

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN VĂN LONG

CÔNG THỨC KHAI TRIỂN
TAYLOR - GONTCHAROV
VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

HÀ NỘI, NĂM 2009

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN VĂN LONG

CÔNG THỨC KHAI TRIỂN TAYLOR - GONTCHAROV VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành : GIẢI TÍCH

Mã số : 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

HÀ NỘI - NĂM 2009

MỤC LỤC

Mở đầu	3
1 Khai triển Taylor	6
1.1 Một số kiến thức chuẩn bị	6
1.1.1 Một số tính chất của đa thức	6
1.1.2 Một số định lý cơ bản của giải tích cổ điển	7
1.2 Khai triển Taylor đối với đa thức	8
1.3 Khai triển Taylor với các phần dư khác nhau	12
2 Công thức khai triển Taylor - Gontcharov	18
2.1 Bài toán nội suy Newton và công thức khai triển Taylor - Gontcharov	18
2.1.1 Bài toán nội suy Newton	18
2.1.2 Công thức khai triển Taylor - Gontcharov	20
2.2 Khai triển Taylor - Gontcharov với các phần dư khác nhau . .	24
2.2.1 Khai triển Taylor - Gontcharov với phần dư dạng Lagrange	28
2.2.2 Khai triển Taylor - Gontcharov với phần dư dạng Cauchy	29
2.3 Sự hội tụ trong khai triển Taylor và khai triển Taylor- Gontcharov	31
2.4 Bài toán nội suy Newton đối với hàm đa thức nhiều biến. . .	38
2.4.1 Bài toán nội suy Taylor đối với hàm đa thức nhiều biến	38
2.4.2 Bài toán nội suy Newton đối với hàm đa thức nhiều biến.	39
3 Một số bài toán áp dụng	43
3.1 Khai triển Taylor của một số hàm sơ cấp và ứng dụng	43
3.1.1 Ước lượng và đánh giá sai số	43
3.1.2 Tính giới hạn hàm số.	49
3.2 Khai triển Taylor- Gontcharov với bài toán ước lượng hàm số	54
Kết luận	61
Tài liệu tham khảo	62

MỞ ĐẦU

Khai triển đa thức nói riêng và khai triển hàm số nói chung cùng những vấn đề liên quan đến nó là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Cùng với các bài toán nội suy, các bài toán về khai triển hàm số có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một trong những công cụ đắc lực của các mô hình liên tục cũng như các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình vi phân, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn,....

Lý thuyết khai triển hàm số cùng các bài toán nội suy liên quan ra đời rất sớm với các công trình của Taylor, Lagrange, Newton... Tuy nhiên, việc xây dựng bài toán khai triển hàm số thỏa mãn những yêu cầu khác nhau cũng như việc xây dựng lý thuyết hoàn thiện về khai triển hàm số nói chung đến nay vẫn đang được nhiều nhà toán học tiếp tục nghiên cứu và phát triển theo nhiều hướng.

Lý thuyết các bài toán về khai triển hàm số cũng như các bài toán nội suy cổ điển có liên quan chặt chẽ đến các đặc trưng cơ bản của hàm số như tính đơn điệu, tính lồi lõm, tính tuần hoàn,... là những mảng kiến thức quan trọng trong chương trình giải tích.

Trong các giáo trình giải tích ở đại học ta đã biết bài toán nội suy Taylor

Giả sử hàm f xác định trên tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}$, trong đó Ω là hợp của các khoảng mở trên trục thực. Giả sử f khả vi cấp n tại điểm $a \in \Omega$. Hãy xác định các đa thức $P_n(x)$ có bậc $\deg P_n(x) \leq n$ sao cho

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), k = 0, 1, \dots, n.$$

Từ đó ta có khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm a

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(f; x)$$

với các phần dư dạng Lagrange và Cauchy.

Trong khai triển Taylor, khi xét bộ điểm $M(a, P_n^{(k)}(a)), k = 0, 1, \dots, n$ ta thấy chúng cùng nằm trên đường thẳng $x = a$. Khi cho a thay đổi và nhận giá trị phụ thuộc vào k thì ta được một bộ điểm mới dạng

$$M_k(x_k, P_n^{(k)}(x_k)), k = 0, 1, \dots, n$$

Khi đó, ta thu được bài toán nội suy Newton và dẫn đến khai triển Taylor-Gontcharov là một mở rộng tự nhiên của khai triển Taylor.

Luận văn tập trung đi giải quyết vấn đề xây dựng công thức nghiệm của bài toán nội suy Newton, đưa ra biểu diễn hàm số $f(x)$ theo công thức khai triển Taylor- Gontcharov và đặc biệt đưa ra các đánh giá phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov của hàm $f(x)$ dưới hai dạng Lagrange và Cauchy cũng như mở rộng bài toán đối với hàm đa thức nhiều biến.

Luận văn gồm phần mở đầu và được chia thành ba chương

Chương 1: Nhắc lại các kiến thức cơ bản về đa thức và một số định lý cơ bản của giải tích cổ điển sẽ dùng trong luận văn. Tiếp theo tác giả trình bày bài toán nội suy Taylor, khai triển Taylor và các đánh giá phần dư của khai triển Taylor.

Chương 2: Là phần chính của luận văn. Bắt đầu bằng việc khảo sát bài toán nội suy Newton, đưa ra công thức nghiệm của bài toán nội suy Newton. Từ đó dẫn đến khai triển Taylor- Gontcharov của hàm $f(x)$ theo các mốc nội suy $x_0, x_1, \dots, x_n$ và đặc biệt đưa ra các đánh giá ước lượng phần dư của khai triển Taylor- Gontcharov dưới dạng Lagrange và Cauchy. Phần tiếp theo, tác giả đánh giá sự hội tụ trong khai triển Taylor và khai triển Taylor - Gontcharov. Cuối cùng là mở rộng của khai triển Taylor - Gontcharov cho

hàm đa thức nhiều biến.

Chương 3: Đề cập đến một số ứng dụng của khai triển Taylor và khai triển Taylor - Gontcharov cũng như của bài toán nội suy Newton trong ước lượng và đánh giá sai số, tìm giới hạn hàm số.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của NGND.GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà nội, người Thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình hoàn thành bản luận văn này. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với Giáo sư.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn tới các thầy cô giáo, các thành viên, các anh chị đồng nghiệp trong Seminare Giải tích trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà nội về những ý kiến đóng góp quý báu, sự giúp đỡ tận tình và sự cổ vũ hết sức to lớn trong suốt thời gian qua.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng sau Đại học, khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà nội đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập tại trường. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục - Đào tạo Nam Định, trường THPT Mỹ Tho và gia đình đã động viên, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt khóa học.

Hà nội, tháng 12 năm 2009

Tác giả

Trần Văn Long

CHƯƠNG 1

KHAI TRIỂN TAYLOR

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

1.1.1 Một số tính chất của đa thức

Các định nghĩa, tính chất trong mục này được trích từ [2].

Định nghĩa 1.1. Cho vành $\mathcal{A}$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức bậc n biến x là biểu thức có dạng

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, (a_n \neq 0)$$

trong đó các số $a_i \in \mathcal{A}$ được gọi là các hệ số, a_n gọi là hệ số bậc cao nhất và a_0 gọi là hệ số tự do của đa thức.

Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành $\mathcal{A}$ được ký hiệu là $\mathcal{A}[x]$. Khi $\mathcal{A}$ là một trường thì vành $\mathcal{A}[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Các vành đa thức thường gặp là $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Định nghĩa 1.2. Cho hai đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Ta định nghĩa các phép toán sau

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$$

$$P(x).Q(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + c_1x + c_0$$

trong đó

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0, k = 0, 1, \dots, n.$$

Định lý 1.1. Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $f(x), g(x)$ là hai đa thức khác 0 của vành $\mathcal{A}[x]$. Khi đó, tồn tại duy nhất cặp đa thức $q(x), r(x)$ thuộc $\mathcal{A}[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x)$$

với $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$. Khi $r(x) = 0$, ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$. Nếu $f(a) = 0$ thì ta nói a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm các nghiệm của $f(x)$ trong $\mathcal{A}$ được gọi là giải phương trình đại số bậc n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 (a_n \neq 0)$$

trong $\mathcal{A}$.

Định lý 1.2. Giả sử $\mathcal{A}$ là một trường, $a \in \mathcal{A}$ và $f(x) \in \mathcal{A}[x]$. Khi đó, dư của phép chia $f(x)$ cho $x - a$ chính là $f(a)$.

Định lý 1.3. Mỗi đa thức bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

Định lý 1.4. Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

1.1.2 Một số định lý cơ bản của giải tích cổ điển

Sau đây, ta nhắc lại một số định lý cơ bản sẽ dùng trong các phần sau. Các định lý này được trích từ [3].

Định lý 1.5 (Rolle). Giả sử $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) . Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 1.6 (Lagrange). Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Định lý 1.7 (Định lý về giá trị trung bình của tích phân). Nếu hàm số f khả tích trên đoạn $[a; b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ với $\forall x \in [a; b]$ thì tồn tại một số $\mu \in [m; M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Hệ quả 1.1. Nếu f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Định lý 1.8 (Định lý về giá trị trung bình mở rộng của tích phân). *Giả sử hai hàm số f và g khả tích trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn:*

a) $m \leq f(x) \leq M$ với $\forall x \in [a; b]$

b) $g(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$.

Khi đó, tồn tại ít nhất một số thực $\mu \in [m; M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Hệ quả 1.2. Giả sử f là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và g là hàm số khả tích trên đoạn $[a; b]$. Nếu $g(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì tồn tại ít nhất một số thực $c \in [a; b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Định lý 1.9 (Bolzano - Cauchy). *Giả sử f là một hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và α là một số nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \alpha$. Nói một cách khác, f lấy mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$.*

1.2 Khai triển Taylor đối với đa thức

Các định lý, định nghĩa và bài toán trong mục này chủ yếu được trích từ [1].

Ta thường thấy trong các sách giáo khoa hiện hành, dạng chính tắc của một đa thức đại số $P(x)$ bậc $n, n \in \mathbb{N}^*$, (thường được ký hiệu $\deg(P(x)) = n$) có dạng:

$$P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n, p_0 \neq 0.$$

Đa thức dạng chính tắc là đa thức được viết theo thứ tự giảm dần của lũy thừa. Tuy nhiên, khi khảo sát các đa thức, người ta thường quan tâm đến cả một lớp các đa thức bậc không quá một số nguyên dương n cho trước nào đó. Vì thế, về sau, người ta thường sử dụng cách viết đa thức $P(x)$ dưới dạng tăng dần của bậc lũy thừa

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n. \quad (1.1)$$

Nhận xét rằng đa thức (1.1) có tính chất

$$P^{(k)}(0) = k!b_k, k = 0, 1, \dots, n$$

và

$$P^{(k)}(0) = 0, k = n + 1, n + 2, \dots$$

Vì thế đa thức (1.1) thường được viết dưới dạng công thức (đồng nhất thức) Taylor

$$P(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n. \quad (1.2)$$

Với cách viết (1.2) ta thu được công thức tính hệ số $a_k (k = 0, 1, \dots, n)$ của đa thức $P(x)$, đó chính là giá trị của đạo hàm cấp k của đa thức tại $x = 0$:

$$a_k = P^{(k)}(0), k = 0, 1, \dots, n.$$

Từ đây ta thu được đồng nhất thức Taylor tại $x = 0$

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (1.3)$$

Ví dụ 1.1. Viết biểu thức

$$Q(x) = (x^2 - 2x - 2)^5 + (2x^3 + 3x^2 - x - 1)^2.$$

dưới dạng (chính tắc) công thức Taylor tại

$$Q(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_{10}}{10!}x^{10}.$$

Tính giá trị của a_8 ?

Theo công thức (1.3) thì ta có ngay hệ thức $a_8 = Q^{(8)}(0)$

Dạng (1.2) cho ta mối liên hệ trực tiếp giữa các hệ số của một đa thức chính tắc với các giá trị đạo hàm của đa thức đó tại $x = 0$. Trong trường hợp tổng quát, công thức Taylor tại $x = x_0$ có dạng:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (1.4)$$

Ví dụ 1.2. Viết biểu thức:

$$Q(x) = (x - 1)(x - 2)\cdots(x - 9)$$

dưới dạng (chính tắc) công thức Taylor tại điểm $x = 10$:

$$Q(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}(x - 10) + \frac{a_2}{2!}(x - 10)^2 + \cdots + \frac{a_9}{9!}(x - 10)^9.$$

Tính giá trị của a_7 ?

Công thức (1.4) cho ta hệ thức $a_7 = Q^{(7)}(10)$.

Trong trường hợp đa thức bậc tùy ý, ta có các kết quả hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $\deg P(x) \leq n$ và $P^{(k)}(\alpha) = q_k, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, trong đó α, q_k là các số cho trước; $P^{(0)}(x) \equiv P(x)$ thì $P(x)$ có dạng:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{q_k}{k!}(x - \alpha)^k.$$

Đẳng thức trên được chứng minh bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp hai vế và sử dụng giả thiết về các giá trị ban đầu $P^{(k)}(\alpha) = q_k, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Việc chứng minh tính duy nhất được suy ra từ tính chất của các đa thức (khác 0) bậc không vượt quá n là nó có không quá n nghiệm (kể cả bội). Bây giờ, ta chuyển sang bài toán nội suy Taylor.

Bài toán 1.1 (Bài toán nội suy Taylor). Cho $x_0, a_k \in \mathbb{R}$ với $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Hãy xác định đa thức $T(x)$ có bậc không quá $N - 1$ và thỏa mãn các điều

kiện:

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.5)$$

Giải. Trước hết, dễ thấy rằng đa thức

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (x - x_0)^k.$$

có bậc $\deg T(x) \leq N - 1$. Tiếp theo, ta cần xác định các hệ số $\alpha_k \in \mathbb{R}$ sao cho $T(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Lần lượt lấy đạo hàm $T(x)$ đến cấp thứ $k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ tại $x = x_0$ và sử dụng giả thiết

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Ta suy ra

$$\alpha_k = \frac{a_k}{k!}, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Thay giá trị của α_k vào biểu thức của $T(x)$, ta thu được

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k. \quad (1.6)$$

Với mỗi $k = 0, 1, \dots, N-1$, ta có

$$T^{(k)}(x) = a_k + \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{a_j}{(j-k)!} (x - x_0)^{j-k}.$$

Do vậy đa thức $T(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Cuối cùng, ta chứng minh rằng đa thức $T(x)$ nhận được từ (1.6) là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Taylor .

Thật vậy, nếu có đa thức $T_*(x)$, có bậc $\deg T_*(x) \leq N - 1$ cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán (1.5) thì khi đó, đa thức

$$P(x) = T(x) - T_*(x)$$

cũng có bậc $\deg P(x) \leq N - 1$ và đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$P^{(k)}(x_0) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Tức là, đa thức $P(x)$ là đa thức có bậc không quá $N - 1$ mà lại nhận x_0 làm nghiệm với bội không nhỏ thua N , nên $P(x) \equiv 0$, và do đó $T(x) = T_*(x)$.

Định nghĩa 1.3. Đa thức

$$T(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k$$

được gọi là đa thức nội suy Taylor.

Nhận xét 1.1. Chú ý rằng đa thức nội suy Taylor $T(x)$ được xác định từ (1.6) chính là khai triển Taylor đến cấp thứ $N - 1$ của hàm số $T(x)$ tại điểm $x = x_0$.

1.3 Khai triển Taylor với các phần dư khác nhau

Các định lý, định nghĩa và bài toán trong mục này chủ yếu được trích từ [1].

Ta đã xét công thức khai triển Taylor đối với đa thức. Tiếp theo, trong mục này, ta sẽ xác lập công thức Taylor với các phần dư khác nhau. Ta nhắc lại, khi hàm f khả vi tại điểm $x = a$ thì theo định nghĩa, ta có

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h).$$

Nếu đặt $a + h = x$ thì $h = x - a$ và

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a).$$

Nói một cách khác, tồn tại hàm tuyến tính

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

sao cho

$$f(x) = P_1(x) + o(x - a)$$

trong đó

$$P_1(a) = f(a), P_1'(a) = f'(a).$$

Ta phát biểu một số bài toán sau đây.

Bài toán 1.2. Giả sử hàm f xác định trên tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}$, trong đó Ω là hợp của các khoảng mở trên trục thực. Giả sử f khả vi cấp n tại điểm $a \in \Omega$. Hãy xác định các đa thức $P_n(x)$ có bậc $\deg P_n(x) \leq n$ sao cho

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), k = 0, 1, \dots, n.$$

Giả sử $P(x)$ là đa thức (bậc n) tùy ý. Ta viết

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (x-a)^k.$$

Khi đó

$$P^{(\mu)}(a) = \frac{a_\mu}{\mu!} \mu! = a_\mu.$$

Nếu bây giờ ta đặt

$$a_\mu = f^{(\mu)}(a), \mu = 0, 1, \dots, n.$$

thì

$$f^{(\mu)}(a) = P^{(\mu)}(a).$$

Như vậy bài toán đã được giải xong.

Tiếp theo, ta xét bài toán ước lượng hiệu $f(x) - P_n(x)$.

Định nghĩa 1.4. Đa thức

$$T_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-a)^k$$

được gọi là đa thức Taylor bậc n với tâm a của hàm f , khả vi cấp n tại điểm a .

Ta đặt

$$f(x) = T_n(f; x) + R_n(f; x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(f; x). \quad (1.7)$$

Công thức (1.7) được gọi là công thức Taylor (dạng đầy đủ) của hàm $f(x)$.

Nếu $a = 0$ thì (1.7) được gọi là công thức Maclaurin.

Biểu thức $R_n(f; x)$ được gọi là phần dư của công thức Taylor. Với những điều kiện khác nhau đặt ra đối với hàm f , phần dư sẽ được biểu diễn bởi các công thức khác nhau. Lời giải của bài toán ước lượng hiệu $f(x) - P_n(x)$ cũng chính là ước lượng các biểu thức phần dư này.

Bổ đề 1.1. Nếu hàm φ có đạo hàm đến cấp n tại điểm a và

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0,$$

thì $\varphi(x) = o((x - a)^n)$ khi $x \rightarrow a$, tức là

$$\frac{\varphi(x)}{(x - a)^n} \rightarrow 0(x \rightarrow a).$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Với $n = 1$ ta có $\varphi(a) = \varphi'(a)$ và

$$\frac{\varphi(x)}{x - a} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \rightarrow \varphi'(a) = 0(x \rightarrow a)$$

tức là $\varphi(x) = o((x - a))$. Giả sử bổ đề đúng với n nào đó, tức là với điều kiện

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0,$$

thì

$$\varphi(x) = o((x - a)^n).$$

Ta cần chứng minh rằng với $\varphi^{(n+1)}(a) = 0$ thì

$$\varphi(x) = o((x - a)^{(n+1)}), x \rightarrow a.$$

Ta xét hàm $\psi(x) = \varphi'(x)$. Ta có

$$\psi(a) = \psi'(a) = \dots = \psi^{(n)}(a) = 0.$$

và do đó $\psi(x) = o((x - a)^n)$, tức là

$$\frac{\psi(x)}{(x - a)^n} = \frac{\varphi'(x)}{(x - a)^n} \rightarrow 0(x \rightarrow a).$$

Theo định lý Lagrange, ta có

$$\frac{\varphi(x)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{\varphi'(\xi)(x - a)}{(x - a)^{n+1}} = \frac{\varphi'(\xi)}{(\xi - a)^n} \left(\frac{\xi - a}{x - a} \right)^n.$$

trong đó, ξ nằm xen giữa a và x . Từ đó ta thu được

$$\frac{\varphi'(\xi)}{(\xi - a)^n} \rightarrow 0(x \rightarrow a), 0 < \frac{\xi - a}{x - a} < 1.$$

Như vậy, $\varphi(x) = o((x - a)^{(n+1)})$ khi $x \rightarrow a$ và bổ đề được chứng minh.

Định lý 1.10 (Taylor). *Giả sử $f : \mathbb{U}(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục đến cấp $n - 1$ trong δ - lân cận $\mathbb{U}(a, \delta)$ của điểm a và có đạo hàm hữu hạn cấp n tại điểm a . Khi đó, hàm f có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n) \quad (1.8)$$

khi $x \rightarrow a$, trong đó $0! = 1, f^{(0)}(a) = f(a)$.

Công thức (1.8) được gọi là công thức Taylor dạng địa phương với phần dư Peano.

Chứng minh. Đặt

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k, \psi(x) = (x - a)^n. \quad (1.9)$$

Từ (1.9) ta dễ dàng thấy rằng $\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(n)}(a) = 0$. Do đó theo bổ đề 1.1, ta thu được $\varphi(x) = o(\psi(x)), x \rightarrow a$ và hệ thức (1.9) được chứng minh.

Công thức (1.8) chỉ cho ta dáng điệu của $f(x) - T_n(f; x)$ với những giá trị x đủ gần a . Để có thể sử dụng đa thức $T_n(f; x)$ làm công cụ xấp xỉ hàm $f(x)$ cần phải đưa ra những dạng khác đối với phần dư $R_n(f; x)$.

Nếu hàm f có thêm những hạn chế chặt hơn so với định lý (2.1) thì ta thu được định lý Taylor toàn cục sau đây.

Định lý 1.11 (Taylor). *Giả sử $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi liên tục cấp n trên khoảng (a, b) và có đạo hàm cấp $n + 1$ tại mỗi điểm của khoảng (a, b) có thể trừ ra điểm $x_0 \in (a, b)$. Khi đó, giữa điểm x_0 và điểm $x \in (a, b)$ bất kỳ, tồn tại điểm ξ , sao cho*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(f; x) \quad (1.10)$$

trong đó

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{1}{n!p} \left(\frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p (x - \xi)^{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi), p \in \mathbb{R}, p > 0. \quad (1.11)$$

Công thức (1.10) được gọi là công thức Taylor đối với hàm f với phần dư R_{n+1} dưới dạng Schlomilch-Roche.

Chứng minh. Không giảm tính tổng quát, ta xét $x > x_0$. Xét hàm số

$$h(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{(x-t)^p}{n!p} \lambda, x_0 \leq t \leq x, \quad (1.12)$$

trong đó $p \in \mathbb{R}, p > 0$, λ là tham số.

Hàm $h(t)$ liên tục trên đoạn $[x_0, x]$, $h(x) = 0$ và đạo hàm $h'(t)$ tồn tại $\forall t \in (x_0; x)$. Ta chọn số λ sao cho

$$h(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^p}{n!p} \lambda = 0. \quad (1.13)$$

Với cách chọn đó, hàm $h(t)$ thỏa mãn mọi điều kiện của định lý Rolle trên đoạn $[x_0, x]$. Do đó, tồn tại $\xi \in [x_0, x]$, sao cho

$$h'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^{p-1}}{n!} \lambda = 0. \quad (1.14)$$

Thật vậy, từ hệ thức (1.11), ta có

$$\begin{aligned} h'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!} (x-t) + \frac{f''(t)}{2!} 2(x-t) - \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^{n-1} \\ - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{(x-t)^{p-1}}{n!} \lambda. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dễ dàng thấy rằng mọi số hạng ở vế phải của (1.15) trừ hai số hạng cuối cùng đều khử nhau hết. Từ đó bằng cách thay $t = \xi$ ta thu được (1.14). Từ (1.14) ta có

$$\lambda = f^{(n+1)}(\xi) (x-\xi)^{n-p+1}. \quad (1.16)$$

Thay λ từ (1.16) vào (1.11) ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Bằng cách chọn các giá trị $p > 0$ hoàn toàn xác định, ta thu được những trường hợp riêng đối với phần dư $R_{n+1}(f; x)$. Ta xét những trường hợp quan trọng nhất khi $p = n+1$ và $p = 1$.

Khi $p = n+1$ thì từ (1.11) ta thu được phần dư của công thức Taylor dưới dạng Lagrange

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \xi = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1. \quad (1.17)$$

Khi $p = 1$ thì từ (1.11) ta thu được phần dư của công thức Taylor dưới dạng Cauchy

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n, 0 < \theta < 1 \quad (1.18)$$

trong đó $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$.

Nhận xét 1.2. Công thức Maclaurin với các phần dư (1.17) và (1.18) có dạng tương ứng

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{dạng Lagrange}).$$

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (1 - \theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{dạng Cauchy}).$$

CHƯƠNG 2

CÔNG THỨC KHAI TRIỂN TAYLOR - GONTCHAROV

2.1 Bài toán nội suy Newton và công thức khai triển Taylor - Gontcharov

2.1.1 Bài toán nội suy Newton

Trước hết ta nhắc lại bài toán nội suy Taylor ở mục trước

Bài toán 2.1 (Nội suy Taylor). Cho $x_0, a_k \in \mathbb{R}$ với $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Hãy xác định đa thức $T(x)$ có bậc không quá $N - 1$ và thỏa mãn các điều kiện:

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \forall k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.1)$$

Nhận xét rằng khi xét bộ điểm $M(x_0, T^{(k)}(x_0)) (k = 0, 1, \dots, N - 1)$, ta thấy chúng cùng nằm trên một đường thẳng $x = x_0$. Khi ta cho x_0 thay đổi và nhận giá trị tùy ý phụ thuộc vào k thì ta được một bộ điểm mới dạng

$$M_k(x_k, T^{(k)}(x_k)), k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

sẽ trùng với bộ điểm ban đầu khi các x_k trùng nhau. Khi đó ta thu được bài toán nội suy Newton. Ta phát biểu bài toán đó dưới dạng sau đây.

Bài toán 2.2 (Bài toán nội suy Newton). (Xem [1]). Cho $x_i, a_i \in \mathbb{R}$, với $i = 0, 1, \dots, n$. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá n ($\deg N(x) \leq n$) và thỏa mãn các điều kiện:

$$N^{(i)}(x_i) = a_i, \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Để giải bài toán này, trước hết ta xét một số trường hợp riêng của nó.
 Với mỗi $i = 2, 3, \dots, n$, ta ký hiệu

$$R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_i dt_{i-1} \dots dt_1.$$

i) Nếu $n = 0$ (ứng với $i = 0$) thì ta có $\deg N(x) = 0$ và $N(x_0) = a_0$, và do đó $N(x) = a_0$.

ii) Nếu $n = 1$ (ứng với $i = 0, 1$), thì ta có

$$\begin{cases} N(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \\ N^{(i)}(x_i) = a_i, (i = 0, 1) \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $N(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ hay

$$N(x) = a_0 + a_1 R(x_0, x).$$

iii) Nếu $n = 2$ (ứng với $i = 0, 1, 2$), thì ta có

$$\begin{cases} N(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \\ N^{(i)}(x_i) = a_i, (i = 0, 1, 2). \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{a_2}{2} \\ \alpha_1 = a_1 - a_2 x_1 \\ \alpha_0 = a_0 - (a_1 - a_2 x_1)x_0 - \frac{a_2}{2}x_0^2. \end{cases}.$$

Do đó

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 \left[\frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{(x_0 - x_1)^2}{2} \right].$$

Từ đó:

$$N(x) = a_0 + a_1 R(x_0, x) + a_2 R^2(x_0, x_1, x).$$

iv) Một cách tương tự, trong trường hợp tổng quát, với $i = 0, 1, \dots, n$, ta chứng minh được

$$N(x) = a_0 + a_1 R(x_0, x) + \dots + a_n R^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) \quad (2.3)$$

là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Newton (2.2) và ta gọi đa thức này là *đa thức nội suy Newton*.

Thật vậy, dễ thấy rằng $\deg N(x) \leq n$. Ngoài ra, ứng với mỗi $i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ ta có:

$$N^{(i)}(x) = a_i + a_{i+1}R(x_i, x) + \dots + a_n R^{n-i}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x).$$

Từ đó suy ra

$$N^{(i)}(x_i) = a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Cuối cùng, ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán nội suy Newton.

Giả sử tồn tại đa thức $N_*(x)$ có bậc $\deg N_*(x) \leq n$ cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán 2.2 thì khi đó, đa thức $P(x) = N(x) - N_*(x)$ cũng có bậc $\deg(P(x)) \leq n$ và thỏa mãn điều kiện

$$P^{(i)}(x_i) = 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, theo cách xây dựng đa thức $N(x)$ ở trên, ứng với trường hợp $a_i = 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$, ta suy ra $P(x) \equiv 0$, và do đó $N(x) = N_*(x)$.

Nhận xét 2.1. Như đã lưu ý ở trên rằng đa thức nội suy Taylor (1.6) là trường hợp riêng của đa thức nội suy Newton (2.3) ứng với trường hợp $x_i = x_0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$. Công thức khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi thỏa mãn điều kiện

$$f^{(i)}(x_i) = a_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$$

được gọi là khai triển Taylor - Gontcharov.

Công thức khai triển Taylor-Gontcharov có rất nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán biên hỗn hợp thứ nhất của phương trình vi phân. Bạn đọc quan tâm đến vấn đề lý thuyết và ứng dụng của các dạng nội suy trừu tượng và nội suy cổ điển xin tìm đọc trong [5].

2.1.2 Công thức khai triển Taylor - Gontcharov

Tương tự như với khai triển Taylor, sau khi giải được bài toán Nội suy Newton, vấn đề đặt ra là xấp xỉ một hàm số bởi một đa thức khi biết đạo hàm tại một số điểm. Đó chính là nội dung của công thức khai triển Taylor-Gontcharov.

Trước hết, tương tự như đã làm với khai triển Taylor, ta xét một số bài toán sau đây:

Bài toán 2.3. (Xem [1], trang 91) Giả sử hàm f xác định trên tập $\Omega \in \mathbb{R}$ trong đó Ω là hợp của các khoảng mở trên trục thực. Giả sử f khả vi cấp i tại điểm $x_i \in \Omega, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Hãy xác định các đa thức $P_n(x)$ có bậc không quá n sao cho $P_n^{(i)}(x_i) = f^{(i)}(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Giải.

Đặt $f^{(i)}(x_i) = a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Khi đó, từ lời giải của bài toán nội suy Newton, ta thấy ngay đa thức:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 R(x_0, x) + \dots + a_n R^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$$

là đa thức duy nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán trên. $\square$

Bài toán 2.4. Cho $x_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$. Khi đó, đa thức $Q(x)$ có bậc $n + 1$ ($\deg Q(x) = n + 1$), hệ số cao nhất bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $Q_{n+1}^{(k)}(x_k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$ tồn tại duy nhất và xác định bởi

$$Q_{n+1}(x) = (n + 1)! R^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$$

trong đó:

$$R^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} dt_{n+1} dt_n \dots dt_1.$$

Giải.

Đặt

$$Q_{n+1}(x) = (n+1)! R^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = (n+1)! \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} dt_{n+1} dt_n \dots dt_1.$$

Khi đó, ta dễ dàng suy ra $\deg Q(x) = n + 1$ và hệ số của x^{n+1} bằng 1. Mặt khác, $\forall k = 0, 1, 2, \dots, n$ ta có:

$$Q_{n+1}^{(k)}(x) = (n+1)! R^{n-k+1}(x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, x) = (n+1)! \int_{x_k}^x \int_{x_{k+1}}^{t_{k+1}} \dots \int_{x_n}^{t_n} dt_{n+1} dt_n \dots dt_{k+1}.$$

Do đó, ta có:

$$Q_{n+1}^{(k)}(x_k) = 0.$$

Suy ra:

$$Q_{n+1}^{(k)}(x_k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Nên $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất. Giả sử tồn tại đa thức $Q_{n+1}^*(x)$ có bậc $\deg Q_{n+1}^*(x) \leq n+1$ cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán 2.4 thì khi đó, đa thức $P(x) = Q_{n+1}(x) - Q_{n+1}^*(x)$ cũng có bậc $\deg(P(x)) \leq n$ và thỏa mãn điều kiện

$$P^{(i)}(x_i) = 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, ta suy ra $P(x) \equiv 0$, và do đó $Q_{n+1}(x) = Q_{n+1}^*(x)$. □

Từ các bài toán trên ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1. Cho hàm f khả vi cấp i tại mọi điểm $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Khi đó, đa thức

$$P_n(f; x) = f^{(n)}(x_n).R^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) + f^{(n-1)}(x_{n-1}).R^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x) + \dots + f'(x_1).R(x_0, x) + f(x_0)$$

được gọi là đa thức nội suy Newton theo bộ nội suy $x_0, x_1, \dots, x_n$ của hàm f .

Định nghĩa 2.2. Với các giả thiết như ở định nghĩa 2.1, ta đặt:

$$f(x) := P_n(f; x) + R_n(f; x) = f^{(n)}(x_n).R^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) + f^{(n-1)}(x_{n-1}).R^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x) + \dots + f'(x_1).R(x_0, x) + f(x_0) + R_{n+1}(f; x). \quad (2.4)$$

Công thức (2.4) được gọi là công thức khai triển Taylor- Gontcharov của hàm f . Biểu thức $R_{n+1}(f; x)$ gọi là phần dư của công thức khai triển Taylor- Gontcharov.

Ta nhận thấy rằng, với những điều kiện khác nhau đặt ra đối với hàm f , phần dư $R_{n+1}(f; x)$ của công thức khai triển Taylor- Gontcharov sẽ được biểu diễn bởi các công thức khác nhau.

Lời giải của bài toán ước lượng hiệu $f(x) - P_n(x)$ cũng chính là ước lượng các biểu thức phần dư này. Trước hết, ta có kết quả sau:

Định lý 2.1. *Giả sử $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi và liên tục đến cấp $n+1$ trên khoảng (a, b) , $x_i \in (a, b)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Khi đó*

$$f(x) = P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x)$$

trong đó, $R_{n+1}(f; x)$ được xác định bởi:

$$R_{n+1}(f; x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) \cdot dt_{n+1} \cdot dt_n \dots dt_2 \cdot dt_1. \quad (2.5)$$

Chứng minh.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t_1) dt_1 = f(x_0) + \int_{x_0}^x \left[f'(x_1) + \int_{x_1}^{t_1} f''(t_2) \cdot dt_2 \right] dt_1 \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(x_1) dt_1 + \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= f(x_0) + f'(x_1) R^1(x_0; x) + \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} f''(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= f(x_0) + f'(x_1) R^1(x_0; x) + \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \left[f''(x_2) + \int_{x_2}^{t_2} f^{(3)}(t_3) dt_3 \right] dt_2 dt_1 \\ &= f(x_0) + f'(x_1) R^1(x_0; x) + f''(x_2) R^2(x_0; x_1; x) + \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \int_{x_2}^{t_2} f^{(3)}(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 \\ &\quad \dots \\ &= f(x_0) + f'(x_1) R^1(x_0; x) + f''(x_2) R^2(x_0; x_1; x) + \dots + f^{(n)}(x_n) R^n(x_0; x_1; \dots; x_{n-1}; x) \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \int_{x_2}^{t_2} \dots \int_{x_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \dots dt_2 dt_1 = P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x). \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$f(x) := P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x)$$

với

$$R_{n+1}(f; x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) \cdot dt_{n+1} \cdot dt_n \dots dt_2 \cdot dt_1.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.2. Biểu thức (2.5) cho ta công thức xác định phần dư $R_{n+1}(f; x)$ trong khai triển Taylor- Gontcharov của hàm $f(x)$. Câu hỏi đặt ra là phần dư của khai triển Taylor- Gontcharov có thể đánh giá được giống như ở khai triển Taylor không? Và nếu được thì đánh giá đó có dạng tương tự như dạng Lagrange và dạng Cauchy không? Trong phần tiếp theo, ta sẽ đi nghiên cứu vấn đề đó.

2.2 Khai triển Taylor - Gontcharov với các phần dư khác nhau

Trước hết, để thuận tiện ta nhắc lại một số ký hiệu ở mục trước:

$$R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_0 dt_1 \dots dt_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N.$$

$$R_{n+1}(f; x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) \cdot dt_{n+1} \cdot dt_n \dots dt_2 \cdot dt_1.$$

Để đơn giản, ta định nghĩa phép toán:

$$(R_i f)(x) = \int_{x_i}^x f(s) ds, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Dễ thấy:

$$(R_i 1)(x) = \int_{x_i}^x ds.$$

Và

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} f(t_{n+1}) \cdot dt_{n+1} \cdot dt_n \dots dt_2 \cdot dt_1.$$

Đặc biệt:

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n)(x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_n}^{t_n} dt_{n+1} \cdot dt_n \dots dt_2 \cdot dt_1 = R^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ta có một số kết quả quan trọng sau:

Mệnh đề 2.1. Với các ký hiệu như trên, ta có:

$$(i) \quad (R_k f)(x) = (R_0 f)(x) - (R_0 f)(x_k). \quad (2.6)$$

$$(ii) \quad (R_i R_k f)(x) = (R_i R_0 f)(x) - (R_i)(x)(R_0 f)(x_k). \quad (2.7)$$

$$(iii) \quad (R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = (R_0^{n+1} f)(x) - \sum_{k=1}^n (R_0 R_1 \dots R_{k-1})(x)(R_0^{n-k+1} f)(x_k). \quad (2.8)$$

Chứng minh.

i) Ta có:

$$\begin{aligned} (R_k f)(x) &= \int_{x_k}^x f(s) ds = \int_{x_k}^{x_0} f(s) ds + \int_{x_0}^x f(s) ds \\ &= \int_{x_0}^x f(s) ds - \int_{x_0}^{x_k} f(s) ds = (R_0 f)(x) - (R_0 f)(x_k) \rightarrow (i). \end{aligned}$$

ii) Sử dụng (i) ta có:

$$\begin{aligned} (R_i R_k f)(x) &= \int_{x_i}^x (R_k f)(t) dt = \int_{x_i}^x \left[\int_{x_0}^t f(s) ds - \int_{x_0}^{x_k} f(s) ds \right] dt \\ &= \int_{x_i}^x \int_{x_0}^t f(s) ds dt - \int_{x_i}^x dt \int_{x_0}^{x_k} f(s) ds \\ &= (R_i R_0 f)(x) - (R_i)(x)(R_0 f)(x_k) \rightarrow (ii). \end{aligned}$$

iii) Ta chứng minh (2.8) bằng phương pháp qui nạp. Ta có:

Với $n = 1$ thì từ (2.7) ta có:

$$(R_0 R_1 f)(x) = (R_0^2 f)(x) - (R_0)(x)(R_0 f)(x_1)$$

nên (2.8) đúng.

Giả sử (2.8) đúng với n , tức là:

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = (R_0^{n+1} f)(x) - \sum_{k=1}^n (R_0 R_1 \dots R_{k-1})(x) (R_0^{n-k+1} f)(x_k).$$

Ta chứng minh (2.8) đúng với $n + 1$, thật vậy, áp dụng (ii) và giả thiết qui nạp ta có:

$$\begin{aligned} (R_0 R_1 R_2 \dots R_{n+1} f)(x) &= (R_0 R_1 R_2 \dots R_{n-1}) [(R_n R_0 f)(x) - (R_n)(x)(R_0 f)(x_{n+1})] \\ &= R_0^{n+1} (R_0 f)(x) - \sum_{k=1}^n (R_0 R_1 \dots R_{k-1})(x) (R_0^{n-k+1} R_0 f)(x_k) - \\ & (R_0 R_1 \dots R_{n-1} R_n (R_0 f)(x_{n+1})) = (R_0^{n+2} f)(x) - \sum_{k=1}^{n+1} (R_0 R_1 \dots R_{k-1})(x) (R_0^{n-k+1} f)(x_k). \end{aligned}$$

Vậy:

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = (R_0^{n+1} f)(x) - \sum_{k=1}^n (R_0 R_1 \dots R_{k-1})(x) (R_0^{n-k+1} f)(x_k).$$

Từ đó $\rightarrow$ (iii). Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 2.2. Với các giả thiết như trên ta có

$$(R_0^k f)(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s) ds, k = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Chứng minh.

Ta chứng minh qui nạp theo k . Dễ thấy với $k = 1$ thì (2.9) luôn đúng.

Giả sử (2.9) đúng với $k = n$, tức là ta có:

$$(R_0^n f)(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds.$$

Ta chứng minh (2.9) đúng với $k = n + 1$, thật vậy, áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^n}{n!} f(s) ds &= \frac{(x-s)^n}{n!} \int_{x_0}^s f(t) dt \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\int_{x_0}^s f(t) dt \right) (s) ds \\ &= 0 + \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\int_{x_0}^s f(t) dt \right) (s) ds = (R_0^n \left(\int_{x_0}^s f(t) dt \right))(x) \\ &= (R_0^n R_0 f)(x) = (R_0^{n+1} f)(x). \end{aligned}$$

Do đó, (2.9) đúng với $k = n + 1$. Từ đó, mệnh đề được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.1. Từ (2.8) và (2.9) ta có kết quả sau:

$$\begin{aligned} (R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) &= \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^n}{n!} f(s) ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) \int_{x_0}^{x_k} \frac{(x_k-s)^{n-k}}{(n-k)!} f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Định lý 2.2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, với mọi $x_0, x \in [a; b]$ luôn tồn tại $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ với $0 < \theta < 1$ sao cho:

$$(R_0^{k+1} f)(x) = f(\xi) \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh. Từ đẳng thức (2.9) ta có

$$(R_0^{k+1} f)(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^k}{k!} f(s) ds.$$

Theo định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ với $0 < \theta < 1$ sao cho

$$(R_0^{k+1} f)(x) = f(\xi) \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^k}{k!} ds = f(\xi) \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.2. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $x_i \in [a; b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ và x là điểm bất kì thuộc $[a; b]$. Khi đó ta có

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = f(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) \frac{f(\xi_k)}{(n-k+1)!} (x_k - x_0)^{n-k+1} \quad (2.11)$$

ở đó ξ nằm giữa x_0, x còn ξ_k nằm giữa x_0, x_k .

Chứng minh.

Từ đẳng thức (2.10) ta có

$$(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^n}{n!} f(s) ds - \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) \int_{x_0}^{x_k} \frac{(x_k-s)^{n-k}}{(n-k)!} f(s) ds.$$

Sau đó, lặp lại các bước chứng minh tương tự như định lý trên, ta có ngay điều phải chứng minh. $\square$

Từ các kết quả trên, ta có đánh giá phần dư trong khai triển Taylor - Gontcharov dưới dạng Lagrange và Cauchy như sau.

2.2.1 Khai triển Taylor - Gontcharov với phần dư dạng Lagrange

Định lý 2.3. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục cấp $n+1$ trên $[a; b]$ và $x_i \in [a; b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, x là điểm bất kì thuộc $[a; b]$. Khi đó, luôn tồn tại $\xi, \xi_i : \xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ và $\xi_i = x_0 + \theta_i(x_i - x_0)$ với $0 < \theta, \theta_i < 1$ sao cho phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov có dạng

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n-k+1)!} R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (x_k - x_0)^{n-k+1}. \quad (2.12)$$

(Phần dư dạng Lagrange)

Chứng minh. Trong (2.11), ta chỉ việc thay hàm $f(x)$ bởi hàm $f^{(n+1)}(x)$ ta sẽ có ngay (2.12). $\square$

Nhận xét 2.3. Trong trường hợp đặc biệt, khi $x_i = x_0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì công thức phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov dưới dạng Lagrange có dạng

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

sẽ trùng với công thức phần dư dưới dạng Lagrange của khai triển Taylor tại điểm x_0 ở (1.17)

2.2.2 Khai triển Taylor - Gontcharov với phần dư dạng Cauchy

Định lý 2.4. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $\forall x, x_0 \in [a; b]$. Khi đó, tồn tại $\theta : 0 < \theta < 1$ sao cho

$$(R_0^{k+1}f)(x) = f(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^k (x - x_0)^{k+1}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh.

Từ đẳng thức (2.9) ta có

$$(R_0^{k+1}f)(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-s)^k}{k!} f(s) ds.$$

Không mất tổng quát, ta giả sử rằng $x_0 \leq x$. Khi đó, đặt

$$m(x) = \inf_{x_0 \leq s \leq x} \frac{(x-s)^k}{k!} f(s).$$

$$M(x) = \sup_{x_0 \leq s \leq x} \frac{(x-s)^k}{k!} f(s).$$

Suy ra

$$m(x)(x - x_0) \leq (R_0^{k+1}f)(x) \leq M(x)(x - x_0).$$

Hay

$$m(x) \leq \frac{(R_0^{k+1}f)(x)}{x - x_0} \leq M(x).$$

Theo định lý Bonzano - Cauchy tồn tại $\theta : 0 < \theta < 1$ sao cho $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ thỏa mãn

$$\frac{(R_0^{k+1}f)(x)}{x - x_0} = \frac{(x - \xi)^k}{k!} f(\xi).$$

Tức là

$$\begin{aligned}(R_0^{k+1}f)(x) &= \frac{((x - x_0 - \theta(x - x_0))^k}{k!} f((x + \theta(x - x_0))(x - x_0)) \\ &= f((x + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^k(x - x_0)^{k+1}}{k!}.\end{aligned}$$

Vậy

$$(R_0^{k+1}f)(x) = f((x + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^k(x - x_0)^{k+1}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots.$$

(đpcm). $\square$

Từ (2.8) và với cách đánh giá tương tự như định lý 2.4, ta có ngay hệ quả sau

Hệ quả 2.3. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $x_i \in [a; b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ và x là điểm bất kì thuộc $[a; b]$. Khi đó

$$\begin{aligned}(R_0 R_1 R_2 \dots R_n f)(x) &= f(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1}}{n!} \\ &- \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) f(x_0 + \theta_k(x_k - x_0)) \frac{(1 - \theta_k)^{n-k}}{(n - k)!} (x_k - x_0)^{n-k+1}\end{aligned}\quad (2.13)$$

trong đó, $\theta, \theta_k \in (0; 1)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Bây giờ, nếu thay $f(x)$ bởi $f^{(n+1)}(x)$ trong (2.13), ta thu được công thức phần dư dạng Cauchy trong khai triển Taylor-Gontcharov của hàm $f(x)$ như sau

Định lý 2.5. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n + 1$ trên đoạn $[a; b]$ và $x_i \in [a; b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, x là điểm bất kì thuộc $[a; b]$. Khi đó, phần dư dạng Cauchy trong khai triển Taylor - Gontcharov của hàm $f(x)$ có dạng

$$\begin{aligned}R_{n+1}(f; x) &= f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1}}{n!} - \\ &- \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) f^{(n+1)}(x_0 + \theta_k(x_k - x_0)) \frac{(1 - \theta_k)^{n-k}}{(n - k)!} (x_k - x_0)^{n-k+1}\end{aligned}\quad (2.14)$$

trong đó $0 < \theta, \theta_k < 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. (Phần dư dạng Cauchy)

Nhận xét 2.4. Trong trường hợp đặc biệt, khi $x_i = x_0, \forall i = 1, \dots, n$ thì công thức phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov dưới dạng Cauchy

$$R_{n+1}(f; x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}}{n!}; 0 < \theta < 1$$

sẽ trùng với công thức phần dư dưới dạng Cauchy của khai triển Taylor tại điểm x_0 mà ta đã biết ở (1.18).

2.3 Sự hội tụ trong khai triển Taylor và khai triển Taylor- Gontcharov

Như trên ta đã biết, khai triển Taylor của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ có dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(f; x)$$

với phần dư dạng Lagrange

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \xi = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1.$$

Câu hỏi đặt ra là: Khi $x \longrightarrow x_0$ thì θ có dần tới một giá trị xác định nào đó hay không? Để giải quyết vấn đề này, trước hết ta đi xét một số trường hợp riêng.

i) Khai triển Taylor bậc 1 của hàm $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ có dạng

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta_1(x - x_0))(x - x_0)$$

Từ đó

$$f'(x_0 + \theta_1(x - x_0)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2.15)$$

Mặt khác ta lại có

$$f'(x_0 + \theta_1(x - x_0)) = f'(x_0) + f''(\xi) \cdot \theta_1(x - x_0) \quad (2.16)$$

trong đó ξ nằm giữa x_0 và $x_0 + \theta_1(x - x_0)$ và khi $x \longrightarrow x_0$ thì $\xi \longrightarrow x_0$. Rút θ_1 từ (2.16) ta có

$$\theta_1 = \frac{f'(x_0 + \theta_1(x - x_0)) - f'(x_0)}{f''(\xi) \cdot (x - x_0)}. \quad (2.17)$$

Kết hợp với (2.15) ta được

$$\theta_1 = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{f''(\xi).(x - x_0)^2}. \quad (2.18)$$

Chuyển qua giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ ta được

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{f''(\xi).(x - x_0)^2}.$$

Giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ nên áp dụng qui tắc L'Hospital liên tiếp 2 lần ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2f''(\xi).(x - x_0) + (x - x_0)^2 f^{(3)}(\xi).\xi'} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{2f''(\xi) + (x - x_0)[4f^{(3)}(\xi).\xi' + (x - x_0)(f^{(4)}(\xi)(\xi')^2 + f^{(3)}(\xi)(\xi''))]} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1 = \frac{1}{2}.$$

ii) Khai triển Taylor bậc 2 của hàm $f(x)$ tại điểm $x = x_0$ có dạng:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta_2(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2.$$

Từ đó

$$f''(x_0 + \theta_2(x - x_0)) = \frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right]}{(x - x_0)^2}. \quad (2.19)$$

Mặt khác

$$f''(x_0 + \theta_2(x - x_0)) = f''(x_0) + f^{(3)}(\xi)\theta_2(x - x_0) \quad (2.20)$$

trong đó ξ nằm giữa x_0 và $x_0 + \theta_2(x - x_0)$ và khi $x \rightarrow x_0$ thì $\xi \rightarrow x_0$. Rút θ_2 từ (2.20) ta được

$$\theta_1 = \frac{f''(x_0 + \theta_2(x - x_0)) - f''(x_0)}{f^{(3)}(\xi).(x - x_0)}. \quad (2.21)$$

Kết hợp với (2.19) ta có

$$\theta_2 = \frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right] - f''(x_0)(x - x_0)^2}{f^{(3)}(\xi).(x - x_0)^3}. \quad (2.22)$$

Chuyển qua giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ ta được

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right] - f''(x_0)(x - x_0)^2}{f^{(3)}(\xi) \cdot (x - x_0)^3}.$$

Sử dụng qui tắc L'Hospital liên tiếp 3 lần ta được

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2! f^{(3)}(x)}{3! f^{(3)}(\xi) + o(x - x_0)}.$$

Vì khi $x \rightarrow x_0$ thì $\xi \rightarrow x_0$ nên suy ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_2 = \frac{1}{3}.$$

Lý luận tương tự, ta có bài toán sau đây

Bài toán 2.5. Trong khai triển Taylor của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(f; x)$$

với phần dư

$$R_n(f; x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n, \xi = x_0 + \theta_n(x - x_0), 0 < \theta < 1.$$

Ta luôn có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n = \frac{1}{n+1}.$$

Nhận xét 2.5. Ta biết rằng nội suy Taylor là trường hợp riêng của nội suy Newton và khai triển Taylor là trường hợp riêng của khai triển Taylor-Gontcharov. Câu hỏi tự nhiên đặt ra sau bài toán (2.5) là trong công thức phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov có những tính chất giống như những tính chất mà ta đã nghiên cứu ở trên không?

Để giải quyết vấn đề này, trước hết ta đi xét một số trường hợp riêng.

i) Khai triển Taylor - Gontcharov bậc 1 của hàm $f(x)$ theo hai mốc nội suy x_0, x_1 có dạng

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + R_2(f; x)$$

trong đó

$$R_2(f; x) = \frac{f''(x_0 + \theta_1(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2 - R(x_0, x) \int_{x_0}^{x_1} f''(s) ds.$$

Từ đó ta có

$$f''(x_0 + \theta_1(x - x_0)) = \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_1)(x - x_0) + (x - x_0) \int_{x_0}^{x_1} f''(s) ds \right] \frac{2!}{(x - x_0)^2}.$$

Mặt khác, ta lại có

$$f''(x_0 + \theta_1(x - x_0)) = f''(x_0) + f^{(3)}(\xi)\theta_1(x - x_0)$$

trong đó ξ nằm giữa x_0 và $x_0 + \theta_1(x - x_0)$ và khi $x \rightarrow x_0$ thì $\xi \rightarrow x_0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{f''(x_0 + \theta_1(x - x_0)) - f''(x_0)}{f^{(3)}(\xi)(x - x_0)} \\ &= \frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_1)(x - x_0) + (x - x_0) \int_{x_0}^{x_1} f''(s) ds \right] - f''(x_0)(x - x_0)^2}{f^{(3)}(\xi)(x - x_0)^3}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_1)(x - x_0) + (x - x_0) \int_{x_0}^{x_1} f''(s) ds \right] - f''(x_0)(x - x_0)^2}{f^{(3)}(\xi)(x - x_0)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{2! \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_1)(x - x_0) + (x - x_0) (f'(x_1) - f'(x_0)) \right] - f''(x_0)(x - x_0)^2}{f^{(3)}(\xi)(x - x_0)^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \left[f'(x) - f'(x_1) + f'(x_1) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) \right]}{3f^{(3)}(\xi)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 f^{(4)}(\xi) \cdot \xi'} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \left[f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) \right]}{3f^{(3)}(\xi)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 f^{(4)}(\xi) \cdot \xi'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2[f''(x) - f''(x_0)]}{3.2f^{(3)}(\xi)(x - x_0) + o(x - x_0)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f^{(3)}(x)}{3.2f^{(3)}(\xi) + o(x - x_0)}.
\end{aligned}$$

Vì khi $x \rightarrow x_0$ thì $\xi \rightarrow x_0$ nên từ đó ta có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_1 = \frac{1}{3}.$$

ii) Trong trường hợp tổng quát, ta có

Bài toán 2.6. Trong khai triển Taylor - Gontcharov của hàm số $f(x)$ theo các mốc nội suy $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$f(x) = P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x)$$

với

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(f; x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \\
&- \sum_{k=1}^n \frac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n-k+1)!} R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (x_k - x_0)^{n-k+1}
\end{aligned}$$

ở đó ξ_k nằm giữa x_0 và $x_k, k = 1, 2, \dots, n$,

ta luôn có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n = \frac{1}{n+2}.$$

Giải.

Khai triển Taylor-Gontcharov của hàm $f(x)$ theo các mốc nội suy $x_0, x_1, \dots, x_n$ có dạng

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x) \\
&= \sum_{k=0}^n a_k R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) + (R_0^{n+1} f^{(n+1)})(x) - \\
&- \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k).
\end{aligned}$$

Lại có

$$f^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^n a_k R^{k-i}(x_i, \dots, x_{k-1}, x) + (R_0^{n-i+1} f^{(n+1)})(x) -$$

$$- \sum_{k=i}^n R^{k-i}(x_i, \dots, x_{k-1}, x)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k).$$

Do đó

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x_0) &= \sum_{k=i}^n a_k R^{k-i}(x_i, \dots, x_{k-1}, x_0) + (R_0^{n-i+1} f^{(n+1)})(x_0) - \\ &- \sum_{k=i}^n R^{k-i}(x_i, \dots, x_{k-1}, x_0)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k). \end{aligned}$$

Do $(R_0^{n-i+1} f^{(n+1)})(x_0) = 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x_0) &- \sum_{k=i}^n a_k R^{k-i}(x_i \dots x_{k-1}, x_0) + \\ &+ \sum_{k=i}^n R^{k-i}(x_i, \dots, x_{k-1}, x_0)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) = 0, \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Mặt khác, xét khai triển Taylor - Gontcharov của hàm $f(x)$ theo các mốc nội suy $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$f(x) = P_n(f; x) + R_{n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^n a_k R^k(x_0 x_1 \dots x_{k-1}, x) + R_{n+1}(f; x)$$

với phần dư

$$\begin{aligned} R_{n+1}(f; x) &= (R_0^{n+1} f^{(n+1)})(x) - \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} - \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0)) &= \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)(R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) \right]. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0)) = f^{(n+1)}(x_0) + f^{(n+2)}(\xi) \cdot \theta_n(x - x_0)$$

trong đó ξ nằm giữa x_0 và $x_0 + \theta_n(x - x_0)$ và khi $x \longrightarrow x_0$ thì $\xi \longrightarrow x_0$. Khi đó

$$\begin{aligned}\theta_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0)) - f^{(n+1)}(x_0)}{f^{(n+2)}(\xi)(x - x_0)} \\ &= \left[(n+1)! \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) \right) \right. \\ &\quad \left. - f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1} \right] / \left[f^{(n+2)}(\xi)(x - x_0)^{(n+2)} \right].\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(n+1)! \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) \right) \right. \\ &\quad \left. - f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{(n+1)} \right] / \left[f^{(n+2)}(\xi)(x - x_0)^{(n+2)} \right].\end{aligned}$$

Giới hạn này có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên áp dụng qui tắc L'Hospital ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(n+1)! \left(f'(x) - \sum_{k=1}^n a_k R^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^n R^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (R_0^{n-k+1} f^{(n+1)})(x_k) \right) \right. \\ &\quad \left. - (n+1)f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^n \right] / \left[(n+2)f^{(n+2)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)} + o(x - x_0)^{n+2} \right].\end{aligned}$$

Nhưng theo (2.23) thì giới hạn trên vẫn có dạng vô định $\frac{0}{0}$, tiếp tục áp dụng qui tắc L'Hospital liên tiếp $n+1$ lần ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(n+1)! \left[f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x_0) \right]}{(n+2)! f^{(n+2)}(\xi)(x - x_0) + o(x - x_0)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(n+1)! f^{(n+2)}(x)}{(n+2)! f^{(n+2)}(\xi) + o(x - x_0)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+2}.$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \theta_n = \frac{1}{n+2}.$$

□

2.4 Bài toán nội suy Newton đối với hàm đa thức nhiều biến.

Như ta đã biết, khai triển Taylor có thể mở rộng cho hàm nhiều biến với các kết quả tương tự. Câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Đối với hàm đa thức nhiều biến số, bài toán nội suy Taylor và bài toán nội suy Newton có tồn tại không? Và nếu tồn tại thì nó có dạng như thế nào? Trong mục này, ta sẽ đi tìm hiểu vấn đề trên. Cụ thể, để cho tính toán đơn giản, ta sẽ xét với hàm đa thức hai biến số.

Trước hết, ta sẽ mở rộng bài toán nội suy Taylor.

2.4.1 Bài toán nội suy Taylor đối với hàm đa thức nhiều biến

Bài toán 2.7 (Bài toán nội suy Taylor). Cho $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và các số thực $a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}, 0 \leq i + j \leq n$. Tìm đa thức hai biến $P(x, y)$ có bậc $\deg P(x, y) \leq n$ và thỏa mãn

$$\frac{\partial^k P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) = a_{ij}, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Giải. Trước hết, dễ thấy rằng đa thức

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \alpha_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, i + j = 0, 1, 2, \dots, n, i, j \in \mathbb{N}.$$

có bậc $\deg P(x, y) \leq n$. Tiếp theo, ta cần xác định các hệ số $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x, y)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) = a_{ij}, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Lần lượt lấy đạo hàm $P(x, y)$ đến cấp thứ $k, k = i + j = 0, 1, 2, \dots, n$ tại $(x, y) = (x_0, y_0)$, ta có

$$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) = \alpha_{ij} i! j!, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sử dụng giả thiết

$$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) = a_{ij}, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ta suy ra

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{i! j!}, \forall i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Thay giá trị của α_{ij} vào biểu thức của $P(x, y)$, ta thu được

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \frac{a_{ij}}{i! j!} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, i + j = 0, 1, 2, \dots, n, i, j \in \mathbb{N}. \quad (2.24)$$

Tương tự như trường hợp một biến, ta dễ dàng chứng minh được đa thức $P(x, y)$ nhận được ở (2.24) là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán 2.7.

Định nghĩa 2.3. Đa thức

$$P(x, y) = \sum_{i+j=0}^n \frac{a_{ij}}{i! j!} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, i + j = 0, 1, 2, \dots, n, i, j \in \mathbb{N}.$$

được gọi là đa thức nội suy Taylor.

2.4.2 Bài toán nội suy Newton đối với hàm đa thức nhiều biến.

Bài toán 2.8. (Bài toán nội suy Newton)

Cho $(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$ và các số thực $a_{ij}, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, 0 \leq i + j \leq n$. Tìm đa thức hai biến $N(x, y)$ có bậc $\deg N \leq n$ và thỏa mãn

$$\frac{\partial^{i+j} N}{\partial x^i \partial y^j}(x_i, y_j) = a_{ij}, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Giải. Trước hết, ta nhắc lại ký hiệu đã dùng trong phần trước. Với mỗi $i = 1, 2, 3, \dots, n$, ta ký hiệu

$$R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) = \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_0 dt_1 \dots dt_{i-1}.$$

Sau đây, ta xét một số trường hợp riêng.

i) Nếu $n = 0$ (ứng với $i = j = 0$) thì ta có $\deg(N(x, y)) = 0$ và $N(x_0, y_0) = a_{00}$, và do đó $N(x, y) = a_{00}$.

ii) Nếu $n = 1$ (ứng với $i, j = 0, 1$), thì ta có

$$\begin{cases} N(x, y) = ax + by + c \\ N(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c = a_{00} \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x_1; y_0) = a = a_{10} \\ \frac{\partial N}{\partial y}(x_0; y_1) = b = a_{01} \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $N(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0)$ hay

$$N(x, y) = a_{00} + a_{10}R(x_0, x) + a_{01}R(y_0, y)$$

iii) Nếu $n = 2$ (ứng với $i + j = 0, 1, 2$), thì ta có

$$N(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g$$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} N(x_0, y_0) = ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + ex_0 + fy_0 + g = a_{00} \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x_1; y_0) = 2ax_1 + by_0 + e = a_{10} \\ \frac{\partial N}{\partial y}(x_0; y_1) = 2cy_1 + bx_0 + f = a_{01} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}(x_2; y_0) = 2a = a_{20} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}(x_0; y_2) = 2c = a_{02} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}(x_1; y_1) = b = a_{11}. \end{cases}.$$

Từ đó ta có

$$N(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + a_{20} \left[\frac{(x - x_1)^2}{2} - \frac{(x_0 - x_1)^2}{2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +a_{02} \left[\frac{(y-y_1)^2}{2} - \frac{(y_0-y_1)^2}{2} \right] + a_{11}(x-x_0)(y-y_0) \\
= & a_{00} + \left[a_{10}R(x_0, x) + a_{01}R(y_0, y) \right] + \left[a_{20}R^2(x_0, x_1, x) + a_{11}R(x_0, x)R(y_0, y) \right. \\
& \left. + a_{02}R^2(y_0, y_1, y) \right].
\end{aligned}$$

iv) Nếu $n = 3$ (ứng với $i + j = 0, 1, 2, 3$), làm tương tự ta có

$$\begin{aligned}
N(x; y) = & a_{00} + \left[a_{10}R(x_0, x) + a_{01}R(y_0, y) \right] \\
& + \left[a_{20}R^2(x_0, x_1, x) + a_{11}R(x_0, x)R(y_0, y) + a_{02}R^2(y_0, y_1, y) \right] \\
& + \left[a_{30}R^3(x_0, x_1, x_2, x) + a_{21}R^2(x_0, x_1, x)R(y_0, y) + a_{12}R(x_0, x)R^2(y_0, y_1, y) + \right. \\
& \left. + a_{30}R^3(y_0, y_1, y_2, y) \right].
\end{aligned}$$

v) Một cách tương tự, trong trường hợp tổng quát, với $i, j \in \mathbb{N}, i + j \in \{0, 1, \dots, n\}$, ta chứng minh được

$$N(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x) \cdot R^j(y_0, y_1, \dots, y_{j-1}, y). \quad (2.25)$$

Là đa thức duy nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán nội suy Newton (2.7) và ta gọi đa thức này là *đa thức nội suy Newton cho hàm hai biến số*.

Thật vậy, dễ thấy rằng $\deg(N(x)) \leq n$. Ngoài ra, ứng với mỗi cặp $(i, j) : i + j = 0, 1, 2, \dots, n$, theo tính chất của $R^i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x)$ ở phần trước, ta có

$$\frac{\partial^{i+j} N}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) = a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Cuối cùng, ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán nội suy Newton.

Giả sử tồn tại đa thức $N_*(x, y)$ có bậc $\deg N_*(x, y) \leq n$ cũng thỏa mãn điều kiện của bài toán 2.7 thì khi đó, đa thức $P(x, y) = N(x, y) - N_*(x, y)$ cũng có bậc $\deg(P(x, y)) \leq n$ và thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial^{i+j} P}{\partial x^i \partial y^j}(x_i, y_j) = 0, i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, theo cách xây dựng đa thức $N(x, y)$ ở trên, ứng với trường hợp $a_{ij} = 0, \forall i + j = k, k = 0, 1, 2, \dots, n, i, j \in \mathbb{N}$, ta suy ra $P(x, y) \equiv 0$, và do đó $N(x, y) = N_*(x, y)$. $\square$.

Nhận xét 2.6. Như đã lưu ý ở trên rằng đa thức nội suy Taylor là trường hợp riêng của đa thức nội suy Newton. Dễ dàng thấy rằng điều đó cũng đúng với trường hợp hàm đa thức hai biến số khi $x_i = x_0, y_j = y_0, \forall i + j = 0, 1, \dots, n$.

CHƯƠNG 3

MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG

3.1 Khai triển Taylor của một số hàm sơ cấp và ứng dụng

3.1.1 Ước lượng và đánh giá sai số

Khai triển Taylor của hàm số $f(x)$ thường được sử dụng trong trường hợp đặc biệt $x_0 = 0$ và được gọi là công thức Maclaurin. Trong trường hợp này, các phần dư dạng Cauchy và Lagrange có dạng

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ (dạng Lagrange)}.$$

$$R_{n+1}(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ (dạng Cauchy)}.$$

Sau đây ta xét khai triển Maclaurin đối với một số hàm sơ cấp và đưa ra các đánh giá về phần dư của nó cũng như một số ứng dụng khác.

Ví dụ 3.1. Hàm $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ có $f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta x} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Ta có

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^x \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 3.2. Hàm $f(x) = \sin x$ có

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), n = 0, 1, \dots,$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, \dots, f^{(2n)}(0) = \sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f^{(2n+1)}(0) = \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x), \\ R_{2n+1}(x) &= \frac{\sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] x^{2n+1}}{(2n+1)!}, 0 < \theta < 1.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Suy ra

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 3.3. Hàm $f(x) = \cos x$ có

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2}, \\ f^{(n)}(\theta x) &= \cos\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right), n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Công thức Maclaurin theo các lũy thừa của x với phần dư dưới dạng Lagrange có dạng

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + R_{2n}(x), \\ R_{2n}(x) &= \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos\left(\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.4. Xét hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ xác định và khả vi vô hạn lần ứng với mọi $x > -1$ và $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x)$. Trong trường hợp này ta viết hai công thức phần dư

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n}, 0 < \theta < 1$$

(dạng Lagrange);

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(1+\theta x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}, 0 < \theta < 1$$

(dạng Cauchy).

Giả sử $0 \leq x \leq 1$. Khi đó, áp dụng công thức phần dư dạng Lagrange ta có

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n}|x|^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Trong trường hợp $-1 < x < 0$, công thức phần dư dạng Lagrange không cho ta kết luận về đáng điệu của R_n (vì ở đây chỉ biết $0 < \theta < 1$ và $\theta = \theta(x, n)$). Sử dụng công thức phần dư dạng Cauchy ta có

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1 - |x|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), 0 < |x| < 1,$$

vì rằng $0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1$. Trong trường hợp $x > 1$, $R_n(x) \nrightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Để thấy rõ điều này ta đặt

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots - (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}.$$

Khi đó

$$S_n(x) + R_n(x) = S_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$$

và

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Với $x > 1$ và $n \rightarrow \infty$ về phải của đẳng thức trên không dần đến 0. Do đó, $R_n(x)$ không dần đến 0 khi $n \rightarrow \infty$ vì không thỏa mãn tiêu chuẩn tồn tại giới hạn Cauchy.

Như vậy phần dư $R_n(x)$ của công thức Taylor đối với hàm $\ln(1+x)$ chỉ dần đến 0 với $-1 < x < 1$.

Xét hàm $f(x) = (1+x)^m$. Đối với hàm này ta chỉ cần xét $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Công thức Taylor theo các lũy thừa của x có dạng

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x).$$

Khi đó, phần dư dưới dạng Lagrange có dạng

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n (1+\theta x)^{m-n}.$$

Và dưới dạng Cauchy

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n (1+\theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1}.$$

Với $0 \leq x < 1$, thì theo trên ta có với $n > m$

$$|R_n| \leq \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{n!} |x|^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Thật vậy, ta đặt

$$U_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n.$$

Khi đó,

$$\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{|m-n|}{n+1} |x|.$$

Suy ra

$$|U_{n+1}| = \frac{|m-n|}{n+1} |x| |U_n|.$$

Với n đủ lớn, vế phải nhỏ hơn 1 vì $\frac{|m-n|}{n+1} \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$ và $0 \leq x < 1$. Do đó dãy (U_n) có giới hạn u nào đó. Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên khi $n \rightarrow \infty$, ta thu được $|u| = |x| \cdot |u|$ hay $u = 0$. Do đó $R_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ với $0 \leq x < 1$.

Với $-1 < x < 0$ thì từ công thức phần dư dưới dạng Cauchy ta có

$$|R_n| \leq C \frac{|m(m-1)\dots(m-n+1)|}{(n-1)!} |x|^n. \quad (3.2)$$

Trong đó, C là số phụ thuộc x nhưng không phụ thuộc n .

Thật vậy, để ước lượng $|R_n(x)|$, ta xét

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} \leq \left(\frac{1-\theta}{1-\theta} \right)^{n-1} = 1$$

và với $m-1 > 0$ thì

$$(1+\theta x)^{m-1} \leq 2^{m-1}.$$

Khi $m - 1 < 0$

$$(1 + \theta x)^{m-1} < \frac{1}{(1 - |x|)^{1-m}}.$$

Từ đó suy ra (3.2). Bằng cách chứng minh tương tự như ở phần trước ta dễ dàng thấy rằng $R_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$

Nhận xét 3.1. Vấn đề mấu chốt trong việc tìm công thức Taylor đối với hàm f cho trước là tính các hệ số a_n của nó. Các hệ số này được tính theo công thức $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Tuy nhiên công thức tổng quát này thường ít tiện lợi do việc tính toán các đạo hàm cấp cao quá cồng kềnh. Thông thường các hệ số của đa thức Taylor $T_n(f; x)$ được tính bằng cách sử dụng các khai triển như đã nêu ở trên.

Bây giờ ta xét một vài ví dụ. Để cho tiện lợi, ta tìm công thức Taylor với phần dư dưới dạng Peano.

Ví dụ 3.5. Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ theo công thức Maclaurin đến số hạng $o(x^n)$.

Ta có

$$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3(1 + \frac{2}{3}x)}.$$

Sử dụng khai triển

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Ta có

$$\frac{1}{2x+3} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{3^{k+1}} x^k + o(x^n).$$

Ví dụ 3.6. Hàm $f(x) = \ln(5 - 4x)$ có

$$\ln(5 - 4x) = \ln 5 + \ln \left(1 - \frac{4}{5}x \right).$$

Theo công thức khai triển ở trên, ta thu được

$$\ln(5 - 4x) = \ln 5 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \left(\frac{4}{5} \right)^k x^k + o(x^n).$$

Ví dụ 3.7. Xét hàm số

$$f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}.$$

Trước hết ta nhận xét rằng nếu

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Thì

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Từ đẳng thức

$$f(x) = \ln \frac{3}{2} + \ln \left(1 + \frac{x}{3}\right) - \ln \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

suy ra

$$f(x) = \ln \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k} \right) x^k + o(x^n).$$

Ví dụ 3.8. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}.$$

Để khai triển công thức Taylor các hàm hữu tỷ thông thường, ta biểu diễn hàm hữu tỷ đó dưới dạng tổng của đa thức và các phân thức tối giản. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{3}{4\left(1+\frac{x}{4}\right)} - \frac{2}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{4^k} - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{3^k} + o(x^n) \\ &= -\frac{5}{12} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{3(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+1}} \right) x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

3.1.2 Tính giới hạn hàm số.

Như đã thấy ở trên, khai triển Taylor cho ta công thức đơn giản và cũng rất tổng quát để xác định phần chính của hàm số. Do đó, để tìm giới hạn, người ta thường dùng công thức khai triển Taylor tới một cấp nào đó.

Ví dụ 3.9. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Giải. Vì mẫu số là đa thức x^5 nên ta cần khai triển tử số thành đa thức Taylor với độ chính xác đến $o(x^5)$ khi $x \rightarrow 0$.

Vì $\sin x \approx x$ khi $x \rightarrow 0$ nên $o(x^5) = o(\sin^5 x)$ khi $x \rightarrow 0$.

Theo công thức Taylor, ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

và

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} + o(\sin^5 x), x \rightarrow 0.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right]^3 \\ &= [x + \alpha(x)]^3 = x^3 + 3x^2\alpha(x) + 3x\alpha^2(x) + \alpha^3(x), \end{aligned}$$

trong đó

$$\alpha(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \approx -\frac{x^3}{6}.$$

Suy ra

$$x\alpha^2(x) \approx \frac{x^6}{36} = o(x^5), \alpha^3(x) \approx -\frac{x^9}{216} = o(x^5) \text{ khi } x \rightarrow 0.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$\sin^5 x = x^5 + o(x^5), x \rightarrow 0.$$

Thật vậy, vì

$$\alpha(x) \approx -\frac{x^3}{6}, x \rightarrow 0.$$

nên

$$\sin^5 x = x^5 + o(x^5), x \rightarrow 0.$$

Như vậy, khi $x \rightarrow 0$ ta có

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

Tương tự

$$\begin{aligned} x\sqrt[3]{1-x^2} &= x\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5 + o(x^5), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2} = \frac{19}{90}x^5 + o(x^5).$$

Vậy nên

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{19}{90} + \frac{o(x^5)}{x^5} \right) = \frac{19}{90}.$$

Ví dụ 3.10. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}.$$

Giải. Tử số và mẫu số của phân thức đều là những vô cùng bé khi $x \rightarrow 0$.

Vì

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

và

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

nên mẫu số có dạng

$$\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

Từ đó, ta cần khai triển tử số với độ chính xác đến $o(x^3)$. Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3), t \rightarrow 0.$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + 2 \tan x} &= 1 + \frac{1}{2}(2 \tan x) - \frac{1}{8}(2 \tan x)^2 + \frac{1}{16}(2 \tan x)^3 + o(\tan^3 x) \\ &= 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Khi đó tử số có khai triển là

$$\sqrt{1 + 2 \tan x} - e^x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \tan x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = 2.$$

Ví dụ 3.11. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}.$$

Giải. Theo công thức Taylor với $n = 3$, ta có

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

Khi đó, theo tính chất của khai triển Taylor đối với hàm hợp ta có

$$\begin{aligned}\tan(\tan x) &= \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0, \\ \sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 2.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.12. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

Giải. Giới hạn cần tìm có dạng " $\infty - \infty$ ". Ta biến đổi về dạng " $\frac{0}{0}$ " như sau

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)]^2 - x^2}{x^2 [x + o(x)]^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 [x^2 + o(x^2)]} \right) = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{3}$$

Ví dụ 3.13. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Giải. Giới hạn đã cho có dạng " $0 \cdot \infty$ ". Ta đưa về dạng " $\frac{0}{0}$ " bằng phép đổi biến.

Đặt $\sqrt{x} = t$ thì $t^2 = x$ và khi $x \rightarrow 0^+$ thì $t \rightarrow 0^+$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{t}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{t}{b}}}{t^3}.$$

Vì mẫu số là đa thức bậc ba nên ta cần khai triển Taylor ở tử số chính xác đến $0(t^3)$. Khi $t \rightarrow 0^+$ thì

$$\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{t}{a}} = \sqrt{a} \left[\frac{t}{\sqrt{a}} + t^3 3\sqrt{a}^3 + o\left(\frac{t^3}{3\sqrt{a}^3}\right) \right] = t + \frac{t^3}{3a} + o(t^3), t \rightarrow 0^+,$$

$$\sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{t}{b}} = \sqrt{b} \left[\frac{t}{\sqrt{b}} + t^3 3\sqrt{b}^3 + o\left(\frac{t^3}{3\sqrt{b}^3}\right) \right] = t + \frac{t^3}{3b} + o(t^3), t \rightarrow 0^+.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(t + \frac{t^3}{3a} + o(t^3) \right) - \left(t + \frac{t^3}{3b} + o(t^3) \right)}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{a-b}{3a}t^3 + o(t^3)}{t^3} = \frac{a-b}{3ab}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right) = \frac{a-b}{3ab}.$$

Ví dụ 3.14. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x.e^x) - \ln(1-x) - x)^{\cot x^3}.$$

Giải. Giới hạn cần tìm có dạng 1^∞ . Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x.e^x) - \ln(1-x) - x)^{\cot x^3} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \cot x^3 \ln f(x)}$$

với

$$f(x) = \cos(x.e^x) - \ln(1-x) - x.$$

Ta cần tính

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x^3 \ln[\cos(x.e^x) - \ln(1-x) - x].$$

Để ý rằng

$$\cot x^3 = \frac{1}{\tan x^3} = \frac{1}{x^3 + o(x^3)}, x \rightarrow 0.$$

Do đó ta cần phải khai triển hàm $[f(x) - 1]$ theo công thức Taylor tương đương với $o(x^3)$ bằng cách sử dụng các khai triển sau

$$xe^x = x + x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + o(t^3), t \rightarrow 0.$$

Suy ra

$$\cos xe^x = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

Ta thu được

$$f(x) - 1 = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3), x \rightarrow 0$$

và

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}$$

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x.e^x) - \ln(1-x) - x)^{\cot x^3} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

3.2 Khai triển Taylor- Gontcharov với bài toán ước lượng hàm số

Trong mục này, ta sẽ xét khai triển Taylor - Gontcharov của một số hàm cụ thể cũng như đánh giá ước lượng phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov.

Ví dụ 3.15. Xác định các tam thức bậc hai $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = -1; f'(3) = 0; f''(5) = 5.$$

Giải. Theo công thức nội suy Newton trong trường hợp $n = 2$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(3)(x-0) + f''(5) \left[\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(0-3)^2}{2} \right] \\ &= -1 + 5 \left[\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{9}{2} \right]. \end{aligned}$$

Hay

$$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 15x - 1.$$

Ví dụ 3.16. Xác định đa thức bậc ba $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện

$$f^{(n)}(3n+1) = n^3 - 3n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, 3.$$

Giải. Đa thức $f(x)$ cần tìm phải thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(1) = 1; f'(4) = 0; f''(7) = -1; f^{(3)}(10) = 4.$$

Theo công thức nội suy Newton trong trường hợp $n = 3$, ta nhận được đa thức cần tìm có dạng

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{87}{6}x^2 + 84x - \frac{1135}{6}.$$

Ví dụ 3.17. Với hàm $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ ta có $f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ với các mốc nội suy $x_0 = 0; x_1 = 1; x_2 = 2$ ta có

$$f(0) = 1; f'(0) = e; f''(2) = e^2.$$

Do đó, đa thức nội suy Newton bậc 2 của $f(x)$ có dạng

$$P_2(x) = 1 + e \int_0^x dt_1 + e^2 \int_0^x \int_1^{t_1} dt_2 dt_1 = 1 + ex + e^2 \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \right].$$

Từ đó, khai triển Taylor-Gontcharov của hàm số $f(x) = e^x$ với các mốc nội suy trên có dạng

$$e^x = 1 + ex + e^2 \left[\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \right] + R_3(f; x).$$

Trong đó, phần dư $R_3(f; x)$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} R_3(f; x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 - \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{2!}R^1(x_0, x)(x_1-x_0)^2 - \\ &- \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{1!}R^2(x_0, x_1, x)(x_2-x_0) = \frac{e^\xi}{6}x^3 - \frac{e^{\xi_1}}{2}x - e^{\xi_2}[(x-1)^2 - 1]. \end{aligned}$$

Trong đó, ξ nằm giữa x và $0; \xi_1 \in (0; 1), \xi_2 \in (0; 2)$.

Ví dụ 3.18. Xét hàm $f(x) = \sin x$ với các mốc nội suy $x_0 = \frac{\pi}{6}; x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{\pi}{3}; x_3 = \frac{\pi}{2}$. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), n = 0, 1, 2, \dots$$

Mặt khác

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Do đó, phần dư trong khai triển Taylor-Gontcharov đến bậc 3 của hàm số $f(x) = \sin x$ là

$$\begin{aligned} R_4(f; x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 - \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{3!} \frac{\pi^3}{1728} \int_{\frac{\pi}{6}}^x dt - \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{2!} \cdot \frac{\pi^2}{36} \int_{\frac{\pi}{6}}^x \int_{\frac{\pi}{4}}^{t_1} dt_2 dt_1 \\ &\quad - \frac{f^{(4)}(\xi_3)}{1!} \cdot \frac{\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^x \int_{\frac{\pi}{4}}^{t_1} \int_{\frac{\pi}{3}}^{t_2} dt_3 \cdot dt_2 \cdot dt_1 \\ &= \frac{\sin \xi}{4!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 - \frac{\sin \xi_1}{3!} \frac{\pi^3}{1728} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sin \xi_2}{2!} \cdot \frac{\pi^2}{72} \left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi^2}{144}\right] \\ &\quad - \frac{\sin \xi_3}{1!} \cdot \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 - \frac{\pi^2}{288} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^3}{1296}\right]. \end{aligned}$$

Trong đó, ξ nằm giữa x và $\frac{\pi}{6}$; $\xi_1 \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4})$, $\xi_2 \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3})$; $\xi_3 \in (\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 3.19. Cho $N(x)$ là đa thức có bậc $\deg N(x) \leq 3$ và thoả mãn các điều kiện

$$|N^{(k)}(k)| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Chứng minh rằng

$$|N(x)| \leq \frac{11}{2} \quad \forall x \in [0, 3].$$

Giải. Áp dụng công thức nội suy Newton tại các nút nội suy $x_i = i - 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, ta có

$$N(x) = N(0) + N'(1)R(0, x) + N''(2)R^2(0, 1, x) + N^{(3)}(3)R^3(0, 1, 2, x),$$

trong đó

$$\begin{aligned} R(0, x) &= \int_0^x dt = x, \\ R^2(0, 1, x) &= \int_0^x \int_1^{t_1} dt dt_1 = \frac{x}{2!}(x - 2), \end{aligned}$$

$$R^3(0, 1, 2, x) = \int_0^x \int_1^{t_1} \int_2^{t_2} dt dt_2 dt_1 = \frac{x}{3!}(x-3)^2.$$

Khi đó

$$N(x) = N(0) + N'(1)x + N''(2)\frac{x}{2!}(x-2) + N^{(3)}(3)\frac{x}{3!}(x-3)^2.$$

Từ giả thiết bài toán ta suy ra

$$\begin{aligned} |N(x)| &\leq 1 + |x| + \left| \frac{x}{2!}(x-2) \right| + \left| \frac{x}{3!}(x-3)^2 \right| \\ &\leq 1 + x + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x}{3!}(x-3)^2. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x}{3!}(x-3)^2 \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1. \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $f(x)$ trên $[0, 3]$ ta được

$$f(x) \leq f(3) = \frac{11}{2}.$$

Vậy

$$|N(x)| \leq \frac{11}{2}.$$

Ví dụ 3.20. Cho $N(x)$ là đa thức có bậc $\deg N(x) \leq 5$ có dạng

$$N(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

và thoả mãn các điều kiện

$$|N^{(4)}(4)| \leq 1, \quad |N^{(5)}(5)| \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $|N^{(4)}(x)|$ trên $[-1, 6]$.

Giải. Ta nhận thấy $N^{(4)}(x)$ là hàm số bậc nhất nên giá trị lớn nhất của $N(x)$ trên $[-1, 6]$ sẽ đạt được tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Do vậy $|N^{(4)}(x)|$ cũng sẽ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1, 6]$ tại một trong hai đầu mút $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Áp dụng công thức nội suy Newton tại các nút nội suy $x_i = i - 1$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ta có

$$N(x) = N(0) + N'(1)R(0, x) + N''(2)R^2(0, 1, x) + N^{(3)}(3)R^3(0, 1, 2, x)$$

$$+N^{(4)}(4)R^4(0, 1, 2, 3, x) + N^{(5)}(5)R^5(0, 1, 2, 3, 4, x),$$

trong đó

$$R^4(0, 1, 2, 3, x) = \int_0^x \int_1^{t_1} \int_2^{t_2} \int_3^{t_3} dt dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{x}{4!}(x-4)^3,$$

$$R^5(0, 1, 2, 3, 4, x) = \int_0^x \int_1^{t_1} \int_2^{t_2} \int_3^{t_3} \int_4^{t_4} dt dt_4 dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{x}{5!}(x-5)^4.$$

Suy ra

$$N^{(4)}(x) = N^{(4)}(4) + N^{(5)}(5)(x-4).$$

Khi đó

$$N^{(4)}(-1) = N^{(4)}(4) - 5N^{(5)}(5),$$

$$N^{(4)}(6) = N^{(4)}(4) + 2N^{(5)}(5).$$

Từ giả thiết bài toán, ta suy ra

$$|N^{(4)}(-1)| = |N^{(4)}(4) - 5N^{(5)}(5)| \leq 6,$$

$$|N^{(4)}(6)| = |N^{(4)}(4) + 2N^{(5)}(5)| \leq 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|N^{(4)}(x)|$ bằng 6 tại $x = -1$.

Tương tự như với khai triển Taylor, với khai triển Taylor- Gontcharov ta cũng có nhận xét sau

Nhận xét 3.1. Vấn đề mấu chốt trong việc tìm công thức đánh giá phần dư của công thức khai triển Taylor - Gontcharov đối với hàm f cùng với các mốc nội suy x_i cho trước là việc tính đạo hàm cấp cao của hàm f và biểu thức $R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)$. Tuy nhiên, việc tính đạo hàm cấp cao của một hàm số nhiều khi không đơn giản. Bên cạnh đó, khi mốc nội suy tăng lên thì việc tính toán biểu thức $R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x)$ khá phức tạp. Do đó, trong các ví dụ ở trên, vì giá trị của mốc nội suy nhỏ nên ta mới đưa ra được biểu thức đánh giá phần dư của $f(x)$ một cách chính xác. Còn trong trường hợp tổng quát, ta chỉ có thể đưa ra đánh giá đó dưới dạng Lagrange và Cauchy như trong (2.12) và (2.14).

Tuy nhiên, trong trường hợp hàm $f(x)$ có đạo hàm giới nội

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in [a; b], n = 0, 1, 2, \dots$$

ta có kết quả sau

Bài toán 3.1. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm mọi cấp trên $[a; b]$ và $x_i \in [a; b], i = 0, 1, 2, \dots, n$. Khi đó, nếu $\exists M > 0$ sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in [a; b], n = 0, 1, 2, \dots$$

thì $R_{n+1}(f; x) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Giải. Theo công thức xác định của $R_{n+1}(f; x)$ ta có

$$\begin{aligned} R_{n+1}(f; x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{f^{(n+1)}(\xi_k)}{(n-k+1)!} R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) (x - x_0)^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \left| R^k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x) \right| &= \left| \int_{x_0}^x \int_{x_1}^{t_1} \dots \int_{x_{k-1}}^{t_{k-1}} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{k-1}} dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \right| = \frac{1}{k!} (b-a)^k. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left| R_{n+1}(f; x) \right| &\leq \frac{M(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{M}{(n-k+1)!} \cdot \frac{1}{k!} (b-a)^k (b-a)^{n-k+1} \\ &= M(b-a)^{(n+1)} \left[\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(n-k+1)!} \right] \\ &\leq M(b-a)^{(n+1)} \left[\frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]! \left[n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right]!} \right] \\ &= M(b-a)^{(n+1)} \left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{\left[\frac{n}{2}\right]! \left[n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right]!} \right]. \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $n = 2p + i$, ($i = 0, 1$). Khi đó ta có

$$\left| R_{n+1}(f; x) \right| \leq M(b-a)^{2p+i+1} \left[\frac{1}{(2p+i+1)!} + \frac{2p+i}{p!(p+i+1)!} \right].$$

Trường hợp 1. Nếu $i = 0$, ta có

$$\left| R_{n+1}(f; x) \right| \leq M \left[\frac{(b-a)^{2p+1}}{(2p+1)!} + \left[\frac{(b-a)^p}{p!} \right]^2 \cdot \frac{(b-a)2p}{(p+1)} \right] \longrightarrow 0 (p \longrightarrow \infty).$$

Trường hợp 2. Nếu $i = 1$, ta có

$$\left| R_{n+1}(f; x) \right| \leq M \left[\frac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+2)!} + \left[\frac{(b-a)^p}{p!} \right]^2 \cdot \frac{(b-a)^2(2p+1)}{(p+1)(p+2)} \right] \longrightarrow 0 (p \longrightarrow \infty).$$

Vậy $R_{n+1}(f; x) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. □

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày và thu được

- Một số kết quả cơ bản về bài toán nội suy Taylor, khai triển Taylor, đánh giá công thức phần dư và sự hội tụ của khai triển Taylor.

- Đưa ra công thức nghiệm của bài toán nội suy Newton, biểu diễn hàm số $f(x)$ theo công thức khai triển Taylor- Gontcharov và đặc biệt đưa ra các đánh giá phần dư của khai triển Taylor - Gontcharov của hàm $f(x)$ dưới hai dạng Lagrange và Cauchy. Bên cạnh đó, luận văn đã đánh giá sự hội tụ của khai triển Taylor - Gontcharov và khái quát hóa bài toán nội suy Newton đối với hàm đa thức nhiều biến.

- Một số ứng dụng của khai triển Taylor và khai triển Taylor - Gontcharov trong việc ước lượng và đánh giá sai số, tính giới hạn hàm số....

- Một số hướng nghiên cứu có thể phát triển từ đề tài này là

1. Khai triển Taylor - Gontcharov đối với hàm nhiều biến và đánh giá phần dư của nó.
2. Các ứng dụng của khai triển Taylor - Gontcharov trong phương trình vi phân, trong lý thuyết các bài toán biên....

Vì thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự quan tâm, đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **Nguyễn Văn Mậu**, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXBGD, 2007.
- [2] **Nguyễn Văn Mậu**, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXBGD, 2004.
- [3] **Nguyễn Xuân Liêm**, *Giải tích*, tập I, NXB Giáo dục 1998.
- [4] **Nguyễn Duy Tiến, Trần Đức Long**, *Bài giảng giải tích*, NXB Đại học Quốc gia Hà nội 2004.
- [5] **Nguyen Van Mau**, *Algebraic Elements and Boundary Value Problems in Linear Spaces*, VNU Publishers, Hanoi 2005.
- [6] **Przeworska-Rolewicz, D.** *Equations with Transformed Argument. An Algebraic Approach*, Amsterdam-Warsaw 1973.
- [7] **Przeworska-Rolewicz, D.** *Algebraic Analysis*, PWN - Polish Scientific Publishers and D. Reidel Publishing Company, Warszawa - Dordrecht, 1988.