hồi (2.2) và liên phân số suy ra từ truy hồi tương đương.

$$-\beta_{n-1}H_n^\downarrow(\lambda) = \frac{-\beta_{n-1}\delta_n}{\beta_n + \delta_n + \lambda - \beta_n H_{n+1}^\downarrow(\lambda)}. \quad (2.9)$$

$$V_{k+1} = (\beta_k + \delta_k + \lambda)V_k - \beta_{k-1}\delta_k V_{k-1}. \quad (2.10)$$

Tuy nhiên, $U_0 := V_0$ và

$$U_k := \begin{cases} V_k \setminus \prod_{i=0}^{k-1} \beta_i, & k > 0, \\ V_k \prod_{i=k}^{-1} \beta_i, & k < 0. \end{cases}$$

xác định một tương quan 1-1 giữa các nghiệm (2.10) và các nghiệm

$$U_{k+1} = (1 + \rho_k + \frac{\lambda}{\beta_k})U_k - \rho_k U_{k-1} \quad (2.11)$$

và, vì tương quan này ánh xạ các nghiệm cực tiểu tới các nghiệm cực tiểu, nếu ký hiệu bởi $\{\tilde{U}_k\}$ là nghiệm cực tiểu theo hướng dương (2.11) thì

$$H_n^\downarrow(\lambda) = \frac{\tilde{U}_n}{\tilde{U}_{n-1}}$$

và

$$H_{n,n-m}(\lambda) = \prod_{k=0}^{m-1} H_{n-k}^\downarrow(\lambda) = \frac{\tilde{U}_{n-m-1}}{\tilde{U}_{n-1}}, m > 0.$$

Chương 3

Một số tính chất của chuyển động Brown trên thang thời gian rời rạc $\mathbb{T}_q$

3.1 Giới thiệu quá trình trên $\mathbb{T}_q$

Mệnh đề 3.1.1. Với mỗi q cho $x_q \in \mathbb{T}_q$ thoả mãn $x_q \rightarrow x$ khi $q \downarrow 1$. Khi đó phân bố của ξ bắt đầu tại x_q hội tụ đến phân bố của chuyển động Brown bắt đầu tại x khi $q \rightarrow 1$ (đối với tôpô Skorohod thông thường trên không gian của quỹ đạo mẫu càdlàg giá trị thực).

Bổ đề sau đây chỉ ra rằng ξ tuân theo tính chất chia thang tương tự như của chuyển động Brown.

Bổ đề 3.1.2. Phân phối của quá trình $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ qua $\mathbb{P}_x$ trùng với phân phối của $(\frac{1}{q}\xi_{q^2t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ qua $\mathbb{P}_{qx}$. Kết quả tương tự đúng cho quá trình tiêu vong $\hat{\xi}$.

3.2 Phân phối thời điểm chạm cho $\mathbb{T}_q$

Định lý 3.2.1. 1. Biến đổi Laplace của thời gian để đi từ 1 tới q cho cả X và $\widehat{X}$ là

$$H_0^\downarrow(\lambda) = \frac{q {}_0\phi_1(-; 0; q^{-1}; \frac{1}{\lambda q})}{\lambda {}_0\phi_1(-; 0; q^{-1}; \frac{1}{\lambda q^{-1}})}.$$

Một biểu thức thay thế là

$$H_0^\downarrow(\lambda) = \frac{1}{(\lambda q^{-1} + 1)} \frac{{}_1\phi_1(0; -\frac{1}{\lambda q}; q^{-2}; -\frac{1}{\lambda q^2})}{{}_1\phi_1(0; -\frac{1}{\lambda q^{-1}}; q^{-2}; -\frac{1}{\lambda q})}.$$

2. Biến đổi laplace của thời gian để đi từ 1 tới q cho $\widehat{X}$ là

$$H_0^\uparrow(\lambda) = \frac{1}{(q + \lambda)} \frac{{}_1\phi_1(0; -\lambda q^{-3}; q^{-2}; q^{-3})}{{}_1\phi_1(0; -\lambda q^{-1}; q^{-2}; q^{-3})}.$$

Hệ quả 3.2.2. Biến đổi Laplace của những thời điểm chạm khác nhau cho $\widehat{X}$ được đưa ra bởi:

$$\begin{aligned} H_{n, n-m}(\lambda) &= \frac{q^{m^2-2mn}}{\lambda^m} \frac{{}_0\phi_1(-; 0; q^{-1}; \frac{1}{\lambda q^{2n+1}})}{{}_0\phi_1(-; 0; q^{-1}; \frac{1}{\lambda q^{2(n-m)-1}})} \\ &= \frac{1}{(-\lambda q^{2n-1}; q^{-2})_m} \frac{{}_1\phi_1(0; -\frac{1}{\lambda q^{2n+1}}; q^{-2}; -\frac{1}{\lambda q^{2n+2}})}{{}_1\phi_1(0; -\frac{1}{\lambda q^{2n-1}} q^{2m}; q^{-2}; -\frac{1}{\lambda q^{2n}} q^{2m})}; \\ H_{n, -\infty}(\lambda) &= {}_1\phi_1(0; -\frac{1}{\lambda q^{2n+1}}; q^{-2}; -\frac{1}{\lambda q^{2n+2}}) e_{q^{-2}}(-\lambda q^{2n-1}) / e_{q^{-2}}(\frac{1}{q}), \end{aligned}$$

và

$$H_{n, n+m}(\lambda) = \frac{1}{q^m (-\lambda q^{2n+2m-3}; q^{-2})_m} \frac{{}_1\phi_1(0; -\lambda q^{2n-3}; q^{-2}; q^{-3})}{{}_1\phi_1(0; -\lambda q^{2n+2m-3}; q^{-2}; q^{-3})}.$$

Mệnh đề 3.2.3. Dưới $\mathbb{P}^{q^n}$, thời điểm chạm 0 của X có hàm mật độ:

$$\frac{1}{e_{q^{-2}}(\frac{1}{q})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{-m}}{(q^{-2}; q^{-2})_m} q^{2(m+n)+1} f(t q^{2(n+m)+1}), t > 0$$

trong đó $f(t)$ được xác định trong (??)

Mệnh đề 3.2.4. *Khi $q \rightarrow 1$, phân phối của biến ngẫu nhiên*

$$2(\log q)N + \log(q - 1)$$

hội tụ tới phân phối với hàm mật độ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x + \exp(-x))\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Kết luận

Luận văn đã xây dựng và chứng minh sự tồn tại, duy nhất của chuyển động Brown với không gian trạng thái là một thang thời gian. Luận văn đã xây dựng được toán tử sinh của chuyển động Brown và nghiên cứu một số tính chất quan trọng của nó, như tính đảo ngược, phân phối của thời điểm chạm. Những tính chất này được nghiên cứu kĩ hơn trong một thang thời gian đặc biệt: $\mathbb{T}_q$.

Chuyển động Brown nói riêng và quá trình Markov đóng một vai trò quan trọng trong giải tích ngẫu nhiên. Do đó, chúng tôi hy vọng những kết quả trong luận văn là một bước quan trọng trong việc nghiên cứu giải tích ngẫu nhiên trên thang thời gian. Trong tương lai, chúng tôi cũng hi vọng tiếp tục nghiên cứu những tính chất sâu sắc hơn của chuyển động Brown và quá trình Markov tổng quát trên thang thời gian.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lisa Lorentzen and Haakon Waadeland, *Continued fractions with applications*, Studies in Computational Mathematics, vol. 3, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.
- [2] Martin Bohner and Allan Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001, An introduction with application.
- [3] R. V. Chacon and B. Jamison, *A fundamental property of Markov processes with an application to equivalence under time changes*. Israel J. Math. 33 (1979), no.3-4, 241-269 (1980), A collection of invited papers on ergodic theory.
- [4] Fabrice Guillemin and Didier Pinchon, *Excursions of birth and death processes, orthogonal polynomials, and continued fractions*. J. Appl. Probab. 36.(1999), no. 3, 752-770.
- [5] Uwe Kuchler and Paavo Salminen, *On spectral measures of strings and excursions of quasi diffusions*, Séminaire de Probabilités, XXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, pp. 490-502.
- [6] Richard Durrett, *Probability: theory and examples*, second ed., Duxbury Press, Belmont, CA, 1996.
- [7] S. Bhargava and Chandrashekar Adiga, *On some continued fraction identities of Srinivasa Ramanujan*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), no. 1,13-18.
- [8] D. P. Gupta, M. E. H. Ismail, and D. R. Masson, *Contiguous relations, basic hypergeometric functions, and orthogonal polynomi-*

- als. III. Associated continuous dual q -Hahn polynomials*, J.Comput. Appl. Math. 68 (1996), no. 1-2, 115-149.
- [9] George Gasper and Mizan Rahman, *Basic hypergeometric series*, seconded., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, With a foreword by Richard Askey.
 - [10] Adrienne W. Kemp, *Heine-Euler extensions of the Poisson distribution*, Comm. Statist. Theory Methods 21 (1992), no. 3, 571-588.
 - [11] Tze Leung Lai, *Summability methods for independent identically distributed random variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 45. (1974), 253-261.
 - [12] H. Dym and H. P. McKean, *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 31.
 - [13] I. S. Kats, *The spectral theory of a string*, Ukrain. Mat. Zh. 46 (1994), no. 3, 155-176.